Gh. Siretchi

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL

VOL. 2

exerciții

Editura Științifică și Enciclopedică

GH. SIREȚCHI

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL

VOLUMUL II

Exerciții

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ
București, 1985

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚA

Această carte are la bază cele două volume de „Exerciții de analiză matematică" publicate de autor într-un tiraj redus la Centrul de Multiplicare al Universității din București, în mai multe ediții, începînd din 1974 și pînă în 1982 (v. [37]-[38] Bibliografie). Cartea conține peste 1600 de exerciții de calcul diferențial și integral, pe dreapta reală, dintre cele mai reprezentative.

Înțelegem aici prin „exercițiu" un rezultat matematic care nu face parte din matca matematicii. Majoritatea exercițiilor incluse în volum sînt clasice, autorii lor sînt anonimi, ele fac parte sub o formă sau alta din „folclorul" matematic, fiind contribuția mai multor generații de matematicieni. O serie de rezultate matematice cu timpul s-au elementarizat, datorită simplificării la maximum a demonstrațiilor lor sau datorită apariției unor rezultate mai generale care le înglobează ca pe niște cazuri particulare.

Un mare număr de exerciții din acest volum sînt de dată mai recentă. Ele au fost selectate și prelucrate de autor din diverse reviste de matematică românești și străine (v. „Indice de autori"). Aici includem și exercițiile publicate de autor de-a lungul anilor, în unele reviste, printre care să semnalăm pe cele mai reprezentative : 2.3.107., 2.3.113., 2.3.132., 3.1.53., 3.1.61., 4.3.6., 4.3.8., 6.1.7., 6.1.36., 6.3.5., 6.3.6., 6.4.46., 7.2.19., 7.3.5., 7.3.41.,8.1.13., 9.1.28., 9.1.29., 9.2.12., 9.2.81., 9.2.89., 10.1.4., 13.1.9.

Prin caracterul său elementar cartea se adresează unei largi categorii de cititori : elevilor din ultimele două clase de liceu, candidaților la admitere în învățămîntul superior, studenților din anul I din universități (facultățile de matematică, fizică, geologie-geografie), institute tehnice, economice, cît și profesorilor de matematică din licee în munca lor la catedră, pentru pregătirea gradelor didactice sau pentru cursurile de perfecționare.

O îndelungată experiență didactică dobîndită în munca cu studenții din anul I ai Facultății de Matematică a Universității din București, arată că studiul eficient al analizei matematice nu poate fi realizat decît atunci cînd teoria este permanent însoțită de rezolvarea unui mare număr de exerciții bine alese, care să apropie cît mai mult exercițiile de teorie și teoria de aplicații. Prin această carte de exerciții, asupra căreia am zăbovit peste zece ani, am încercat să răspundem unei astfel de nevoi reale a învățămîntului matematic.

Recomandăm cititorilor ca parcurgerea fiecărui capitol din volumul II să fie făcută în paralel cu parcurgerea capitolului corespunzător de teorie din volumul I, unde facem adesea trimiteri.

August 1985

GH. SIREȚCHI

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Prefață 5
Notații utilizate 9

Cap. 1. Noțiuni de teoria mulțimilor

1.1. Operații cu mulțimi. Relații. Funcții 13
1.2. Mulțimi finite, infinite, numerabile 18

Cap. 2. Numere reale. Șiruri de numere reale

2.1. Numere reale (generalități). Identități. Inegalități 23
2.2. Mulțimi mărginite și intervale în R 31
2.3. Șiruri de numere reale 34
2.4. Limite extreme ale unui șir de numere reale 110

Cap. 3. Serii și produse de numere

3.1. Serii de numere 116
3.2. Produse infinite de numere 144

Cap. 4. Funcții reale de o variabilă reală

4.1. Funcții reale de o variabilă reală. Generalități 148
4.2. Funcții monotone 155
4.3. Funcții cu proprietatea Darboux 157
4.4. Funcții pare. Funcții impare 160
4.5. Funcții periodice 160
4.6. Funcții mărginite. Extreme 164
4.7. Funcții liniare 168
4.8. Funcții cu punct fix 170
4.9. Funcții polinomiale 171

Cap. 5. Noțiuni de topologie pe R

5.1. Mulțimi închise, deschise și conexe 175
5.2. Mulțimi compacte 180
5.3. Limită și limită laterală a unei funcții într-un punct 185
5.4. Simbolurile lui Landau și Hardy 203
5.5. Funcții continue 205
5.6. Funcții uniform continue 234

Cap. 6. Derivabilitate

6.1. Funcții derivabile 244
6.2. Derivate de ordin superior 263
6.3. Teoremele lui Fermat și Rolle 267
6.4. Teorema lui Lagrange și consecințele sale 272
6.5. Continuitatea funcției derivate. Derivarea funcției inverse 292
6.6. Înlăturarea formelor nedeterminate (Regula lui L'Hospital) 295

Scanned with OKEN Scanner

Cap. 7. **Aplicații ale calculului diferențial**

7.1. Funcții convexe . . . 307
7.2. Funcții polinomiale (continuare) . . . 315
7.3. Reprezentarea grafică a funcțiilor . . . 326
7.4. Exerciții de maxim și minim . . . 371
7.5. Curbură și rază de curbură . . . 380
7.6. Aplicații diverse în algebră, trigonometrie și geometrie . . . 383

Cap. 8. **Primitive**

8.1. Primitive. Proprietăți generale . . . 391
8.2. Calculul cu primitive . . . 395

Cap. 9. **Integrabilitate**

9.1. Calculul cu funcții integrabile . . . 412
9.2. Funcții integrabile. Proprietăți generale . . . 432

Cap. 10. **Aplicații ale calculului integral**

10.1. Calculul ariilor . . . 473
10.2. Calculul lungimilor . . . 476
10.3. Calculul volumelor corpurilor de rotație . . . 478
10.4. Calculul ariilor suprafețelor de rotație . . . 482

Cap. 11. **Integrale improprii**

11.1. Integrale improprii pe un interval mărginit . . . 485
11.2. Integrale improprii pe un interval nemărginit . . . 491

Cap. 12. **Șiruri și serii de funcții**

12.1. Șiruri de funcții . . . 499
12.2. Serii de funcții . . . 514
12.3. Serii de puteri . . . 526
12.4. Dezvoltarea unei funcții în serie Taylor . . . 536

Cap. 13. **Metode numerice în analiza matematică**

13.1. Separarea rădăcinilor și rezolvarea numerică a ecuațiilor . . . 543
13.2. Aproximarea funcțiilor (polinoame de interpolare) . . . 547
13.3. Formula lui Taylor și calculul funcțiilor elementare . . . 552
13.4. Integrarea numerică a funcțiilor . . . 554
13.5. Diverse . . . 559

Apendice 1 . . . 563

Ap. 1. Cîteva funcții elementare . . . 563
Ap. 2. Relații între funcțiile trigonometrice . . . 570
Ap. 3. Relații între funcțiile hiperbolice . . . 572
Ap. 4. Identități trigonometrice . . . 573
Ap. 5. Cîteva formule din algebră . . . 574
Ap. 6. Cîteva inegalități remarcabile . . . 577
Ap. 7. Cîteva curbe remarcabile din geometrie . . . 579

Apendice 2 . . . 584

Indice de autori . . . 587

Bibliografie . . . 589

Scanned with OKEN Scanner

Notaţii utilizate

$\vee$, $\wedge$,, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$; operatori logici (conective); $\wedge$ (conjuncţia), $\vee$ (disjuncţia), $\rightarrow$ (implicaţia), $\leftrightarrow$ echivalenţa).

$p \wedge q$, $p \wedge q, p \rightarrow q, p \leftrightarrow q$: $p \vee q$(p sau q), $p \wedge q$ (p şi q), $p \rightarrow q$ (dacă p atunci q), $p \leftrightarrow q$ (p dacă şi numai dacă q).

$p \Rightarrow q$: propoziţia $p \rightarrow q$ este adevărată.

$p \Leftrightarrow q$: propoziţia $p \leftrightarrow q$ este adevărată.

$(\forall)$: cuantificatorul universal (oricare ar fi).

$(\exists)$: cuantificatorul existenţial (există).

$\neg(\exists)\ x \in A$: nu există nici un element x în mulţimea A.

$x \in A, A \ni x$: elementul x aparţine mulţimii A.

$x \notin A$, $A \not\ni x$: elementul x nu aparţine mulţimii A.

$\mathfrak{P}(X)$, 2^X; mulţimea tuturor părţilor mulţimii X.

$\cup$, $\cap$: semnul pentru reuniune resp. intersecţie de mulţimi.

$A \subseteq B, B \supseteq A$: mulţimea A este inclusă în mulţimea B.

$A \setminus B$: diferenţa dintre mulţimea A şi mulţimea B.

$A \times B$: produsul cartezian al mulţimii A cu mulţimea B, adică mulţimea perechilor ordonate (a, b) cu $a \in A$ şi $b \in B$.

$A \sim B$: A şi B sînt echipotente, adică există $f : A \rightarrow B$ bijectivă.

$\{x \in A\ ;\ P\}$: mulţimea elementelor din A care au proprietatea P.

$\emptyset$: mulţimea vidă.

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots\}$: mulţimea formată din elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$: mulţimea numerelor naturale resp. întregi, raţionale, reale, complexe, unde $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbf{N})$ etc.

$\mathbf{K}$: mulţimea $\mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$

$\overline{\mathbf{R}}$: dreapta completată, adică mulţimea $\mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

A_-, A_+: mulţimea $\{x \in A\ ;\ x \leqslant 0\}$, resp. $\{x \in A\ ;\ x \geqslant 0\}$.

A' sau A' $[\mathbf{R}]$; A' $[\overline{\mathbf{R}}]$: derivata mulţimii A în $\mathbf{R}$, resp. în $\overline{\mathbf{R}}$.

A'^s, A'^d, A'^b; derivata la stînga, la dreapta, resp. bilaterală a mulţimii A.

$\mathbf{N}_0$: mulţimea $\mathbf{N} \cup \{0\}$, adică $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbf{R}_+^*$: mulţimea $\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$ a numerelor reale strict pozitive.

$\mathbf{Q}_+^*$: mulţimea $\mathbf{Q}_+ \setminus \{0\}$ a numerelor raţionale strict pozitive.

$i = \overline{1, n}$: i parcurge toate numerele naturale de la 1 la n.

$\inf A$, $\sup A$: marginea inferioară resp. superioară a mulţimii A.

$\min A$, $\max A$: maximul, resp. minimul mulţimii A.

I : interval în $\mathbf{R}$.

n : un număr întreg (element din $\mathbf{Z}$).

$n \geqslant 1$: un număr întreg mai mare ca 1, adică un număr natural.

Scanned with OKEN Scanner

$[x]$, $[x]_*$ sau $E(x)$: partea întreagă a numărului real x.
$[x]$: mulțimea redusă la elementul x sau distanța de la x la cel mai apropiat întreg ($x \in \mathbf{R}$).

$(p, q) = 1$: fracția $\frac{p}{q}$, cu $pq \neq 0$, este ireductibilă.

$\sum_{i=1}^{n} a_i$: suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, unde $a_i \in \mathbf{C}$.

$\prod_{i=1}^{n} a_i$: produsul $a_1, a_2 \ldots a_n$, unde $a \in \mathbf{C}$.

$\sum_{n} a_n, \sum_{n\geqslant 1} a_n$ seria de termen general a_n sau suma seriei.

$\prod_{n} a_n, \prod_{n\geqslant 1} a_n$: produsul infinit de termen general a_n sau valoarea produsului infinit.

$\sum_{n\geqslant 1} a_n \ll \sum_{n\geqslant 1} b_n$: seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este majorată de seria $\sum_{n\geqslant 1} b_n$.

$\sum_{n\geqslant 1} a_n \sim \sum_{n\geqslant 1} b_n$: seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este echivalentă cu seria $\sum_{n\geqslant 1} b_n$.

sign : funcția signum, $f(x) = 1$, dacă $x > 0$, $f(0) = 0$ și $f(x) = -1$, dacă $x < 0$.

$f : X \to Y : x \mapsto f(x), x \in X$; $x \overset{f}{\mapsto} y, x \in X$: funcția f este definită pe X și cu valori în Y.

G_f, Γ_f : graficul funcției $f : X \to Y$, adică mulțimea $\{(x, f(x)) ; x \in X\}$.

$A \subset_{\rightarrow} X$: injecția canonică a lui A în X, cînd $A \subseteq X$.

$f|_A$: restricția funcției $f : X \to Y$ la mulțimea $A \subseteq X$.

$\mathbf{1}_X, \mathbf{1}$: aplicația identică pe X, adică $\mathbf{1}_X(x) = x$, $(\forall)\ x \in X$.

$f = c, f = 0$: funcția f este constantă, respectiv identic nulă.

f^{-1} : funcția inversă a funcției bijective f.

$g \circ f$: compunerea funcțiilor $f : X \to Y$ cu $g : Y \to Z$, adică funcția $(g \circ f)\ x) := g(f(x)), (\forall)\ x \in X$.

$f \leqslant g, f < g$: Dacă $f, g : X \to \mathbf{R}$ și $f(x) \leqslant g(x), (\forall)\ x \in X$, resp. $f(x) < g(x), (\forall)\ x \in X$.

$\varphi = \min\{f, g\}, \psi = \max\{f, g\}$: Dacă $f, g : X \to \mathbf{R}$, atunci $\varphi(x) := \min\{f(x), g(x)\}\ (\forall)\ x \in X$ și $\psi(x) = \max\{f(x), g(x)\}, (\forall)\ x \in X$.

$f^+, f^-, |f|$: dacă $f : X \to \mathbf{R}$, atunci $f^+ := \max\{f, 0\}, f^- := \max\{-f, 0\}, |f|(x) := |f(x)|\ (\forall)\ x \in X$.

$\|f\|_\infty$: dacă $f : X \to \mathbf{R}$, atunci $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$.

$f(x) = o(g(x)), x \to a$; $f(x) = O(g(x)), x \to a$: simbolurile lui Landau

D_f : domeniul maxim de definiție al funcției elementare f.

Z_f : zerourile funcției f, adică mulțimea $\{f \in D_f ; f(x) = 0\}$.

$f(A)$: mulțimea valorilor funcției $f : X \to Y$ pe mulțimea $A \subseteq X$, adică mulțimea $\{y \in Y ; (\exists)\ x \in A$ a.î. $f(x) = y\}$.

$f^{-1}(B)$: imaginea reciprocă a mulțimii $B \subseteq Y$ prin aplicația $f : X \to Y$, adică mulțimea $\{x \in X ; f(x) \in B\}$, în particular $f^{-1}(\{y\})$ cu $y \in Y$.

$\inf f(A), \inf_{x \in A} f(x)$: marginea inferioară a funcției f pe mulțimea A.

$\sup f(A), \sup_{x \in A} f(x)$: marginea superioară a funcției f pe mulțimea A.

$\min f(A), \min_{x \in A} f(x)$: minimul funcției f pe mulțimea A.

$\max f(A), \max_{x \in A} f(x)$: maximul funcției f pe mulțimea A.

$(x_n)_{n\geqslant 1}, (x_n)_{n \in N}$: șirul de termen general x_n.

Scanned with OKEN Scanner

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$; $x_n \to x$; $x_n \to x (n \to \infty)$: şirul numeric $(x_n)_{n\geq 1}$ are limita x.

$x_n \nearrow x$, $x_n \searrow x$: şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale este monoton crescător (resp. descrescător) şi are limita x.

$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, $\overline{\lim}_{x\to\infty} x_n$: limita inferioară resp. superioară a şirului numeric $(x_n)_{x\geq 1}$.

$L(x_n)_{n\geq 1}$: mulţimea tuturor punctelor limită ale şiruliu $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale,

$\lim f(x)$: limita funcţiei f în punctul x_0; $\lim_{A\ni x\to x_0} f(x) := \lim_{x\to x_0} (f|_A)(x)$.

$\lim_{x\to x_0} f(x)$; $f(x_0 -)$: limita la stînga a funcţiei f în punctul x_0.

$\lim_{x\nearrow x_0} f(x)$; $f(x_0 +)$; limita la dreapta a funcţiei f în punctul x_0.

$f'(x_0)$: derivata funcţiei f în punctul x_0.

$f^{(n)}$: derivata de ordinul n a funcţiei f.

$f'_d(x_0)$, $f'_s(x_0)$: derivata la dreapta resp. la stînga a funcţiei f în punctul x_0.

$D_s f(x_0)$: derivata simetrică a funcţiei f în puctul x_0

$\mathbf{R}[X]$: $\mathbf{Q}[X]$, $\mathbf{Z}[X]$: mulţimea polinoamelor cu coeficienţi în $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$ respectiv.

$\mathbf{R}_n[X]$: mulţimea polinoamelor cu coeficienţi în $\mathbf{R}$ şi de grad $\leqslant n$.

trig : una din funcţiile trigonometrice sin, cos, tg, cotg.

sh, ch, th : funcţiile trigonometrice hiperbolice sinus, cosinus, resp. tangenta hiperbolică

ln, log, lb, $\log_a$: logaritm în baza e (neperian), în baza 10 (zecimal), în baza 2 (binar), resp. în baza a cu $a \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$.

$\exp_a$, exp : funcţia exponenţială de bază a, resp. de bază e.

$[I]$: lungimea intervalului I.

$\mathring{A}$, int A : interiorul mulţimii A.

$\bar{A}$, $\bar{A}$ $[\mathbf{R}]$, ad A : aderenţa mulţimii A (în $\mathbf{R}$).

$\bar{A}[\bar{\mathbf{R}}]$, $\mathrm{ad}_{\bar{\mathbf{R}}}(A)$: aderenţa mulţimii A în $\bar{\mathbf{R}}$.

$0!, n!, n!!$: $0! = 1$, $n! = 1.2 \ldots, n$, $n!! = \begin{cases} 2.4 \ldots n, (n - \text{par}) \\ 1.3.5 \ldots n, (n - \text{impar}) \end{cases}$

Δx_n : $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, unde x_n este termenul general al unui şir.

$\mathcal{C}^n(A)$: mulţimea funcţiilor f: $A \to \mathbf{R}$, derivabile pînă la ordinul n şi cu $f^{(n)}$ continuă.

$\mathcal{C}(X)$: mulţimea tuturor funcţiilor continue $f : X \to \mathbf{R}$, unde $X \subseteq \mathbf{R}$.

$\sim$, $\equiv$: reaţie de echivalenţă.

$\preccurlyeq$, $\prec$, $\leqslant$, $<$: relaţie de ordine.

$\mathcal{F}(X, Y)$ sau Y^X : mulţimea tuturor funcţiilor $f : X \to Y$.

$\mathcal{F}(X)$: mulţimea $\mathcal{F}(X, \mathbf{K})$.

$\mathcal{M}(X)$: mulţimea tuturor funcţiilor mărginite $f : X \to \mathbf{K}$.

$\mathcal{D}_\alpha(I)$: mulţimea funcţiilor $f : I \to \mathbf{R}$ cu proprietatea Darboux

$\mathcal{B}(X)$: mulţimea tuturor funcţiilor continue şi mărginite $f : X \to \mathbf{R}$, unde $X \subseteq \mathbf{R}$

$f_n \xrightarrow[B]{s} f$: şirul $f_n \in \mathcal{F}(A)$, $(n \geqslant 1)$ converge simplu pe mulţimea $B \subseteq A$, la funcţia $f \in \mathcal{F}(A)$;

$f_n \xrightarrow[B]{u}$: şirul $f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$ converge uniform pe mulţimea $B \subseteq A$, la funcţia $f \in \mathcal{F}(A)$.

$f_n \xrightarrow{s} f$: şirul $f \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$ converge simplu pe A, la funcţia $f \in \mathcal{F}(A)$.

$f_n \xrightarrow{u} f$: şirul $f \in \mathcal{F}(A)$, $(n \geqslant 1)$ converge uniform pe A, la funcţia $f \in \mathcal{F}(A)$.

$\nearrow\!\!\!\smile$ $\smile\!\!\!\nearrow$: funcţia este crescătoare şi concavă resp. convexă.

$\smile\!\!\!\searrow$ $\searrow\!\!\!\smile$: funcţia este descrescătoare şi convexă resp. concavă.

Scanned with OKEN Scanner

$\left(\int f\right)(x)$, $x \in I$; $\int f(x)\,dx$, $x \in I$; primitiva funcției f pe intervalul I, $I \subset \mathbf{R}$.

$\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta)$: suma Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ și mulțimii ξ_Δ de puncte intermediare asociată lui Δ.

$\mathfrak{T}_{[a,\,b]}$: mulțimea tuturor diviziunilor intervalului $[a, b]$.

$\int_a^b f$, $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b f\,dx$: Integrala Riemann a funcției f pe intervalul $[a, b]$.

$s_f(\Delta)$, $S_f(\Delta)$: suma Darboux, inferioară, respectiv suma Darboux superioară, asociată funcției f și diviziunii Δ.

$\underline{\int}_a^b f$, $\overline{\int}_a^b f$: integrala Darboux inferioară, respectiv superioară.

ξ_Δ: mulțime de puncte intermediare asociată diviziunii Δ.

Ξ_Δ: familia tuturor mulțimilor de puncte intermediare asociată lui Δ.

Abreviațiuni: Ex. (exercițiu); cf. (conform); T., th. teoremă); Cor. (corolar); D., Def. (definiție); Cap. (capitol); v. (vezi): a.î. (astfel încît); Ind. (indicație); i.e. (id est) = adică; a.p.t. (proape peste tot).

Alfabetul grec: α, A (alfa); β, B (beta); γ, Γ (gamma); δ, Δ (delta); ε, E (epsilon); ζ, Z (zeta); η, H (eta); θ, Θ (theta); ι, I (iota); k, K (kappa); λ, Λ (lambda); μ, M (miu); ν, N (niu); ξ, Ξ (csi); o, O (omicron); π, Π(pi): ρ, P (rho); σ, Σ sigma); τ, T (tau); υ, Υ (ipsilon); φ, Φ(phi); ψ, Ψ (psi); χ, X (chi); ω, Ω(omega).

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 1

NOȚIUNI DE TEORIA MULȚIMILOR

1.1. Operații cu mulțimi. Relații. Funcții

1.1.1. Exercițiu. *Fie A, B, două mulțimi. Atunci avem :*

1° $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = A$;

2° $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$;

3° $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$;

4° $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

Soluție. 1° Evident.

2° ($\Rightarrow$) ($\forall$) $x \in A$ avem $x \in A \cup B = A \cap B$, deci $x \in B$ și deci $A \subseteq B$. Analog se arată că $B \subseteq A$, deci $A = B$.

3° Incluziunea „$\supseteq$" este evidentă. Reciproc, fie $x \in A$ fixat ; dacă $x \notin A \setminus B$, reuzltă $x \in B$, deci $x \in A \cap B$ și deci $A \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

4° $A \cup B \overset{3^\circ}{=} ((A \setminus B) \cup (A \cap B)) \cup ((B \setminus A) \cup (A \cap B)) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

1.1.2. Exercițiu. *Fie A, B, C, trei mulțimi. Atunci avem :*

1° $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cup C \subseteq B \cup C) \wedge (A \cap C \subseteq B \cap C)$;

2° $A = B \Leftrightarrow (A \cup C = B \cup C) \wedge (A \cap C = B \cap C)$;

3° $(A \cap B) \cup (C \setminus A) = C \Leftrightarrow A \cap (B \triangle C) = \emptyset$;

4° $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C) \Leftrightarrow A = \emptyset$.

Soluție. 1° ($\Leftarrow$) Fie $x \in A$ fixat. Atunci $x \in A \cup C \subseteq B \cup C$, deci dacă $x \notin B$, avem $x \in C$ și deci $x \in A \cap C \subseteq B \cap C$, absurd etc.

2° rezultă din 1°

3° $A \cap (B \triangle C) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap ((B \setminus C) \cup (C \setminus B) = \emptyset \Leftrightarrow (A \cap (B \setminus C)) \cup (A \cap (C \setminus B)) = \emptyset \Leftrightarrow (A \cap (B \setminus C) = \emptyset) \wedge (A \cap (C \setminus B) = \emptyset) \Leftrightarrow ((A \cap B) \setminus C = \emptyset) \wedge ((A \cap C) \setminus B = \emptyset) \overset{\text{Ex.1.1.1.}}{\Leftrightarrow} A \cap B = A \cap B \cap C = A \cap C \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (C \setminus A) = (A \cap C) \cup (C \setminus A) = C$ (Ex. 1.1.1.).

4° ($\Rightarrow$) Presupunem $A \neq \emptyset$ și fie $x \in A$ fixat. Atunci $x \in A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$, deci $(x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cup C)$, absurd.

1.1.3. Exercițiu. *Fie A, B, T trei mulțimi cu A, $B \subseteq T$. Să se determine $X \subseteq T$ a.î. $(A \cup \complement X) \cap (X \cup \complement A) = B$.*

Soluție. Evident avem : $(A \cup \complement X) \cap (X \cup \complement A) = B \Leftrightarrow ((\complement A) \cap X) \cup ((\complement X) \cap A) = \complement B \Leftrightarrow A \triangle X = \complement B$, deci $A \triangle (A \triangle X) = A \triangle (\complement B) \Leftrightarrow (A \triangle A) \triangle X = A \triangle (\complement B) \Leftrightarrow X = A \triangle (\complement B)$.

1.1.4. Exercițiu. *Fie A, B, C, D patru mulțimi. Atunci avem :*

1° $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$;

Scanned with OKEN Scanner

2° $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \cap C)$;

3° $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$; $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

4° $A - (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$; $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

5° $A \times B = C \times D \Leftrightarrow (A = C) \wedge (B = D)$ (A, B, C, D *nevide*);

6° $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$;

7° $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \times (B \setminus D)) \cup (A \setminus C) \times B)$.

Soluție. Să arătăm spre exemplu 2°, 4° și 5°.

2° $(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee \vee (x \in A \wedge y \in C) \Leftrightarrow ((x, y) \in A \times B) \vee ((x, y) \in A \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup \cup (A \times C)$ etc.

4° $(x, y) \in A \boxtimes (B \setminus C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B \setminus C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \notin C) \Leftrightarrow \Leftrightarrow ((x, y) \in A \times B) \wedge ((x, y) \in A \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$ etc.

5° ($\Rightarrow$) Presupunem că $A \times B = C \times D$. Atunci $(x \in A) \wedge (y \in B) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \Leftrightarrow (x, y) \in C \times D \Leftrightarrow (x \in C) \wedge (y \in D)$ etc.

Corolar 1. *Fie A, B două mulțimi nevide. Atunci $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$.*

1.1.5. Exercițiu *Fie A, B, C trei mulțimi disjuncte două cîte două. Atunci avem:*

1° $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A$; 2° $(A \cup B) \setminus (A \cup C) = B$.

Ind. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \Leftrightarrow x \in A$ etc.

1.1.6. Exercițiu. *Fie A_1, A_2, A_3 trei mulțimi. Atunci avem:*

$$(A_1 \cup A_2 \setminus A_3) \cup (A_2 \cup A_3 \setminus A_1) \cup (A_3 \cup A_1 \setminus A_2) =$$

$$= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \setminus A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$ *Generalizare.*

Ind. $x \in (A_1 \cup A_2 \setminus A_3) \cup (A_2 \cup A_3 \setminus A_1) \cup (A_3 \cup A_1 \setminus A_2)$, $(\exists)\ i \in \{1, 2, 3\}$, spre exemplu $i = 2$, a.î. $x \in A_2 \cup A_3 \setminus A_1 \Leftrightarrow x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \setminus A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

1.1.7. Exercițiu. *Fie A, B două mulțimi. Atunci avem afirmațiile:*

1° $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$; 2° $A = B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$; 3° $\mathcal{P}(A) \cup \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$; 4° $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$;

5° $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$; 6° $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

Ind. 6° $C \in \mathcal{P}(A \setminus B) \Leftrightarrow C \subseteq A \setminus B \Leftrightarrow (C \subseteq A) \wedge (C \cap B = \emptyset) \Rightarrow C \in \mathcal{P}(A) \wedge \wedge (C \notin \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow C \in \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

4° ($\Rightarrow$) $A \cup B \in \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, deci $(A \cup B) \in \mathcal{P}(A)) \vee \vee (A \cup B) \in \mathcal{P}(B))$ și deci $(A \cup B \subseteq A) \vee (A \cup B \subseteq B)$, prin urmare $(B \subseteq A) \vee (A \subseteq B)$

($\Leftarrow$) Fie A, B arbitrare. Atunci $(A \subseteq A \cup B) \wedge (B \subseteq A \cup B)$, deci $(\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)) \wedge (\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B))$ și deci $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Dacă $(A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$, atunci $(A \cup B \subseteq B) \vee (B \cup A \subseteq A)$, deci $(\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(B)) \vee (\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A))$ și deci $\mathcal{P}(A \cup B \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Prin urmare $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

1.1.8. Exercițiu. *Fie A, A_1, B, B_1 patru mulțimi. Dacă A este echipotentă cu B și A_1 este echipotentă cu B_1, nu rezultă numaidecît că $A \setminus A_1$ este echipotentă cu $B \setminus B_1$ sau că $A \cup A_1$ este echipotentă cu $B \cup B_1$.*

Ind. Contraexemplu: $A = \mathbf{N}$, $A_1 = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \mathbf{N}$, $B_1 = \{1, 3, 5, \ldots\}$ etc.

Scanned with OKEN Scanner

1.1.9. Exerciţiu. *Pentru orice număr natural n, există o mulţime plană A formată cu n puncte necoliniare, a.î. distanţa dintre două puncte distincte arbitrare din A este un număr natural.*

Ind. Fie Δ şi Δ' două drepte perpendiculare din plan. Alegem punctele distincte $P_1 \in \Delta \cap \Delta'$, $P_2, P_3 \ldots P_{n-1} \in \Delta'$ şi $P_n \in \Delta' \setminus \Delta$ a.î. $\|P_1P_i\| \in \mathbf{N}$, $(\forall)$ $i = \overline{2, n}$ şi $\|P_1P_n\|^2 + \|P_1P_i\|^2$ este pătrat perfect $(\forall)$ $i = \overline{2, n-1}$. Rămîne să determinăm $a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbf{N}$ a.î. numerele $a_2^2 + a_n^2, \ldots, a_{n-1}^2 + a_n^2$ sînt pătrate perfecte distincte.

1.1.10. Exerciţiu. *Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n mulţimi arbitrare. Atunci avem relaţia:*

$$(A_1 \triangle A_2) \cup (A_2 \triangle A_3) \cup \ldots \cup (A_{n-1} \triangle A_n) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \setminus \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Soluţie $x \in \bigcup_{i=2}^{n} (A_{i-1} \triangle A_i) \Leftrightarrow (\exists)\ k \in \overline{2, n}$ a.î. $x \in A_{k-1} \triangle A_k \Leftrightarrow (\exists)\ k \in \overline{2, n}$ a.î.

$$x \in A_{k-1} \cup A_k \wedge x \notin A_{k-1} \cap A_k \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \wedge x \notin \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

1.1.11. Exerciţiu. *Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n mulţimi arbitrare şi $A_{i_1 i_2 \ldots i_k} = A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \setminus (A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup \ldots \cup A_n)$. Atunci*

1° $A_{12 \ldots k} \cap A_{12 \ldots k'} = \emptyset$, dacă $k \neq k'$; 2° $\bigcup_{k=1}^{n} A_{12 \ldots k} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$;

3° orice mulţime A_k se poate scrie ca o reuniune de mulţimi de forma $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$.

Ind. 2° $x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_{12 \ldots k} \Leftrightarrow (\exists)\ k \in \overline{1, n}$ a.î. $x \in A_{12 \ldots k} \Leftrightarrow x \in A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \wedge x \notin A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup \ldots \cup A_n$.

1.1.12. Exerciţiu. *Fie X o mulţime. Atunci $(\mathfrak{P}(X), \subseteq)$, mulţimea tuturor părţilor lui X ordonată prin incluziune, este total ordonată $\Leftrightarrow$ X se reduce la un singur element.*

Soluţie. $(\Rightarrow)$ Să presupunem că există $a, b \in X$, $a \neq b$. Atunci $\{a\}$ şi $\{b\}$ aparţin lui $\mathfrak{P}(X)$ şi nu sînt comparabile între ele, absurd. Rămîne că X se reduce la un singur element.

1.1.13. Exerciţiu (Ordinea lexicografică). *Dacă $a = (a_i)_{i=\overline{1,n}}$ şi $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$ sînt din $\mathbf{R}^n$, $n > 1$, fixat, să punem:*

$$a \preccurlyeq b : \Leftrightarrow (a_1 < b_1) \vee (a_1 = b_1 \text{ şi } a_2 < b_2) \vee \ldots \vee (a_i = b_i (i = \overline{1, n-1}) \text{ şi } a_n \leqslant b_n).$$

Atunci $\preccurlyeq$ este o relaţie de ordine totală pe $\mathbf{R}^n$.

Ind. Ţinem seama că relaţia $\leqslant$ este o relaţie de ordine totală pe $\mathbf{R}$.

1.1.14. Exerciţiu. $(\forall)$ $a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $(a', b') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, *punem:* $(a, b) \preccurlyeq (a', b') : \Leftrightarrow (a \leqslant a') \wedge (b \leqslant b')$. *Atunci $\preccurlyeq$ este o relaţie de ordnine pe $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, care nu este totală.*

Ind. Elementele (2, 3) şi (3, 2) nu sînt comparabile.

1.1.15. Exerciţiu. *Fie A o mulţime care are cel puţin trei elemente şi $f, g : A \to \mathbf{R}_+$, două funcţii. Atunci avem*

$$f = g \Leftrightarrow f(x_1)\ f(x_2) = g(x_1)\ g(x_2)\ (\forall)\ x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2.$$

Ind. $(\Leftarrow)$ Fie $x, x_1, x_2 \in A$ diferite între ele. Atunci

$$f(x) \cdot f(x_1) = g(x) \cdot g(x_1),\ f(x) \cdot f(x_2) = g(x) \cdot g(x_2),\ f(x_1) f(x_2) = g(x_1)\ g(x_2),$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde prin înmulțire obținem că

$$(f(x)f(x_1)f(x_2))^2 = (g(x)g(x_1)g(x_2))^2 \Leftrightarrow f(x)f(x_1)f(x_2) = g(x)\cdot g(x_1)g(x_2),$$

deci $f(x) = g(x)$ și deci $f = g$.

Observație. Dacă A are cel mult două elemente sau f și g nu sînt strict pozitive, Ex. 1.1.15. nu este numaidecît adevărat.

1.1.16. Exercițiu. *Fie A o mulțime care conține cel puțin trei elemente și $f, g : A \to \mathbf{R}$ două funcții. Atunci avem :*

$$f = g \Leftrightarrow f(x_1) + f(x_2) = g(x_1) + g(x_2)\ (\forall)\ x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2.$$

Ind. ($\Leftarrow$) Fie $x, x_1, x_2 \in A$ diferite între ele. Atunci $f(x) + f(x_1) = g(x) + g(x_1)$, $f(x) + f(x_2) = g(x) + g(x_2)$, $f(x_1) + f(x_2) = g(x_1) + g(x_2)$. Adunăm primele două relații din care scădem a treia și obținem $f(x) = g(x)$, deci $f = g$.

Observație. Dacă A are cel mult două elemente, Ex. 1:1,16. nu este numaidecît adevărat.

1.1.17. Exercițiu. *Fie X, Y două mulțimi, $f : X \to Y$ o funcție și $A \subseteq X$ o mulțime cu proprietățile : 1° $f|_A$ injectivă ; 2° Dacă $A \subseteq B \subseteq X$ și $f|_B$ injectivă, rezultă $A = B$. Atunci $f(A) = f(X)$.*

Soluție. Evident $f(A) \subseteq f(X)$ și să presupunem că $f(A) \neq f(X)$. Atunci $(\exists)\ y_0 \in f(X)$ cu $y_0 \notin f(A)$. Fie $x_0 \in X$ a.î. $f(x_0) = y_0$. Evident $x_0 \notin A$, deoarece $y_0 \notin f(A)$. Dacă $B = A \cup \{a_0\}$, atunci $A \subseteq B \subseteq X$, $A \neq B$ și $f|_B$ este injectivă, absurd. Prin urmare $f(A) = f(X)$.

1.1.18. Exercițiu. *Fie $f : X \to Y$ o funcție. Atunci*

1° *f este injectivă* $\Leftrightarrow f^{-1}f(A) = A)$, $(\forall)\ A \subseteq X \Leftrightarrow f(\complement A) \subseteq \complement f(A)$, $(\forall)\ A \subseteq X$;

2° *f este surjectivă* $\Leftrightarrow f^{-1}(B) \neq \emptyset$, $(\forall)\ B \subseteq Y \Leftrightarrow f(\complement A) \supseteq \complement f(A)$, $(\forall)\ A \subseteq X$;

3° *f bijectivă* $\Leftrightarrow f(\complement A) = \complement f(A)$, $(\forall)\ A \subseteq X$.

Ind. 1° ($\Rightarrow$) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A)$, $(\forall)\ A \subseteq X$. Dacă $x \in f^{-1}(f(A))$, atunci $f(x) \in f(A)$, deci f fiind injectivă, $x \in A$.

($\Leftarrow$) Fie $x, y \in X$ cu $f(x) = f(y)$. Atunci $y \in f^{-1}(f(x)) = \{x\}$, deci $x = y$.

2° Se arată la fel iar 3° rezultă din 1° și 2°.

1.1.19. Exercițiu. *Fie $f : X \to Y$ o aplicație. Atunci avem :*

1° *injectivă* $\Rightarrow (\forall)\ A_1, A_2 \subseteq X$ *cu* $f(A_1) \subseteq f(A_2)$, *rezultă* $A_1 \subseteq A_2$;

2° *f surjectivă* $\Leftrightarrow (\forall)\ B_1, B_2 \subseteq Y$ *cu* $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$, *rezultă* $B_1 \subseteq B_2$.

Soluție. 1° ($\Rightarrow$) Fie $A_1, A_2 \subseteq X$ fixate și $f(A_1) \subseteq f(A_2)$. Atunci $(\forall)\ x_1 \in A_1$ avem $f(x_1) \in f(A_1) \subseteq f(A_2)$, deci $(\exists)\ x_2 \in A_2$ cu $f(x_1) = f(x_2)$ și deci f fiind injectivă, rezultă $x_1 = x_2$, prin urmare $A_1 \subseteq A_2$.

($\Leftarrow$) Fie $x_1, x_2 \in X$ cu $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci $f(\{x_1\}) \subseteq f(\{x_2\})$, deci $\{x_1\} \subseteq \{x_2\}$ și deci $x_1 = x_2$, ceea ce înseamnă că f este injectivă.

2° ($\Rightarrow$) Fie $B_1, B_2 \subseteq Y$ fixate cu $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$. Atunci $(\forall)\ y_1 \in B_1$, $(\exists)\ x_1 \in X$ cu $f(x_1) = y_1$, deci $x_1 \in f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ și deci $y_1 = f(x_1) \in B_2$, prin urmare $B_1 \subseteq B_2$.

($\Leftarrow$) Fie $y \in Y$ fixat. Presupunem că $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$. Atunci $(\forall)\ y_1 \in f(X)$, avem $f^{-1}(\{y\}) \subseteq f^{-1}(\{y_1\})$, deci $\{y\} \subseteq \{y_1\}$ și deci $y = y_1$, încît $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, absurd etc.

Scanned with OKEN Scanner

1.1.20. Exerciţiu. *Fie $f : X \to Y$ o funcţie şi $(A_i)_{i \in I}$ o partiţie a lui X. Atunci f este injectivă $\Leftrightarrow$ 1° $f_{|A_i}$ este injectivă $(\forall)\ i \in I$; 2° $f(A_i) \cap f(A_j) = \emptyset$ $(\forall)\ i, j \in I,\ i \neq j$.*

Soluţie. Implicaţia ($\Rightarrow$) este evidentă.

($\Leftarrow$) Fie $x, y \in X$, $x \neq y$, fixaţi. Dacă $(\exists)\ i \in I$ cu $x, y \in A_i$, atunci $f(x) = (f|_{A_i})(x) \neq (f|_{A_i})(y) = f(y)$. Dacă $x \in A_i$ şi $y \in A_j$ cu $i \neq j$, atunci $\{f(x)\} \cap f(y)\} \subseteq f(A_i) \cap f(A_j) = \emptyset$, deci $f(x) \neq f(y)$. Prin urmare f este injectivă.

1.1.21. Exerciţiu. *Fie $f : A \to B$ o funcţie. Atunci 1° f este injectivă $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\forall)$ C o mulţime şi $(\forall)$ $g, h : C \to A$ două funcţii a.î. $f \circ g = f \circ h$, rezultă că $g = h$; 2° f este surjectivă $\Leftrightarrow (\forall)$ C o mulţime şi $(\forall)$ g, h; $B \to C$ două funcţii a.î. $g \circ f = h \circ f$, rezultă că $g = h$.*

Soluţie. 1° ($\Rightarrow$) Fie $x \in C$ cu $g(x) = h(x)$. Atunci $f(g(x)) = f(h(x))$, deci f fiind injectivă avem $g(x) = h(x)$ şi deci $g = h$.

($\Leftarrow$) Presupunem că $(\exists)\ x, y \in A$, $x \neq y$ cu $f(x) = f(y)$. Atunci considerăm mulţimea $C = \{1, 2\}$ şi $g, h : C \to A$ două funcţii definite astfel :

$$g(1) = x,\ g(2) = y;\quad h(1) = h(2) = x.$$

Evident

$$f(g(1)) = f(x) = f(h(1)),\ f(g(2)) = f(y) = f(x) = f(h(2)),$$

deci $f \circ g = f \circ h$ şi deci cf. ipotezei $g = h$, absurd.

Aşadar $(\forall)\ x, y \in A$, $x \neq y$, avem $f(x) \neq f(y)$, deci f injectivă.

1.1.22. Exerciţiu. *Fie $f, g : A \to A$ două funcţii. Atunci f şi g sînt inversabile $\Leftrightarrow$ $f \circ g$ şi $g \circ f$ sînt inversabile.*

Soluţie. ($\Rightarrow$) f şi g inversabile $\Leftrightarrow$ f şi g bijective, deci $f \circ g$ şi $g \circ f$ sînt bijective şi deci inversabile.

($\Leftarrow$) Presupunem că $f \circ g$ şi $g \circ f$ sînt inversabile. Atunci există $h_1, h_2 : A \to A$ două funcţii cu proprietăţile :

$$(f \circ g) \circ h_1 = h_1 \circ (f \circ g) = 1_A;\quad (g \circ f) \circ h_2 = h_2 \circ (g \circ f) = 1_A,$$

deci

$$f \circ (g \circ h_1) = (h_1 \circ f) \circ g = 1_A;\ g \circ (f \circ h_2) = (h_2 \circ g) \circ f = 1_A$$

şi deci

$$f \circ (g \circ h_1) = (h_2 \circ g) \circ f = 1_A;\quad g \circ (f \circ h_2) = (h_1 \circ f) \circ g = 1_A,$$

de unde rezultă evident că f şi g sînt inversabile.

Corolar 1. *O funcţie $f : A \to A$ este inversabilă $\Leftrightarrow$ $f \circ f$ este inversabilă.*

1.1.23. Exerciţiu. *Să se construiască două funcţii $f : X \to Y$ şi $g : Y \to Z$ avînd una din proprietăţile următoare : f nesurjectivă, g surjectivă şi $g \circ f$ surjectivă; f şi g nebijective şi $g \circ f$ bijectivă; f sau g neinjectivă (resp. nesurjectivă, nebijectivă) şi $g \circ f$ neinjectivă (resp. nesurjectivă nebijectivă).*

Ind. Fie spre exemplu : $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ şi $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ definite astfel $f(x) = x$ şi $g(y) = y^2$. Atunci f şi g sînt nebijective şi $g \circ f$ este bijectivă.

1.1.24. Exerciţiu. *Fie X, Y două mulţimi şi $f : X \to Y$ o funcţie. Atunci f este injectivă (resp. surjectivă, resp. bijectivă) $\Leftrightarrow$ extensia lui f la mulţimea părţilor este injectivă (resp. surjectivă, resp. bijectivă) $\Leftrightarrow$ extensia reciprocă a lui f la mulţimea părţilor este injectivă (resp. surjectivă, resp. bijectivă).*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $\tilde{f}: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ extensia lui f la mulțimea părților. Presupunem f injectivă și fie $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $A \neq B$, deci $A \setminus B \neq \emptyset$ sau $B \setminus A = \emptyset$; fie spre exemplu $A \setminus B \neq \emptyset$ și $x_0 \in A \setminus B$ fixat. Atunci $x_0 \neq x$, $(\forall)\ x \in B$, deci $f(x_0) \neq f(x)$, $(\forall)\ x \in B$ și deci $f(x_0) \notin f(B)$, încît $f(A) \neq f(B)$, prin urmare $\tilde{f}$ este injectivă. Reciproc presupunem $\tilde{f}$ injectivă și fie $x, y \in X$, $x \neq y$. Atunci $f(\{x\}) \neq f(\{y\})$, deci $f(x) \neq f(y)$ și deci f este injectivă etc.

1.1.25. Exercițiu. *Fie $f: X \to Y$ o aplicație și $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ două mulțimi. Atunci avem:*

$1^\circ\ f(f^{-1}(B)) = B \Leftrightarrow B \subseteq f(X)$; $2^\circ\ f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$

Soluție. 1° $(\Rightarrow)$ $f(f^{-1}(B)) = B \Rightarrow B \subseteq f(f^{-1}(Y)) = f(X)$

$(\Leftarrow)$ Fie $y \in B$ fixat. Cum $B \subseteq f(X)$, $(\exists)\ x \in X$ cu $f(x) = y$, deci $x \in f^{-1}(B)$ și deci $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Așadar $B \subseteq f(f^{-1}(B))$ și cum incluziunea reciprocă este întotdeauna adevărată, avem egalitate.

$2^\circ\ y \in f(A) \cap B \Leftrightarrow (y \in f(A)) \wedge (y \in B) \Leftrightarrow (y \in B) \wedge (\exists))\ x \in A$ cu $f(x) = y) \Leftrightarrow (\exists)\ x \in A \cap f^{-1}(B)$ cu $f(x) = y \Leftrightarrow y \in f(A \cap f^{-1}(B))$.

1.1.26. Exercițiu. *Fie $f: X \to Y$ o funcție și g (resp. h) extensia (resp. extensia reciprocă) a lui f la mulțimea părților. Atunci $h \circ g \circ h = h$ și $g \circ h \circ g = g$.*

Ind. Evident avem $h \circ g \circ h = h \Leftrightarrow f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$, $(\forall)\ B \subseteq Y$. Or cum $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, rezultă că $x \in f^{-1}(f(f^{-1}(B))) \Leftrightarrow f(x) \in f(f^{-1}(B)) \subseteq B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B)$.

1.1.27. Exercițiu. *Fie $f: X \to Y$ și $g: Y \to Z$ două funcții arbitrare. Atunci $(g \circ f)^{-1}(C) = (f^{-1} \circ g^{-1})(C)$ $(\forall)\ C \subseteq Z$.*

Ind. $x \in (g \circ f)^{-1}(C) \Leftrightarrow g(f(x)) \in C \Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(C) \Leftrightarrow x \in (f^{-1} \circ g^{-1})(C)$.

1.1.28. Exercițiu. *Fie X, Y două mulțimi, A o submulțime proprie a lui X și $f: A \to Y$ o funcție. Atunci f posedă o singură prelungire la $X \Leftrightarrow Y$ se reduce la un singur element.*

Soluție. $(\Rightarrow)$ Presupunem că există $c, d \in Y$, $c \neq d$ și fie $g, h: X \to Y$ două funcții definite astfel: $g(x) = h(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in A$, $g(x) = c$, $(\forall)\ x \in X \setminus A$ și $h(x) = d$, $(\forall)\ x \in X \setminus A$. Atunci g și h prelungesc pe f și sînt diferite între ele, absurd.

1.1.29. Exercițiu. *Fie $f: X \to Y$ o funcție. Atunci graficul lui f coincide cu $X \times Y \Leftrightarrow Y$ se reduce la un singur element.*

Soluție. $(\Rightarrow)$ Presupunem că există $c, d \in Y$, $c \neq d$ și $G_f = X \times Y$. Fie x_0 fixat. Atunci $(x_0, c) \in X \times Y = G_f$ și $(x_0, d) \in X \times Y = G_f$, deci $c = f(x_0) = d$, absurd. Rămîne că Y se reduce la un singur punct.

1.1.30. Exercițiu. *Fie A, X, Y trei mulțimi cu $A \subseteq X$ și $f: A \to Y$ o funcție. Atunci numărul tuturor prelungirilor lui f la mulțimea X este egal cu* $(\text{card } Y)^{\text{card}(X \setminus A)}$

Ind. O prelungire a lui f la mulțimea X este unic determinată de un element din mulțimea de funcții $Y^{X \setminus A}$.

1.2. Mulțimi finite, infinite, numerabile

1.2.1. Exercițiu. *O mulțime A este finită $\Leftrightarrow$ A nu este echipotentă cu nici o parte strictă a sa.*

Soluție. $(\Rightarrow)$ Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ și $B \subseteq A$ cu $B \sim A$. Dacă $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$, atunci $\{1, 2, \ldots, n\} \sim \{1, 2, \ldots, k\}$, deci $n \leqslant k$ și $k \leqslant n$ și deci $k = n$. Aceasta înseamnă că $B = A$.

$(\Rightarrow)$ Presupunem A infinită. Construim prin inducție o mulțime numerabilă $S \subseteq A$ astfel: $a_1 \in A$ fixat; $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$, $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$ etc. Punem $S := \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Atunci $A \setminus S \sim A \setminus S$ și $S \sim S \setminus \{a_1\}$. deci $A \sim A \setminus \{a_1\}$, absurd. Rămîne că A este finită.

Scanned with OKEN Scanner

1.2.2. Exerciţiu. *Fie A o mulţime finită. Atunci mulţimea $\mathfrak{P}(A)$ are 2^n elemente, unde $n = \text{card } A$.*

Soluţie. Numărul submulţimilor lui A formate cu k elemente ($0 \leqslant k \leqslant n$) este egal cu C_n^k. deci numărul tuturor submulţimilor lui A este egal cu $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$. Cum $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, rezultă că $\text{card } \mathfrak{P}(X) = 2^n$.

1.2.3. Exerciţiu. *Fie A o mulţime formată cu n elemente. Atunci ecuaţia $X \cup Y = A$ (1) posedă 3^n soluţii (X, Y).*

Soluţie. Pentru $0 \leqslant k \leqslant n$ există C_n^k submulţimi X ale lui A formate cu k elemente; fixăm X o astfel de submulţime. Atunci perechea (X, Y), cu $Y = (A \setminus X) \cup P$ şi $P \in \mathfrak{P}(X)$, constituie o soluţie a ecuaţiei (1); există 2^k asemenea soluţii deoarece $\text{card } \mathfrak{P}(X) = 2^k$.

Prin urmare ecuaţia (1) admite în total $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k$ soluţii, adică 3^n soluţii.

1.2.4. Exerciţiu. *Fie A şi B două mulţimi finite a.î.* $\text{card } (A \cup B) = m$, $\text{card } (A \setminus B) = n$ *şi* $\text{card } (A \cap B) = p$. *Să se determine* $\text{card } A$ *şi* $\text{card } B$.

Soluţie. Deoarece $A \cap B$ şi $A \setminus B$ sînt disjuncte şi au reuniunea A, rezultă

$$\text{card } A = \text{card } (A \cap B) + \text{card } (A \setminus B) = p + n$$

Analog avem :

$$\text{card } (A \cap B) = \text{card } B + \text{card } (A \setminus B) = \text{card } B + n,$$

deci

$$\text{card } B = \text{card } (A \cup B) - n = m - n$$

1.2.5. Exerciţiu. *Fie A şi B două mulţimi finite. Atunci avem :*

$$\text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card } (A \cap B)$$

Soluţie. Mulţimile A şi $B \setminus A$ fiind disjuncte şi avînd reuniunea egală cu $A \cup B$, avem :

$$\text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } (B \setminus A) \qquad (1)$$

De asemenea muţimile $A \cap B$ şi $B \setminus A$ sînt disjuncte şi au reuniunea egală cu B, deci

$$\text{card } B = \text{card } (A \cap B) + \text{card } (B \setminus A) \qquad (2)$$

Din (1) şi (2), prin scădere, obţinem relaţia căutată.

Corolar 1. *Fie A, B două mulţimi finite cu proprietatea* $\text{card } (A \cup B) = \text{card } (A \cap B)$. *Atunci* $\text{card } A = \text{card } B$.

Ind. Fie $m = \text{card } A$, $n = \text{card } B$ şi $p = \text{card } (A \cap B)$. Atunci cf. Ex. 1.2.5 avem $2p = m + n$ şi cum $0 \leqslant p \leqslant n$, $0 \leqslant p \leqslant m$, deducem că $m = n = p$.

Observaţie. Dacă mulţimea A sau mulţimea B este infinită, atunci Ex. 1.2.5. poate să nu aibă sens.

Scanned with OKEN Scanner

1.2.6. Exerciţiu. *Fie $A_1, A_2, \ldots A_n$ n mulţimi finite. Atunci avem relaţia :*

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}\,(A_i) - \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} \operatorname{card}\,(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{1\leqslant i\neq j\neq k\leqslant n} \operatorname{card}\,(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} \operatorname{card}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Soluţie. Notăm prin $|A|$ cardinalul unei mulţimi A.

Fie $P(n)$ proprietatea din enunţ ($n \geqslant 1$). Să aplicăm principiul inducţiei.

Din Ex. 1.2.5. rezultă că $P(2)$ este adevărată.

Fie $n \geqslant 2$ cu $P(n)$ adevătată şi $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ mulţimi finite fixate. Atunci

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = |A_1| + \left|\bigcup_{i=2}^{n+1} A_i\right| - \left|A_1 \cap \left(\bigcup_{i=2}^{n+1} A_i\right)\right| = |A_1| + \left|\bigcup_{i=2}^{n+1} A_i\right| - \left|\bigcup_{i=2}^{n+1} (A_1 \cap A_i)\right| =$$

$$= A_1 + \sum_{i=2}^{n+1} |A_i| - \sum_{2\leqslant i\neq j\leqslant n+1}^{i=2} |A_i \cap A_j| + \sum_{2\leqslant i\neq j\leqslant k\leqslant n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots -$$

$$- \left(\sum_{i=2}^{n+1} |A_1 \cap A_i| - \sum_{2\leqslant i\neq j\leqslant n+1} |A_i \cap A_i \cap A_j| + \right.$$

$$\left. + \sum_{2\leqslant i\neq j\neq k\leqslant n+1} |A_1 \cap A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots\right) = \bigcup_{i=1}^{n+1} |A_i| -$$

$$- \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leqslant i\neq j\neq k\leqslant n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

Aşadar $P(n+1)$ este adevărată, prin urmare $P(n)$ este adevărată, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Aplicaţie. Fie $a \in \mathbf{R}_+$ un număr. Să se afle cîte numere naturale $\leqslant a$, se divid la 2 sau 3 sau 5.

Fie A, B, C mulţimea numerelor naturale $\leqslant [a]$, care se divid la 2, 3, 5 respectiv. Evident avem $|A| = \left[\frac{a}{2}\right]$, $|B| = \left[\frac{a}{3}\right]$, $|C| = \left[\frac{a}{5}\right]$. Numărul căutat este egal cu $|A \cup B \cup C|$. Aplicăm mai departe Ex. 1.2.6.

Observaţie. Ex. 1.2.6. poate fi generalizat astfel: Fie $\mathcal{A}$ o familie de mulţimi cu proprietatea că $A \cup B \in \mathcal{A}$, $(\forall)\ A, B \in \mathcal{A}$ şi fie $f: \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ o funcţie aditivă i.e. $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$, $(\forall)\ A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$ Atunci $(\forall)$ $(A_i)_{i\in\overline{1,n}} \subseteq \mathcal{A}$, avem relaţia:

$$f(\bigcup_i A_i) = \sum_i f(A_i) - \sum_{i\neq j} f(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^n f(\bigcap_i A_i)$$

1.2.7. Exerciţiu. *Fie A, B două mulţimi finite şi B^A mulţimea tuturor funcţiilor definite pe A şi cu valori în B. Atunci* card $B^A = m^n$, *unde* $m =$ card B *şi* $n =$ card A.

Soluţie. Fie $s(n, m) =$ card B^A şi să arătăm că

$$s(k+1,\ m) = ms(k, m),\ (\forall)\ 0 < k < n \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, $(\forall)\ j \in \overline{1, m}$ fixat, există exact $s(k, m)$ funcții $f : \{1, 2, \ldots, k, k+1\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ a.î. $f(k+1) = j$. Și deoarece $\{f : \{1, 2, \ldots, k+1\} \to \{1, 2, \ldots, m\}\} = \bigcup_{j=1}^{m} \{f : \{1, 2, \ldots, k+1\} \to \{1, 2, \ldots, m\},\ f(k+1) = j\}$, deducem că $s(k+1, m) = ms(k, m)$. Atunci $s(2, m) = ms(1, m)$; $s(3, m) = m^2 s(1, m)$; ...; $s(n, m) = m^{n-1} s(1, m)$ și cum evident $s(1, m) = m$, rezultă că $s(n, m) = m^n$.

1.2.8. Exercițiu. *Fie A o mulțime finită și $f : A \to A$ o funcție. Atunci f este injectivă $\Leftrightarrow$ f este surjectivă $\Leftrightarrow$ f este bijectivă.*

Soluție Fie f injectivă, deci $f(A) \sim A$. Cum A este finită și $f(A) \subseteq A$, rezultă (Ex.1.2.1.) că $f(A) = A$, deci f este surjectivă.

Presupunem f surjectivă. Atunci (P.1.2.15.) există $g : A \to A$ injectivă a.î. $f \circ g = 1_A$. Cum A este finită și g injectivă, rezultă de mai sus că g este surjectivă, deci g este bijectivă și deci $g \circ f = g \circ (f \circ g) \circ g^{-1} = 1_A$. Din $f \circ g = g \circ f = 1_A$, deducem că f este bijectivă.

Observație. Dacă A nu este finită Ex. 1.2.8. nu este numaidecît adevărat.

Contraexemplu. Fie $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definită astfel $f(n) = n + 1$. Atunci f este injectivă și nu este surjectivă etc.

1.2.9. Exercițiu. *Fie A o mulțime finită și $f; g : A \to A$ două funcții cu proprietatea că funcția $f \circ g$ este bijectivă. Atunci f și g sînt bijective.*

Soluție. Fie $y \in A$ fixat. Funcția $f \circ g$ fiind bijectivă, există $x \in A$ cu $f(g(x)) = y$, deci $f(x') = y$, dacă $x' = g(x)$ și deci f este surjectivă Mulțimea A fiind finită și $f : A \to A$ surjectivă, rezultă (Ex. 1.2.8.) că f este bijectivă. Atunci din relația $h = f \circ g$, avem $f^{-1} \circ h = g$, deci f^{-1} și h fiind bijective, rezultă că g este bijectivă.

Observație. Dacă A nu este finită, Ex. 1.2.9. nu este numaidecît adevărat.

Contraexemplu. Fie $f,\ g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ două funcții definite astfel : $f(n) = n + 1$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$; $g(1) = 1$, $g(n) = n - 1$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$. Atunci f și g nu sînt bijective și $g \circ f = 1$, care este bijectivă.

1.2.10. Exercițiu. *Să se construiască o funcție surjectivă $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ a.î. mulțimea $f^{-1}(\{n\})$ este infinită $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.*

Soluție. Fie $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ mulțimea tuturor numerelor prime ordonată crescător. Să punem :

$A_n = \{p_n^1, p_n^2, p_n^3 \ldots\}$, $(\forall)\ n \geqslant 2$, și $A_1 = \{m \in \mathbf{N};\ m \notin A_n\ (\forall),\ n \geqslant 2\}$ Orice funcție $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ cu proprietatea că $f(A_n) = n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, satisface, evident, condiția din enunț.

Generalizare. Fie X o mulțime infinită. Atunci există o funcție surjectivă $f : X \to X$ a.î. $f^{-1}(\{x\})$ este numerabilă $(\forall)\ x \in X$

1.2.11. Exercițiu. *Fie A și B două mulțimi numerabile. Atunci $A \cup B$ este numerabilă.*

Soluție. Presupunem $A \cap B = \emptyset$ și fie $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ o enumerare a lui A și $\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ o enumerare a lui B. Atunci $\{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \ldots\}$ este o enumerare a lui $A \cup B$, deci $A \cup B$ este numerabilă.

Dacă $A \cap B \neq \emptyset$, scriem $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ și continuăm ca mai sus.

Corolar 1. *Reuniunea unui număr finit de mulțimi numerabile este o mulțime numerabilă.*

Soluție. Prin inducție relativ la numărul de mulțimi.

1.2.12. Exercițiu. *Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ un șir de mulțimi finite. Atunci reuniunea lor este cel mult numerabilă.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1})(n \geqslant 1)$, unde $A_0 = \emptyset$. Evident avem $A = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n = \bigcup_{n\geqslant 1} B_n$. Dacă $(\exists)\ n_0 \geqslant 1$ a.î. $B_n = \emptyset$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, atunci A este finită, ca reuniune finită de mulțimi finite. Dacă $B_n = \emptyset$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, fie $B_n = \{b_1^n, b_2^n, \ldots, b_{k_n}^n\}$. Atunci $A = \{b_1^1, b_2^1, \ldots, b_{k_1}^1, b_1^1, b_2^2, \ldots, b_{k_2}^2, \ldots\}$, deci A este numerabilă.

1.2.13. Exercițiu. *Fie $(A_n)_{n\geqslant 1}$ și $(B_n)_{n\geqslant 1}$ două șiruri de mulțimi ambele monoton crescătoare (resp. descrescătoare). Atunci avem :*

$$\left(\bigcup_n A_n\right) \cap \left(\bigcup_n B_n\right) = \bigcup_n (A_n \cap B_n) \quad (resp.\ \left(\bigcap_n A_n\right) \cup \left(\bigcap_n B_n\right) = \bigcap_n (A_n \cup B_n)).$$

Ind. $x \in \left(\bigcup_n A_n\right) \cap \left(\bigcup_n B_n\right) \Leftrightarrow x \in \bigcup_n A_n \wedge x \in \bigcup_n B_n \Leftrightarrow (\exists)\ m \geqslant 1$ a.î. $x \in A_m \wedge x \in B_m \Leftrightarrow (\exists)\ m \geqslant 1$ a.î. $x \in A_m \cap B_m$.

1.2.14. Exerxciţiu. *Fie $(A_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de mulțimi. Să se construiască două șiruri de mulțimi $(B_n)_{n\geqslant 1}$ și $(C_n)_{n\geqslant 1}$ cu proprietățile :*

1° $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq \ldots$ *și* $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n = \bigcup_{n\geqslant 1} B_n$;

2° $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots \supseteq C_n \supseteq \ldots$ *și* $\bigcap_{n\geqslant 1} A_n = \bigcap_{n\geqslant 1} C_n$

Soluție. Să punem $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ și $C_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Atunci avem $A_n \subseteq B_n \subseteq B_{n+1}$ și $A_n \supseteq C_n \supseteq C_{n+1}$, $(\forall)$, $n \geqslant 1$, deci $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} B_n$ și $\bigcap_{n\geqslant 1} A_n \supseteq \bigcap_{n\geqslant 1} C_n$. Mai departe, fie $x \in \bigcup_{n\geqslant 1} B_n$ fixat; atunci există $n_0 \geqslant 1$ a.î. $x \in B_{n_0} = \bigcup_{i=1}^{n_0} A_i$, deci există $1 \leqslant n_1 \leqslant n_0$ cu $x \in A_{n_1}$ și deci $x \in \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$, încît $\bigcup_{n\geqslant 1} B_n \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$. Prin urmare $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n = \bigcup_{n\geqslant 1} B_n$ etc.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 2

NUMERE REALE. ŞIRURI DE NUMERE REALE

2.1. Numere reale (generalităţi). Identităţi. Inegalităţi

2.1.1. Exerciţiu. *Fie* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *fixaţi. Atunci între* a *şi* b *se află o infinitate de numere raţionale (resp. iraţionale).*

Soluţie. Fie $r \in \mathbf{Q}$, $a < r < b$, apoi $s \in \mathbf{Q}$, $r < s < b$ fixaţi (P. 2.1.19.). Atunci avem (P.2.2.13.) :

$$r_n := \frac{1}{n} r + \left(1 - \frac{1}{n}\right) s \in \mathbf{Q} \cap (r,\ s) \subseteq \mathbf{Q} \cap (a,\ b)$$

şi $r_n \neq r_m$ $(n \neq m)$ etc.

2.1.2. Exerciţiu. *Să se arate că corpul numerelor raţionale* $(\mathbf{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ *nu este complet ordonat.*

Soluţie. Fie $A = \{x \in \mathbf{Q}_+ ;\ x^2 < 2\}$. Mulţimea A posedă majoranţi, spre exemplu 2 majorează pe A. Presupunem că $b = \sup A$ există şi fie $c = \frac{b}{2} + \frac{1}{b}$. Evident $b^2 \geqslant 2$ (altfel dacă $b^2 < 2$, există $r \in \mathbf{Q}_+^*$ cu $(b + r)^2 < 2$, deci $b + r \in A$, absurd etc.) şi cum $\sqrt{2}$ nu este raţional, avem $b^2 > 2$. Evident

$$c^2 = \frac{b^2}{4} + 1 + \frac{1}{b^2} = 2 + \left(\frac{b}{2} - \frac{1}{b}\right)^2 > 2 ;\ c \in \mathbf{Q}_+,$$

deci c majorează pe A. Pe de altă parte, avem :

$$c = b - \left(\frac{b}{2} - \frac{1}{b}\right) = b - \frac{b^2 - 2}{2b} < b,$$

absurd, deoarece b este cel mai mic majorant al lui A.

Rămîne că $\sup A$ nu există, deci $\mathbf{Q}$ nu este complet ordonat.

Observaţie. Deoarece $\sqrt{2}$ nu este număr raţional, din T.2.1.23. rezultă de asemenea că $(\mathbf{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ nu este complet ordonat.

2.1.3. Exerciţiu. *Fie* $a_i, b_i \in \mathbf{R}_+$ $(i = \overline{1, n})$. *Atunci avem inegalitatea :*

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_n + b_n)} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}$$

Ind. Aplicăm inegalitatea mediilor pentru $\frac{a_i}{a_i + b_i} (i = \overline{1, n})$ şi $\frac{b_i}{a_i + b_i} (i = \overline{1, n})$

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + b_i}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + b_i} ;\quad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i + b_i}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i + b_i}$$

Adunăm mai departe inegalităţile obţinute.

2.1.4. Exerciţiu. *Să se arate inegalitatea :*

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}{1+a_1a_2\dots a_n} \leqslant 2^{n-1}, \quad (\forall)\ a_1, a_2, \dots a_n \geqslant 1$$

Ind. Prin inducţie relativ la n ţinînd cont că

$$a_n - 1 \leqslant a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n - 1).$$

2.1.5. Exerciţiu. *Dacă* $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}_+$ *şi* $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ *atunci :*

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geqslant 2^n$$

Ind. Avem $(1+a_i)^2 \geqslant 4a_i$, $(\forall)\ 1 \leqslant i \leqslant n$, deci

$$\left[\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\right]^2 = \prod_{i=1}^{n}(1+a_i)^2 \geqslant 4^n \prod_{i=1}^{n} a_i = 4^n$$

2.1.6. Exerciţiu. *Fie* $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$ *şi* π *o permutare a mulţimii* $\{1, 2, \dots, n\}$. *Atunci avem* $\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{a_i}{a_{\pi(i)}} + \frac{a_i}{a_{\pi(i)}^2}\right) \geqslant 3^n$

Ind. Ţinem seama că $1 + \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} \geqslant 3\frac{a}{b}$, $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}_+$

2.1.7. Exerciţiu. *Fie* $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbf{R}_+$ *şi* $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$. *Atunci avem :*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-a_i} \leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$$

Ind. $\frac{(n-1)^2}{s-a_i} \leqslant \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_i}$ $(i = \overline{1, n})$. Sumînd după i, avem :

$$(n-1)^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-a_i} \leqslant n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} = (n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$$

2.1.8. Exerciţiu. *Fie* $a_i, b_i, c_i \in \mathbf{R}_+$ $(i = \overline{1, n})$. *Atunci avem inegalitatea :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i\right)^3 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^3\right).$$ *Generalizare.*

Ind. Fie $A = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)^{1/3}$, $B = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\right)^{1/3}$, $C = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^3\right)^{1/3}$, $x_i = \frac{a_i}{A}$, $y_i = \frac{b_i}{B}$ şi $z_i = \frac{c_i}{C}$, Atunci avem succesiv :

$$a_i b_i c_i = ABC\, x_i y_i z_i \leqslant ABC\,\frac{x_i^3 + y_i^3 + z_i^3}{3}, \quad (i = \overline{1, n})$$

deci

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i \leqslant \frac{1}{3} ABC\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \sum_{i=1}^{n} y_i^3 + \sum_{i=1}^{n} z_i^3\right) = ABC,$$

Ridicăm în fine inegalitatea obţinută la puterea a 3-a.

Scanned with OKEN Scanner

2.1.9. Exercițiu. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+$ *și* π *o permutare a mulțimii* $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Atunci avem inegalitatea :*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{p+1}}{a_{\pi(i)}^{p}} \geqslant (resp.\ \leqslant) \sum_{i=1}^{n} a_i, \text{ dacă } p \in \mathbf{R} \setminus [-1, 0] \ (resp.\ p \in (-1, 0))$$

2.1.10. Exercițiu. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ *a.î.* $a_1^2 + \ldots + a_n^2 \leqslant a$. *Atunci* $(\forall)$ π *o permutare a mulțimii* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *avem inegalitatea* $\sum_{i=1}^{n} a_i a_{\pi(i)} \leqslant a$.

Ind. Punem $b_i = a_{\pi(i)}$ și aplicăm inegalitatea Cauchy (P.2.1.27.).

2.1.11. Exercițiu. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$. *Atunci avem inegalitatea*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2}$$

Ind. Punem în inegalitatea lui Cauchy $b_i = \frac{1}{n}$, $(\forall)\ 1 \leqslant i \leqslant n$.

2.1.12. Exercițiu. *Să se arate inegalitatea :*

$$(n+1)! \leqslant 2^n \cdot \sqrt[n+1]{(1!\,2! \ldots n!)^2}, \ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Ind. Se ține seama de inegalitatea mediilor (P.2.1.31.).

2.1.13. Exercițiu. *Să se arate inegalitatea :*

$$n^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_i}} \right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} \right)^{1/2}, \ (\forall)\ a_i \in \mathbf{R}_+^*.$$

Ind. Pentru prima parte folosim ineg. Cauchy :

$$n = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{a_i} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} \right)^{1/2}$$

Pentru partea a doua observăm că :

$$n + \sum_{1 \leqslant i \, j \leqslant n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \right) \leqslant n + \sum_{1 \leqslant i \, j \leqslant n} \left(\frac{a_i^2}{a_j^2} + \frac{a_j^2}{a_i^2} \right)$$

Corolar 1. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$ *și* $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. *Atunci*

$$\frac{a_1}{s - a_1} + \frac{a_2}{s - a_2} + \ldots + \frac{a_n}{s - a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}$$

Ind. Înlocuim în Ex. 2.1.13. pe a_i prin $s - a_i$ apoi scădem pe n din inegalitatea obținută :

$$\left(\frac{s}{s - a_1} - 1 \right) + \left(\frac{s}{s - a_2} - 1 \right) + \ldots + \left(\frac{s}{s - a_n} - 1 \right) \geqslant \frac{n^2}{ns - s} - n \text{ etc.}$$

2.1.14. Exercițiu. *Să se arate inegalitatea :*

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{tg} x_i \leqslant \frac{\sin x_1 + \ldots + \sin x_n}{\cos x_1 + \ldots + \cos x_n} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{tg} x_i, \quad (\forall) x_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Fie $\alpha = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\beta = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$. Atunci

$$n \sin \alpha \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sin x_i \leqslant n \sin \beta; \qquad n \cos \beta \geqslant \sum_{i=1}^{n} \cos x_i \geqslant n \cos \alpha$$

2.1.15. Exerciţiu. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$. *Dacă* $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ *şi* $\sum_{i=1}^{n} |a_i| = 1$, *atunci avem inegalitatea* :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\max_{i=\overline{1,n}} b_i - \min_{i=\overline{1,n}} b_i\right)$$

Soluţie. Renumerotînd putem presupune că $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Atunci cum $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, rezultă că

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n} (2b_i - b_1 - b_n)\, a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|bi - \frac{b_1 + b_n}{2}\right| \cdot |a_i|$$

Însă

$$\left|b_i - \frac{b_1 + b_n}{2}\right| \leqslant \frac{b_n - b_1}{2}, \quad (\forall)\ i = \overline{1, n},$$

deci

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \frac{b_n - b_1}{2} \sum_{i=1}^{n} |a_i| = \frac{b_n - b_1}{2}.$$

2.1.16. Exerciţiu. *Să se arate prin inducţie inegalitatea lui Cauchy* :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right), \quad (\forall)\ a_i b_i \in \mathbf{R}$$

Soluţie. Notăm cu $P(n)$ inegalitatea de arătat.

Evident $P(1)$ este adevărată. Fie $n \geqslant 1$ cu $P(n)$ adevărată şi fie $a_i, b_i \in \mathbf{R}$ $(i = \overline{1, n+1})$ fixaţi. Atunci

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 + 2a_{n+1} b_{n+1} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 + 2a_{n+1} b_{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + a_{n+1} \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i\right)$$

Aşadar $P(n+1)$ este adevărată etc.

Scanned with OKEN Scanner

2.1.17. Exercițiu. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ *a.î.* $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_na_1 = 1$. *Atunci* $a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2 \geqslant 1$.

Soluție. Utilizînd inegalitatea Cauchy, deducem

$$1 \leqslant |a_1 a_2| + |a_2 a_3| + \ldots + |a_n a_1| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right),$$

deci $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant 1$.

2.1.18. Exercițiu (Inegalitatea lui Cebîșev) *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$ *cu proprietatea că* $a_i \leqslant a_j \Leftrightarrow b_i \leqslant b_j$ $(\forall)$ $i, j = \overline{1, n}$. *Atunci* $(\forall)$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}_+^*$ *avem inegalitatea :*

$$\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} \cdot \frac{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\lambda_1 a_1 b_1 + \lambda_2 a_2 b_2 + \ldots + \lambda_n a_n b_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n},$$

cu egalitate, dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ *sau* $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.

Soluție. Evident avem (peste tot $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$):

$$\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqslant 0,$$

deci

$$\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j (a_i b_i - a_j b_j - a_i b_j - a_j b_i) \geqslant 0$$

și deci

$$\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j (a_i b_j + a_j b_i) \leqslant \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j (a_i b_i + a_j b_j).$$

Notăm cu s (resp. S) suma din stînga (resp. dreapta). Atunci

$$s = \sum_i \sum_j (\lambda_i \lambda_j a_i b_j + \lambda_i \lambda_j a_j b_j) =$$

$$= \left(\sum_i \lambda_i a_i\right)\left(\sum_i \lambda_j b_j\right) + \left(\sum_i \lambda_i b_i\right)\left(\sum_j \lambda_j a_j\right) = 2\left(\sum_i \lambda_i a_i\right)\left(\sum_i \lambda_i b_i\right);$$

$$S = \sum_i \sum_j (\lambda_i \lambda_j a_i b_i + \lambda_i \lambda_j a_j b_j) =$$

$$= \left(\sum_i \lambda_i a_i b_i\right)\left(\sum_j \lambda_j\right) + \left(\sum_i \lambda_i\right)\left(\sum_j \lambda_j a_j b_j\right) = 2\left(\sum_i \lambda_i\right)\left(\sum_i \lambda_i a_i b_i\right),$$

deci

$$\left(\sum_i \lambda_i a_i\right)\left(\sum_i \lambda_i b_i\right) \leqslant \left(\sum_i \lambda_i\right)\left(\sum_i \lambda_i a_i b_i\right).$$

Împărțim mai departe prin $\left(\sum \lambda_i\right)^2$.

Corolar. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$ *cu proprietatea* $a_i \leqslant a_j \Leftrightarrow b_i \leqslant b_j$ $(\forall)$ $i, j = \overline{1, n}$. *Atunci are loc inegalitatea :*

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Scanned with OKEN Scanner

Mai general, avem :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i b_i\ (\forall)\ \lambda_i\in\mathbf{R}_+,\quad\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1.$$

Corolar 2. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$. *Atunci avem inegalitatea:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\leqslant\frac{n^2(n+M)}{4nM},\ (m=\min_i a_i,\ M=\max_i a_i).$$

2.1.19. Exerciţiu. *Să se arate identitatea :*

$$\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\ldots+\frac{a_1a_2\ldots a_n}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2+a_3\sqrt{2+\ldots+a_n\sqrt{2}}}},$$

unde $a_i\in\{-1,1\}$ $(i=\overline{1,n})$.
Soluţie. Să arătăm în prealabil relaţia

$$2\sin\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\varepsilon\pi}{4},\ =\varepsilon\sqrt{2+2\sin\frac{\alpha\pi}{4}},\ \varepsilon=\pm1,\ |\alpha|<2 \qquad (1)$$

Deoarece $0<\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$, avem $\operatorname{sign}\left(\sin\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\varepsilon\pi}{4}\right)=\operatorname{sign}\ \varepsilon$, deci

$$(1)\Leftrightarrow 2\sin\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\pi}{4}=\sqrt{2+2\sin\frac{\alpha\pi}{4}}\Leftrightarrow 2\sin^2\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\pi}{4}=$$

$$=1+\sin\frac{\alpha\pi}{4}\Leftrightarrow-\cos\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\pi}{2}=\sin\frac{\alpha\pi}{4}.$$

Or ultima relaţie este evidentă ţinînd cont că

$$-\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\sin t,\ (\forall)\ t\in\mathbf{R}.$$

Fie P proprietatea din enunţ ; ea depinde de n. Să o demonstrăm prin inducţie

$P(1)$ este adevărată : $\sin\frac{a_1\pi}{4}=a_1\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Fie $n\geqslant 1$ cu $P(n)$ adevărată. Atunci

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\ldots+\frac{a_1a_2\ldots a_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4}=2\sin\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{a_1\pi}{4}=$$

$$=a_1\sqrt{2+2\sin\frac{\alpha\pi}{4}},$$

unde $\alpha=a_2+\frac{a_2a_3}{2}+\ldots+\frac{a_2a_3\ldots a_{n+1}}{2^{n-1}}$. Deoarece

Scanned with OKEN Scanner

$|\alpha| \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ și $P(n)$ este adevărată, avem :

$$2 \sin \frac{\alpha\pi}{4} = 2 \sin \left(a_2 + \frac{a_2 a_3}{2^n} + \ldots + \frac{a_2 \ldots a_{n+1}}{2^{n-1}} \right) \frac{\pi}{4} =$$

$$= a_2 \sqrt{2 + a_3 \sqrt{2 + \ldots + a_{n+1}\sqrt{2}}},$$

deci

$$2 \sin \left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \ldots + \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{2^n} \right) \frac{\pi}{4} = a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + \ldots + a_{n+1}\sqrt{2}}}$$

Așadar $P(n+1)$ este adevărată etc.

2.1.20. Exercițiu. *Să se arate identitatea*

$$\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}, \quad (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Soluție. Considerăm polinomul $P(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1$. Evident avem :

$P(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$ $(\forall)$ $x \neq 1$, deci cum $x_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$

sînt rădăcinile ecuației $x^n - 1 = 0$ și $x \neq 1$, rezultă că $x_k (1 \leqslant k \leqslant n-1$ sînt rădăcinile ecuației $P(x) = 0$. Așa dar avem

$$P(x) = \left(x - \cos \frac{2\pi}{n} - i \sin \frac{2\pi}{n} \right) \ldots \left(x - \cos \frac{2n\pi}{n} - i \sin \frac{2n\pi}{n} \right),$$

$$n = P(1) = \left(2 \sin \frac{\pi}{n} - 2i \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \right) \ldots \left(2 \sin \frac{n\pi}{n} - 2i \sin \frac{n\pi}{n} \cos \frac{n\pi}{n} \right) =$$

$$= 2^{n-1} \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \right) \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(\sin \frac{k\pi}{n} - i \cos \frac{k\pi}{n} \right) \right).$$

Rămîne să arătăm că $\Gamma_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\sin \frac{k\pi}{n} - i \cos \frac{k\pi}{n} \right) = 1$.

Pentru calculul lui Γ_{n-1}, din formula lui Moivre, deducem :

$$\Gamma_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (-i) \left(\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n} \right) = (-i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n} \right)^k =$$

$$= (-i)^{n-1} \left(\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n} \right)^{\sum_{k=1}^{n-1} k} = (-i)^{n-1} \left(\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n} \right)^{\frac{n(n-1)}{2}} =$$

$$= (-i)^{n-1} \left(\cos \frac{(n-1)\pi}{2} + i \sin \frac{(n-1)\pi}{2} \right) = (-i)^{n-1} (i)^{n-1} = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.1.21. Exerciţiu. *Să se arate identitatea :*

$$\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\ldots\cos\frac{\theta}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}}\quad(\forall)\ \theta\neq 2^k m\pi,\ k\in\overline{1,n},\ m\in\mathbf{Z}.$$

Soluţie. Deoarece $\sin\frac{\theta}{2^{k-1}}=2\sin\frac{\theta}{2^k}\cos\frac{\theta}{2^k}$ rezultă că

$$\cos\frac{\theta}{2^k}=\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\theta}{2^{k-1}}}{\sin\frac{\theta}{2^k}}\quad(k=\overline{1,n}),$$

deci

$$\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\ldots\cos\frac{\theta}{2^n}=\frac{1}{2^n}\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2^2}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{1}{2^n}\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

Corolar 1.

$$\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\ldots\cos\frac{\theta}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

Corolar 2.

$$\cos\theta\cos 2\theta\ldots\cos 2^{n-1}\theta=\frac{\sin 2^n\theta}{2^n\sin\theta},\quad\theta\notin\pi\mathbf{Z}$$

2.1.22. Exerciţiu. *Să se arate identitatea :*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x,\ (\forall)\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\ şi\ n\in\mathbf{N}$$

Soluţie. Plecînd de la relaţia $\operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

se obţine $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x,\ (\forall)\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

deci

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}x$$

$$\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}=\frac{1}{2^2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^2}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{n-1}}$$

Scanned with OKEN Scanner

Adunînd și reducînd termenii asemenea deducem :

$$\sum_{k=1} \frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{2}{2^n} - \operatorname{ctg} x.$$

2.1.23. Exercițiu. *Să se arate identitatea :*

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 2^2 x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x,$$

$$x \neq \frac{k\pi}{2^i},\ i = \overline{1,\ n},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Soluție. Plecînd de la relația :

$$\operatorname{ctg} 2^{k-1}x - \operatorname{ctg} 2^k x = \frac{1}{\sin 2^k x},\ (\forall)\ k \in \mathbf{N}$$

se obține :

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 2^2 x = \frac{1}{\sin 2^2 x}$$

$$\vdots$$

$$\operatorname{ctg} 2^{n-1}x - \operatorname{ctg} 2^n x = \frac{1}{\sin 2^n x}.$$

Adunînd și reducînd termenii asemenea deducem :

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 2^2 x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x}$$

2.2. Mulțimi mărginite și intervale în R.

2.2.1. Exercițiu. *Fie $A, B \subseteq \mathbf{R}$ două mulțimi mărginite. Atunci mulțimile $-A$, $A \pm B$, $A \cdot B$ și $A \cup B$ sînt mărginite.*

Soluție. A și B fiind mărginite, $(\exists)\ M, M' \in \mathbf{R}_+$ a.î. $|a| \leqslant M$, $(\forall)\ a \in A$ și $|b| \leqslant M'$, $(\forall)\ b \in B$. Atunci $|-a| \leqslant M$, $(\forall)\ a \in A$; $|a \pm b| \leqslant M + M'$, $(\forall)\ a \in A$ și $b \in B$; $|ab| \leqslant MM'$. $(\forall)\ a \in A$ și $b \in B$; $|x| \leqslant \max\{M, M'\}$, $(\forall)\ x \in A \cup B$,

deci $-A$, $A \pm B$, $A \cdot B$ și $A \cup B$ sînt mărginite.

2.2.2. Exercițiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime nemărginită. Atunci A se poate scrie ca o reuniune numerabilă de mulțimi mărginite.*

Soluție. Fie $A_n := A \cap [-n, n]$ $(n \geqslant 1)$. Atunci A_n este mărginită și avem :

$$A = A \cap \mathbf{R} = A \cap \left(\bigcup_{n \geqslant 1} [-n, n]\right) = \bigcup_{n \geqslant 1} (A \cap [-n, n]) = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.2.3. Exerciţiu. *Fie A, B două mulţimi adiacente, adică :*
1° $a \leqslant b, (\forall)\, a \in A$ *şi* $b \in B$; 2° $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, a \in A \wedge b \in B$ *a.î.* $b - a \leqslant \varepsilon$. *Să se arate atunci că* $\sup A$ *şi* $\inf B$ *există şi sînt egale.*

Soluţie. A fiind majorată de b, $(\forall)\, b \in B$ avem că $\sup A$ există şi $a_0 = \sup A \leqslant b$, $(\forall)\, b \in B$. Mulţimea B fiind minorată de a_0 avem că $b_0 = \inf B$ există şi $a_0 \leqslant b$. Cum $0 \leqslant b_0 - a_0 \leqslant b - a$, $(\forall)\, a \in A$ şi $b \in B$ din 2° deducem că $a_0 = b_0$.

2.2.4. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime. Atunci avem relaţia :*

$$\sup_{x \in A} |x| = \max \{|\sup A|, |\inf. A|\}$$

Soluţie. $\inf A \leqslant x \leqslant \sup A$, $(\forall)\, x \in A$

$$|x| \leqslant \max \{|\sup A|, |\inf. A|\}, (\forall)\, x \in A,$$

deci

$$\sup_{x \in A} |x| \leqslant \max \{|\sup A|, |\inf A|\} \tag{1}$$

Pe de altă parte avem : $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$, $(\forall)\, x \in A$,
deci

$$-\sup_{x \in A} |x| \leqslant -\inf_{x \in A} |x| = \sup_{x \in A} (-|x|) \leqslant \sup_{x \in A} x \leqslant \sup_{x \in A} |x|$$

şi deci

$$|\sup_{x \in A} x| \leqslant \sup_{x \in A} |x| \tag{2}$$

Analog avem :

$$-\sup_{x \in A} |x| = \inf_{x \in A} (-|x|) \leqslant \inf_{x \in A} x \leqslant \inf_{x \in A} |x| \leqslant \sup_{x \in A} |x|,$$

deci

$$|\inf_{x \in A} x| \leqslant \sup_{x \in A} |x| \tag{3}$$

Din (2) şi (3) deducem

$$\max \{|\sup_{x \in A} x|, |\inf_{x \in A} x|\} \leqslant \sup_{x \in A} |x| \tag{4}$$

Din (1) şi (4) obţinem egalitatea căutată.

2.2.5. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime a.î.* $|x-y| < |I|$, $(\forall)\, x, y \in A$. *Atunci mulţimea $A + I$ este un interval.*

Soluţie. Fie $x, y \in A$ fixaţi. Atunci $(x + I) \cap (y + I) \neq \emptyset$, altfel în ipoteza $x < y$ avem $x + I < y + I$, deci $|x - y| > |a - b|$, $(\forall)\, a, b \in I$ şi deci $|x - y| \geqslant |I|$, absurd.

Să observăm că $(x + I) \cup (y + I)$ este un interval $(\forall)\, x, y \in I$. Dacă $x' \in A + I$, $y' \in A + I$, atunci $x' \in x + I$, $y' \in y + I$, deci :

$$[x', y'] \subseteq (x + I) \cup (y + I) \subseteq A + I$$

prin urmare, $A + I$ interval.

2.2.6. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval închis (resp. deschis). Atunci $(\exists)(I_n)_{n \geqslant 1}$ un şir descendent (resp. ascendent) de intervale deschise (resp. închise) a.î.* $I = \bigcap_{n \geqslant 1} I_n$ *(resp.* $I = \bigcup_{n \geqslant 1} I_n$*)*

Soluţie 1° Dacă I este închis, este de forma $[a, b]$, $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$ şi $\mathbf{R}$. Atunci putem scrie

$$[a, b] = \bigcap_{n \geqslant 1} \left(a - \frac{1}{n},\ a + \frac{1}{n}\right); (-\infty, b] = \bigcap_{n \geqslant 1} \left(-\infty,\ b + \frac{1}{n}\right) \text{ etc.}$$

Scanned with OKEN Scanner

2° Dacă I este deschis, $(\exists)\ a, b \in \overline{\mathbf{R}}$ cu $I = (a, b)$. Fie $a_n, b_n \in I$. $a_n \leqslant b_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, a.i. $a_n \searrow a$ și $b_n \nearrow b$. Evident avem $(a, b) = \bigcup_{n \geqslant 1} [a_n, b_n]$.

2.2.7. Exercițiu. *Fie* $A_i \subseteq \mathbf{R}$ $(i \in I)$ *și* $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. *Atunci* :

$$\sup A = \sup_{i \in I} (\sup A_i)\,;\ \inf A = \inf_{i \in I} (\inf A_i)$$

Soluție. Avem $\sup A_i \leqslant M$, $(\forall)\ i \in I$, unde $M = \sup A$, deci

$$\sup_{i \in I} (\sup A_i) \leqslant \sup A \tag{1}$$

Fie $c < M$, fixat. Atunci $(\exists)\ x \in A$ cu $x \geqslant c$ deci $(\exists)\ i_0 \in I$ și $x \in A_{i_0}$ cu $x \geqslant c$ și deci $\sup A_{i_0} \geqslant c$, de unde $\sup_{i \in I} (\sup A_i) \geqslant c$. Cum $c < M$ a fost ales arbitrar, deducem

$$\sup_{i \in I} (\sup A_i) \geqslant M = \sup A \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă egalitatea căutată.

2.2.8. Exercițiu. *Fie* $A, B \subseteq \mathbf{R}_+$ *două mulțimi. Atunci* :

1° $\inf (AB) = (\inf A)(\inf B)$; 2° $\sup (AB) = (\sup A)(\sup B)$

Soluție. 1° Evident $ab \geqslant (\inf A)(\inf B)$, $(\forall)\ a \in A$ și $b \in B$ deci $\inf AB \geqslant (\inf A)(\inf B)$

Fie mai departe $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)\ a \in A$ și $b \in B$ a.î.

$$a \leqslant \inf A + \varepsilon\,;\ b \leqslant \inf B + \varepsilon$$

deci

$$ab \leqslant (\inf A)(\inf B) + \varepsilon\,(\inf A + \inf B + \varepsilon)$$

și deci

$$\inf AB \leqslant (\inf A)(\inf B) + \varepsilon\,(\inf A + \inf B + \varepsilon)$$

sau

$$0 \leqslant \inf AB - (\inf A)(\inf B) \leqslant \varepsilon\,(\inf A + \inf B + \varepsilon)$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, deducem egalitatea

$$\inf AB - (\inf A)(\inf B) = 0$$

2° se arată la fel ca 1°.

Observație Dacă $A, B \subseteq \mathbf{R}$ sînt arbitrare, relațiile de mai sus nu sînt numai decît adevărate.

Contraexemplu : Fie $A = \{1, 2\}$ și $B = \{-1, -2\}$. Atunci $\inf A = 1$, $\inf B = -2$, $\inf AB = -4 \neq (\inf A)(\inf B)$.

2.2.9. Exercițiu. *Fie* a_i *și* $b_i \in \mathbf{R}$ $(i \in I)$. *Dacă* $|a_i - b_i| \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ i \in I$, *atunci* :

1° $|\sup_i a_i - \sup_i b_i| \leqslant \varepsilon$; 2° $|\inf_i a_i - \inf_i b_i| \leqslant \varepsilon$

Soluție. 1° Din ipoteză avem :

$$b_i - \varepsilon \leqslant a_i \leqslant b_i + \varepsilon,\ (\forall)\ i \in I$$

deci

$$\sup_i (b_i - \varepsilon) \leqslant \sup_i a_i \leqslant \sup_i (b_i + \varepsilon)$$

și deci

$$(\sup_i b_i) - \varepsilon \leqslant \sup_i a_i \leqslant (\sup_i b_i) + \varepsilon$$

adică

$$|\sup_i b_i - \sup_i a_i| \leqslant \varepsilon$$

2° se arată la fel ca 1°.

2.2.10. Exercițiu. *Oricare ar fi* $a, b, c \in \mathbf{R}$ *avem relațiile :*

1° $\min \{a, \max \{b, c\}\} = \max \{\min \{a, b\}, \min \{a, c\}\}$.

2° $\max \{a, \min \{b, c\}\} = \min \{\max \{a, b\}, \max \{a, c\}\}$.

Ind. 1° Se arată verificînd succesiv inegalitatea $\leqslant$ apoi inegalitatea $\geqslant$. 2°. rezultă din 1° amplificînd cu -1.

2.2.11. Exercițiu. *Oricare ar fi* $a_i, b_i \in \mathbf{R}$ $(i = \overline{1, n})$ *avem inegalitatea :*

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=}^{n} b_i \right\} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \max \{a_i, b_i\}.$$

Ind. Scriem $a_i, b_i \leqslant \max \{a_i, b_i\}$ apoi sumăm după i.

2.2.12. Exercițiu. *Oricare ar fi* $A, B \subseteq \mathbf{R}$ *avem relațiile :*

1° $\min \{\sup A, \sup B\} = \sup \{\min \{a, b\}; a \in A, b \in B\}$.

2° $\max \{\inf A, \inf B\} = \inf \{\max \{a, b\}; a \in A, b \in B\}$.

Ind. Analog cu Ex. 2.2.10.

2.3. Șiruri de numere reale

2.3.1. Exercițiu. *Să se arate plecînd de la definiție că șirul* $(x_n)_{n \geqslant 1}$, *unde* $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, *este convergent la* 0.

Soluție. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Să determinăm $n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î. $|x_n - 0| \leqslant \varepsilon$, $(\forall)$ $n \geqslant n_\varepsilon$. Evident însă $|x_n| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n^2} \leqslant \varepsilon \Rightarrow n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Deci putem lua $n_\varepsilon = 1 + \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$.

Spre exemplu, pentru $\varepsilon = \dfrac{1}{101}$, avem $n_\varepsilon = 1 + [\sqrt{101}] = 11$; pentru

$$\varepsilon = \frac{1}{1001}, \text{ avem } n_\varepsilon = 1 + [\sqrt{1001}] = 1 + 31 = 32.$$

2.3.2. Exercițiu. *Să se arate că șirul* $(x_n)_{n \geqslant 1}$, *unde* $x_n = \dfrac{1}{n} \sin (n\,!\,a)$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, *este convergent la* 0, *pentru orice* $a \in \mathbf{R}$.

Soluție. Evident $\left| \dfrac{1}{n} \sin (n\,!\,a) \right| \leqslant \dfrac{1}{n}$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, deci (P.2.3.18. Cor. 1) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

2.3.3. Exercițiu. *Să se arate că* $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1\,! + 2\,! + \ldots + n\,!}{(2n)\,!} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Evident avem $k! \leqslant n!$, $(\forall)\ 1 \leqslant k \leqslant n$, deci

$$0 < \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(2n)!} \leqslant \frac{n \cdot n!}{(n!)(n+1)\ldots(2n)} = \frac{n}{(n+1)\ldots(2n)} \to 0$$

2.3.4. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[na]}{n}$, $(a \in \mathbf{R})$.

Soluție. Evident avem $n \cdot a - 1 < [na] \leqslant n\,a$, deci $a - \frac{1}{n} < \frac{[na]}{n} \leqslant$ $\leqslant a$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[na]}{n} = a$.

2.3.5. Exercițiu. *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir cu elemente din* $\mathbf{R}^*$, *convergent către un element din* $\mathbf{R}^*$. *Atunci* $(\exists)\ \alpha > 0$ *a.î.* $|a_n| \geqslant \alpha$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Soluție. Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Atunci $|a| = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$. Cum $|a| > 0$, $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î. $|a_n| \geqslant \frac{|a|}{2}$, $(\forall)\ n \geqslant N$. Punem $\alpha = \min\left\{|a_1|, |a_2|, \ldots |a_N|, \frac{|a|}{2}\right\}$.

2.3.6. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k$, *dacă* $|x| \leqslant 1$

Ind. 1° Dacă $x = 1$, limita dată este 1;

2° Dacă $x = -1$, $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} x^k\right| \leqslant 1$, deci limita dată este 0;

3° Dacă $|x| < 1$, avem $x^n \to 0$, deci $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - x^n}{1 - x} \to 0$.

2.3.7. Exercițiu. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir cu elemente din* $\mathbf{R}$ *și* $x \in \mathbf{R}$. *Atunci* $x_n \to x \Leftrightarrow (\exists)\ \alpha > 0$ *cu proprietatea*: $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ *a.î.* $|x - x_n| < \alpha\varepsilon$, $(\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$.

Soluție. ($\Rightarrow$) Luăm $\alpha = 1$ și aplicăm D.2.3.1.

($\Leftarrow$) Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci pentru $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{\alpha}$, $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î. $|x - x_n| <$ $< \alpha\varepsilon' = \varepsilon$, $(\forall)\ n \geqslant N$, deci $x_n \to x$.

2.3.8. Exerciții. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir convergent cu elemente din* $\mathbf{K}^*$. *Atunci* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *are limita nenulă* $\Leftrightarrow \inf\limits_{n\geqslant 1} |x_n| > 0$.

Soluție. ($\Rightarrow$) Fie $x_n \to x$, $x \neq 0$. Atunci pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}|x|$, $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î. $|x - x_n| \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ n \geqslant N$, deci

$$|x_n| = |x - (x - x)_n| \geqslant |x| - |x - x_n| \geqslant |x| - \varepsilon = \frac{1}{2}|x|,\ (\forall)\ n \geqslant N$$

și deci

$$|x_n| \geqslant \alpha := \min\left\{\frac{1}{2}|x|, |x_1|, \ldots |x_N|\right\} > 0,\ (\forall)\ n \geqslant 1$$

($\Leftarrow$) Dacă $(\exists)\ \alpha > 0$ cu $|x_n| \geqslant \alpha$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, atunci $|\lim\limits_{n\to\infty} x_n| \geqslant \alpha$.

Scanned with OKEN Scanner

2.3.2. Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir cu elemente din* **R**. *Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent la $x \Leftrightarrow$ orice subșir al lui $(x_n)_{n\geq 1}$ conține un subșir convergent la x.*

Soluție. Implicația ($\Rightarrow$) rezultă din P.2.3.10.

($\Leftarrow$) Presupunem că $(x_n)_{n\geq 1}$ nu converge la x. Atunci $(\exists)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ (x_{n_k})_k$ un subșir al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ a.î. $|x - x_{n_k}| \geq \varepsilon$, $(\forall)\ k \geq 1$. Evident $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ nu poate conține un subțir convergent la x, absurd. Rămîne că $x_n \to x$.

2.3.10. Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict monoton $\Leftrightarrow (x_{n+1} - x_n)(x_n - x_{n-1}) > 0$, $(\forall)\ n \geq 1$* (1)

Soluție. Implicația ($\Rightarrow$) este evidentă.

($\Leftarrow$) Din (1) rezultă $x_2 - x_1 \neq 0$, spre exemplu $x_1 < x_2$. În acest caz vom arăta prin inducție că $x_n < x_{n+1}$ $(\forall)\ n \geq 1$. Fie în acest scop $n \geq 1$ cu $x_n < x_{n+1}$, deci $x_{n+1} - x_n > 0$. Din (1) rezultă $(x_{n+2} - x_{n+1})(x_{n+1} - x_n) > 0$, deci $x_{n+1} < x_{n+2}$. Prin urmare $x_n < x_{n+1}$, $(\forall)\ n \geq 1$.

Observație. Dacă $(x_{n+1} - x_n)(x_n - x_{n-1}) \geq 0$, $(\forall)\ n \geq 1$ (2), nu rezultă numaidecît că $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton.

Contraexemplu. Fie șirul 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, ... Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ satisface inegalitatea (2) și nu este monoton.

2.3.11. Exercițiu. *Șirurile* $\left(\sin\frac{n\pi}{3}\right)_{n\geq 1}$ *și* $\left(\cos\frac{n\pi}{3}\right)_{n\geq 1}$ *nu au limită.*

Soluție. Fie $a_n := \sin\frac{n\pi}{3}$ $(n \geq 1)$; presupunem că $(a_n)_{n\geq 1}$ are limită și fie a limita sa. Cum $|a_n| \leq 1$, $(\forall)\ n \geq 1$, avem $|a| \leq 1$, deci $a \in \mathbf{R}$. Atunci pentru $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $(\exists)\ N \geq 1$ a.î. $\left|\sin\frac{\pi n}{3} - a\right| < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $(\forall)\ n \geq N$. Dacă $n := 6N \pm 1$, obținem $\left|\pm\frac{\sqrt{3}}{2} - a\right| < \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci

$$\sqrt{3} = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| \leq \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - a\right| + \left|a + \frac{\sqrt{3}}{2}\right| < \sqrt{3},$$

absurd, etc.

2.3.12. Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un șir definit astfel: $x_0 \neq 0$ și $x_n = \operatorname{arc\,tg} x_{n-1}$, $(\forall)\ n \geq 1$. Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2$.

Soluție. Dacă $x_0 > 0$, atunci $x_{n+1} = \operatorname{arc\,tg} x_n > x_n$, $(\forall)\ n \geq 0$, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător, de unde deducem imediat că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Un calcul simplu arată că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{arc\,tg}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{3},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}\right) = \frac{2}{3}$$

și deci

$$\frac{2}{3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_{k+1}^2} - \frac{1}{x_k^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_n^2}\right),$$

de unde obținem că $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2 = \frac{3}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

2.3.13. Exerciţiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir din* $\mathbf{R}$. *Atunci avem :*

1° $x_n \to x \Leftrightarrow (\exists)\ \nu : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *a.î.* $|x_n - x| \leq \frac{1}{m}$, $(\forall)\ m \geq 1$ *şi* $n \geq \nu(m)$;

2° $x_n \to +\infty$ (*resp.* $-\infty$) $\Leftrightarrow (\exists)\ \nu : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *a.î.* $x_n \geq m$ (*resp.* $x_n \leq -m$), $(\forall)\ m \geq 1$ *şi* $n \geq \nu(m)$.

Soluţie. 1° ($\Rightarrow$) Pentru $\varepsilon = \frac{1}{m}$, există $n\left(\frac{1}{m}\right)$ a.î.

$$|x_n - x| < \frac{1}{m},\ (\forall)\ n \geq n\left(\frac{1}{m}\right)$$

Corespondenţa $m \mapsto n\left(\frac{1}{m}\right)$ defineşte o funcţie $\nu : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ cu proprietăţile din enunţ.

($\Leftarrow$) Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci există $m \geq 1$ cu $\frac{1}{m} \leq \varepsilon$. Notînd $\nu(m)$ cu n_ε avem :

$$|x_n - x| < \frac{1}{m} < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geq n_\varepsilon,$$

deci $x_n \to x$.

2° Analog cu 1°

2.3.14. Exerciţiu. *Să se arate că nu există şiruri strict crescătoare de numere naturale* $(x_n)_{n\geq 1}$ *cu proprietatea că* $x_n + x_m = x_{nm}$, $(\forall)\ n, m \geq 1$.

Soluţie. Presupunem că există $x_n \in \mathbf{N}$ a.î. $x_n < x_{n+1}$ şi $x_n + x_m = x_{nm}$, $(\forall)\ n, m \geq 1$. Atunci avem :

$$x_n \geq n,\ nx_2 = \underbrace{x_2 + x_2 + \ldots + x_2}_{\text{n ori}} = x_{2n},\ (\forall)\ n \geq 1,$$

deci $nx_2 \geq 2^n$, $(\forall)\ n \geq 1$ şi deci $x_2 \geq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = \infty$, absurd.

2.3.15. Exerciţiu. *Să se calculeze :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a^2 - 1| + |a + 2|\, e^{na}}{|a + 3| + |(a - 1)(a - 2)|\, e^{na}}\ (a \textit{ parametru real})$$

Soluţie. Fie $f_n(a) := \frac{|a^2 - 1| + |a + 2|\, e^{na}}{|a + 3| + |(a - 1)(a - 2)| e^{na}}$, $a \in \mathbf{R}$.

1 $a \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{2\}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-na} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e^a}\right)^n = 0$, deci

$$f_n(a) = \frac{|a^2 - 1|\, e^{-na} + |a + 2|}{|a - 3|\, e^{-na} + |(a - 1)(a - 2)|} \to \frac{|a + 2|}{|(a - 1)(a - 2)|}\ (n \to \infty).$$

2° $a = 2$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(2) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3 + 4e^{2n}}{5} = +\infty$.

3 $a \in \mathbf{R}_-^* \setminus \{-3\}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} e^{na} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e^{-a}}\right)^n = 0$, deci

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a) = \frac{|a^2 - 1|}{|a + 3|}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4° $a = -3$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(-3) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8 + e^{-3n}}{20\, e^{-3n}} = +\infty$

2.3.16. Exercițiu. *Să se arate că șirul* $(x_n)_{n\geqslant 1}$, *unde* $x_n = 1 + (-1)^n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, *nu are limită.*

Soluția 1. Presupunem că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ ar avea limită; fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Deoarece $x_n = 0$ sau $x_n = 2$, rezultă că x este finit. Fie $V = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ o vecinătate a lui x, cu $0 < \varepsilon < 1$. Evident dacă $x_n \in V$, atunci $x_{n+1} \notin V$, deci $(\forall)\ n_\varepsilon \geqslant 1$, nu putem avea $x_n \in V$, $(\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$.

Soluția 2. Presuupunem că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ are limită; fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Atunci $2 = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = 0$, absurd.

Prin urmare șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ nu are limită.

2.3.17. Exercițiu. *Să se studieze natura șirului* $(x_n)_{n\geqslant 1}$, *unde* $x_1 = 1$ *și* $x_{n+1} = 1 + x_n^2$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Soluție. Evident $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este crescător, deci $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ există, finită sau $+\infty$. Dacă $x < +\infty$, atunci $x = 1 + x^2$, absurd, deci $x = +\infty$.

2.3.18. Exercițiu. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir nemărginit din* $\mathbf{R}$ *cu proprietatea că* $x_1 > 0$ *și* $x_{n+m} \geqslant \dfrac{nx_n + mx_m}{n + n}$ $(\forall)\ n, m \geqslant 1$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Soluție. Se vede imediat că $x_{nm} \geqslant x_m \geqslant x_1 > 0$, $(\forall)\ n, m \geqslant 1$, deci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ fiind nemărginit, nu este majorat. Fie $M > 0$ fixat. Atunci $(\exists)\ n_0 \geqslant 1$ a.î. $x_{n_0} \geqslant 2M$. Dacă $n \geqslant n_0$, există q, r întregi $\geqslant 0$, cu $0 \leqslant r < n_0$ și $n = n_0 q + r$. Atunci avem:

$$x_n = x_{n_0 q + r} \geqslant \frac{n_0 q x_{n_0 q} + r a_r}{n_0 q + r} \geqslant \frac{n_0 q x_{n_0 q}}{n_0 q + n_0} \geqslant \frac{q}{q+1} x_{n_0} \geqslant M,$$

adică $x_n \geqslant M$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

2.3.19. Exercițiu. *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir monoton crescător (resp. descrescător) de numere reale. Atunci șirul* $(\tilde{a}_n)_{n\geqslant 1}$, *unde* $\tilde{a}_n := \dfrac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, *este monoton crescător (resp. descrescător).*

Soluție. Presupunem $(a_n)_{n\geqslant 1}$ monoton crescător. Evident avem:

$$\tilde{a}_{n+1} - \tilde{a}_n = \frac{1}{n+1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}) - \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) =$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \frac{1}{n+1} a_{n+1} =$$

$$= -\frac{1}{n(n+1)}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \frac{n}{n(n+1)} a_{n+1} =$$

$$= \frac{1}{n(n+1)}[(a_{n+1} - a_1) + (a_{n+1} - a_2) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)] \geqslant 0,$$

deci

$\tilde{a}_{n+1} \geqslant \tilde{a}_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ și deci $(\tilde{a}_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton crescător.

2.3.20. Exercițiu. *Să se arate că șirul* $(x_n)_{n\geqslant 1}$, *unde* $x_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, *este convergent la* 1.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Evident avem $|x_n - 1| = \left|\frac{2(-1)^n}{n-(-1)}\right| \leqslant 2\frac{1}{n-1}$ $(\forall)$ $n \geqslant 2$, deci (P.2.3.18. Cor. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - 1| = 0$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

2.3.21. Exercițiu. *Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & a > 1 \end{cases}$

Soluție. 1° Fie $b = |a| < 1$ și $\varepsilon > 0$ fixat. Să găsim $n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î. $b^n < \varepsilon$, $(\forall)$ $n \geqslant n_\varepsilon$. Evident $b^n \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow n \ln b \leqslant \ln \varepsilon \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln \varepsilon}{\ln b}$, deoarece $\ln b < 0$. Deci putem lua $n_\varepsilon := 1 + \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln b}\right]$.

2° Dacă $a = 1$, afirmația este evidentă.

3° Dacă $a > 1$, atunci $a = 1 + \alpha$, cu $0 < \alpha < 1$, deci

$$a^n = (1+\alpha)^n = 1 + C_n^1\alpha + \ldots + C_n^n\alpha^n > 1 + C_n^1\alpha = 1 + n\alpha \to \infty \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a^n = +\infty.$$

Observație. Dacă $a \leqslant -1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ *nu există*

2.3.22. Exercițiu. *Să se arate plecînd de la definiție că* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $(\forall)$ $a > 0$

Soluție. Fie $a \geqslant 1$ și $\varepsilon > 0$ fixați. Atunci $(\exists)$ $n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î. $a \leqslant 1 + n\varepsilon$, $(\forall)$ $n \geqslant n_\varepsilon$. Cum

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + C_n^1\varepsilon + C_n^2\varepsilon^2 + \ldots + C_n^n\varepsilon^n \geqslant 1 + n\varepsilon,$$

avem

$$(1+\varepsilon)^n \geqslant 1 + n\varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant 1, \text{ deci } (1+\varepsilon)^n \geqslant a,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant 1 + \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Dacă $0 < a < 1 \Leftrightarrow b := \frac{1}{a} \geqslant 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = 1$.

2.3.23. Exercițiu. *Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n + (-a)^n}{(a+b)^n} = 0$, $(\forall)$ $a, b > 0$.

Soluție. Avem $x_n = \frac{a^n + (-a)^n}{(a+b)^n} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n \text{ impar} \\ 2\left(\frac{a}{a+b}\right)^n, \text{ dacă } n \text{ par,} \end{cases}$

deci $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = 0$ și deci $\lim\limits_{k\to\infty} x_n = 0$.

2.3.24. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + a + a^2 + \ldots + a^n}{1 + b + b^2 + \ldots + b^n}$, *dacă* $|a|$ *și* $|b| < 1$ *sau* $|a|$ *și* $|b| > 1$.

Soluție. Plecînd de la relația evidentă:

$$\frac{1 + a + a^2 + \ldots + a^n}{1 + b + b^2 + \ldots + b^n} = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \cdot \frac{1 - b}{1 - b^{n+1}} =$$
$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} \cdot \frac{1 - (1/a)^{n+1}}{1 - (1/b)^{n+1}} \cdot \frac{1 - b}{1 - a},$$

Scanned with OKEN Scanner

deducem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+\ldots+a^n}{1+b+\ldots+b^n}=\begin{cases}\dfrac{1-b}{1-a}, & \text{dacă } |a|<1 \text{ și } |b|<1\\ 0 \quad ,, \quad 1<|a|<|b|\\ \infty \quad ,, \quad 1<|b|<|a|,\ ab>0\end{cases}$$

Șirul dat nu are limită dacă $|a|>1$, $|b|>1$ și $ab<0$.

2.3.25. Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir convergent de numere nenegative care are limita x. Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{x}$.

Soluție. 1° Presupunem $x=0$ și fie $\varepsilon>0$ fixat. Atunci există $n_\varepsilon\geq 1$ a.î. $x_n\leq\varepsilon^2$, $(\forall)\ n\geq n_\varepsilon$, deci $0\leq\sqrt{x_n}\leq\varepsilon$, $(\forall)\ n\geq n_\varepsilon$ și deci $\sqrt{x_n}\to 0$.

2° Presupunem $x>0$ și fie $\varepsilon>0$ fixat. Atunci există $n_\varepsilon\geq 1$ a.î. $|x_n-x|\leq\varepsilon\sqrt{x}$, $(\forall)$ $(n>n_\varepsilon$, deci

$$|\sqrt{x_n}-\sqrt{x}|=\frac{|x_n-x|}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x}}\leq\frac{1}{\sqrt{x}}|x_n-x|\leq\varepsilon\ (\forall)\ n\geq n_\varepsilon \text{ etc.}$$

2.3.26. Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir convergent de numere reale care are limita x. Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{x_n}=\sqrt[3]{x}$.

Soluție. 1° Dacă $x=0$ raționăm ca în Ex. 2.3.25.

2° Presupunem $x>0$ și fie $\varepsilon>0$ fixat. Atunci există $n_1\geq 1$ a.î. $|x_n-x|\leq\varepsilon\sqrt[3]{x^2}$, $(\forall)$ $n\geq n_1$. Cum $x>0$ există $n_2\geq 1$. a.î. $x_n\geq 0$,, $(\forall)$ $n\geq n_2$.

Prin urmare $(\forall)$ $n\geq\max\{n_1, n_2\}$ avem :

$$|\sqrt[3]{x_n}-\sqrt[3]{x}|=\frac{|x_n-x|}{\sqrt[3]{x_n^2}+\sqrt[3]{xx_n}+\sqrt[3]{x^2}}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}|x_n-x|\leq\varepsilon,$$

deci $\sqrt[3]{x_n}\to\sqrt[3]{x}$.

3° Dacă $x<0$ raționăm ca în 2° punînd $x_n\leq 0$, $(\forall)$ $n\geq n_2$ și ținînd cont că $\sqrt[3]{x_n^2}+\sqrt[3]{xx_n}+\sqrt[3]{x^2}\geq\sqrt[3]{x^2}$ $(\forall)$, $n\geq n_2$

2.3.27. Exercițiu. *Să se calculeze limita șirului $(x_n)_{n\geq 1}$, unde*

$$x_n:=\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2),\ (\forall)\ n\geq 1.$$

Soluție. Deoarece $k(k+1)(k+2)=k^3+3k^2+2k$, $(\forall)$ $k\geq 1$ rezultă că

$$x_n=\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)=\frac{1}{n^4}\left(\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k\right)=$$

$$=\frac{1}{n^4}\left[\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\frac{n(n+1)}{2}\right],\ (\forall)\ n\geq 1$$

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{4}$

Scanned with OKEN Scanner

Generalizarea I. *Să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\left[p!+\frac{(p+1)!}{1!}+\ldots+\frac{(p+n)!}{n!}\right]=\frac{1}{p+1},\ (\forall)\ p\in\mathbf{N}$$

Ind. Se arată mai întîi prin inducție relația

$$p!+\frac{(p+1)!}{1!}+\ldots+\frac{(p+n)!}{n!}=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p+1)}{p+1}$$

Generalizarea II. *Să se calculeze limita șirului* $(x_n)_{n\geq 1}$, *unde*

$$x_n=\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}[k(k+1)(k+2)\cdot a]_*\ (a\in\mathbf{R})$$

Ind. $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$ și $k\in\mathbf{N}$, avem :

$$k(k+1)(k+2)a-1\leqslant[k(k+1)(k+2)a]_*<k(k+1)(k+2)a$$

Sumăm de la 1 la n, împărțim cu n^4 și trecem la limită ; obținem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{a}{4}$.

2.3.28. Exercițiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un șir de numere. Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, *atunci* $|x|\leqslant\sup\limits_{n\geq 1}|x_n|$.

Soluție. Să presupunem că $|x|>l=\sup\limits_{n\geq 1}|x_n|$ și fie V o vecinătate a lui $|x|$ care nu conține pe l. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, avem

$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|x|$, deci există $n_V\geqslant 1$ a.î. $x_n\in V$, $(\forall)\ n\geqslant n_V$ și deci $x_n>l$, $(\forall)\ n\geqslant n_V$. Cum evident $x_n\leqslant l$, $(\forall)\ n\geqslant 1$, am obținut o contradicție.

Prin urmare $|x|\leqslant\sup\limits_{n\geq 1}|x_n|$

2.3.29. Exercițiu *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un șir din* $\mathbf{R}$ *care are limită. Atunci* $\inf\limits_{n\geq 1}x_n$ *sau* $\sup\limits_{n\geq 1}x_n$ *coincide cu un termen al șirului dat.*

Soluție. 1) Presupunem $(x_n)_{n\geq 1}$ neconstant convergent și fie $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Atunci există $\varepsilon>0$ și $N\geqslant 1$ a.î. $\max\limits_{1\leq i\leq N}|x-x_i|>\varepsilon$ și $|x-x_n|\leqslant\varepsilon$, $(\forall)\ n>N$. Evident $\inf\limits_{n\geq 1}x_n$ sau $\sup\limits_{n\geq 1}x_n$ aparțin mulțimii $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$.

2) Fie $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ și $c>x_1$ fixat. Atunci există $N\geqslant 1$ a.î. $x_n\geqslant c$, $(\forall)$ $n\geqslant N$, deci $\inf\limits_{n\geq 1}x_n$ aparține mulțimii $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$.

2.3.30. Exercițiu. *Un șir monoton* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent (resp. are limita* $\pm\infty$*)* $\Leftrightarrow$ $(x_n)_{n\geq 1}$ *posedă un subșir* $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ *convergent (resp. care are limita* $\pm\infty$*). In acest caz* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$

Soluție. Implicația $(\Rightarrow)$ este evidentă.

$(\Leftarrow)$ Presupunem $(x_n)_{n\geq 1}$ monoton crescător și fie $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ un subșir al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$. Evident avem $x=\sup\limits_{k\geq 1}x_{n_k}=\sup\limits_{n\geq 1}x_n$. Dacă $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ este convergent (resp. are limita $+\infty$), atunci $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}\in\mathbf{R}$ (resp. $=+\infty$), deci (T.2.3.21.(2°)) $x\in\mathbf{R}$ (resp. $x=+\infty$) și deci (T.2.3.21.(2°)) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sup\limits_{n\geq 1}x_n=x\in\mathbf{R}$ (resp. $=+\infty$), adică $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent (resp. are limita $+\infty$).

Scanned with OKEN Scanner

2.3.31. Exercițiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un șir monoton crescător (resp. descrescător) Atunci* $(x_n)_{n\geq 1}$ *are limita* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*)* $\Leftrightarrow$ $(x_n)_{n\geq 1}$ *nu admite majoranți (resp. minoranți).*

Soluție. Să presupunem că $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător. Dacă $x_n \to \infty$, atunci $(\forall)\ c > 0$, există $n_0 \geq 1$ a.î. $x_n \geq c$, $(\forall)\ n \geq n_0$, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ nu admite majoranți.

Reciproc dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ nu admite majoranți, atunci $(\forall)\ c > 0$ există $n_0 \geq 1$ a.î. $x_{n_0} > c$. Atunci $x_n \geq x_{n_0} > c$ $(\forall)\ n \geq n_0$, deci $x_n \to \infty$.

Corolar 1. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un șir de numere definit astfel* $x_0 = a \neq 0$, $x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}$, $(\forall)\ n \geq 1$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$.

Soluție. Dacă $a > 0$ rezultă imediat că $x_n > x_{n-1} > a$, $(\forall)\ n \geq 1$ deci $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ există, finită $\geq a$ sau $+\infty$. Dacă am avea $x \in \mathbf{R}$ atunci prin tecere la limită în egalitatea $x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}$ am obține egalitatea absurdă $x = x + \dfrac{1}{x}$, deci $x = +\infty$.

Dacă $a < 0$, analog se arată că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

2.3.32. Exercițiu. *Un șir* $(a_n)_{n\geq 1}$ *de numere întregi este convergent* $\Leftrightarrow$ $(a_n)_{n\geq 1}$ *este staționar.*

Soluție. ($\Rightarrow$) Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ și $0 < \varepsilon < 1/2$ fixat. Atunci există $n_\varepsilon \geq 1$ a.î. $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$. Evident $a_n = a_{n_\varepsilon}$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$, deci $(a_n)_{n\geq 1}$ este staționar.

2.3.33. Exercițiu. *Să se calculeze limita șirului* $(x_n)_{n\geq 1}$, *unde* :

$$x_n = \frac{1}{n}\left[\left(a + \frac{1}{n}\right)^p + \left(a + \frac{2}{n}\right)^p + \ldots + \left(a + \frac{n+k}{n}\right)^p\right],\quad a \in \mathbf{R},\ p,\ k \in \mathbf{N}.$$

Soluție. Folosind formula binomului lui Newton, avem :

$$nx_n = \left[a^p + C_p^1 a^{p-1}\frac{1}{n} + C_p^2 a^{p-2}\frac{1}{n^2} + \ldots + C_p^p \frac{1}{n^p}\right] +$$

$$+ \left[a^p + C_p^1 a^{p-1}\frac{2}{n} + C_p^2 a^{p-2}\frac{2^2}{n^2} + \ldots + C_p^p \frac{2^p}{np}\right] +$$

$$\vdots$$

$$+ \left[a^p + C_p^1 a^{p-1}\frac{n+k}{n} + C_p^2 a^{p-2}\frac{(n+k)^2}{n^2} + \ldots + C_p^p \frac{(n+k)^p}{n^p}\right] =$$

$$= (n+k)\,a^p + C_p^1 a^{p-1}\frac{1 + 2 \ldots + (n+k)}{n} + C_p^2 a^{p-2}\frac{(1^2 + 2^2 + \ldots + (n+k)^2}{n^2} +$$

$$+ \ldots + C_p^p \frac{1^p + 2^p + \ldots + (n+k)^p}{n^p}$$

deci

$$x_n = \frac{n+k}{n}\,a^p + C_p^1 a^{p-1}\,\frac{(n+k)^2}{n^2}\cdot\frac{(1+2+\ldots(n+k)}{(n+k)^2} +$$

$$+ C_p^2 a^{p-2}\cdot\frac{(n+k)^3}{n^3}\cdot\frac{1^2+2^2+\ldots+(n+k)^2}{(n+k)^3} + \ldots +$$

$$+ C_p^p\cdot\frac{(n+k)^{p+1}}{n^{p+1}}\cdot\frac{1^p+2^p+\ldots+(n+k)^p}{(n+k)^{p+1}}$$

Ținînd seama că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+(n+k)^\alpha}{(n+k)^{\alpha+1}} = \frac{1}{1+\alpha}\ (\forall)\ \alpha>0),$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a^p + \frac{1}{2}C_p^1 a^{p-1} + \frac{1}{3}C_p^2 a^{p-2} + \ldots + \frac{1}{p+1}C_p^p.$$

2.7.22. Exercițiu. *Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin^p\frac{\pi}{n+k} = 0,\ (\forall)\ p>1.$

Soluție. Fie $x_n := \sum\limits_{k=1}^{n}\sin^p\frac{\pi}{n+k}$ cu $p>1$ fixat. Atunci:

$$0 < x_n < n\sin^p\frac{\pi}{n+1} = \frac{n\pi^p}{(n+1)^p}\left(\frac{\sin\pi/n+1}{\pi/n+1}\right)^p \to 0.1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

2.7.23. Exercițiu. *Să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{1+n^p}}+\frac{1}{\sqrt[p]{2+n^p}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[p]{n+n^p}}\right)=1,\ (\forall)\ p>1.$$

Soluție. Evident $(\forall)\ n\geqslant 1$ și $(\forall)\ p>1$, avem inegalitatea:

$$\sqrt[p]{1+n^p} < \sqrt[p]{2+n^p} < \ldots < \sqrt[p]{n+n^p},$$

deci

$$\frac{1}{\sqrt[p]{1+n^p}} > \frac{1}{\sqrt[p]{2+n^p}} > \ldots > \frac{1}{\sqrt[p]{n+n^p}}$$

și deci

$$\frac{n}{\sqrt[p]{n+n^p}} < \frac{1}{\sqrt[p]{1+n^p}}+\frac{1}{\sqrt[p]{2+n^p}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[p]{n+n^p}} <$$

$$< \frac{n}{\sqrt[p]{1+n^p}}\ (\forall)\ n\geqslant 1$$

Trecem mai departe la limită cu n către ∞ şi ţinem cont că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[p]{n+n^p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[p]{1+n^p}} = 1$$

2.3.36. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$.

Soluţia 1. Fie $s_n := \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$ $(n \geqslant 1)$. Atunci

$$s_{n+1} = \frac{n+2}{2^{n+2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} + \frac{n+2}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} (s_n + 1)$$

deci

$$s_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} (s_n + 1), \ (\forall)\ n \geqslant 1 \tag{1}$$

şi deci

$$s_{n+1} - s_n = \frac{n(n+2)(s_n+1) - (n+1)^2 (s_{n-1}+1)}{2n(n+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)^2 (s_n - s_{n-1}) - s_n - 1}{2n(n+1)} \tag{2}$$

Cum $s_n > 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ şi $s_5 - s_4 = \frac{8}{5} - \frac{5}{3} < 0$, prin inducţie din (2) rezultă că $(s_n)_{n\geqslant 4}$ este monoton descrescător, deci $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ există şi avem $1 \leqslant s \leqslant s_4 = \frac{5}{3}$. Din (1), prin trecere la limită, obţinem $s = \frac{1}{2}(s+1)$, prin urmare $s = 1$.

Soluţia 2. Se calculează $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$ se înmulţeşte cu $\frac{n+1}{2^{n+1}}$, după care se trece la limită cu n către ∞.

2.3.37. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim_{n\to\infty} \frac{1^1 + 2^2 + \ldots + n^n}{(n!)^2}$

Soluţie. Evident $x_n = \frac{1^1 + 2^2 + \ldots + n^n}{(n!)^2} < \frac{n \cdot n^n}{(n!)^2} = y_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Cum avem :

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{(n+1)^{n+2}}{((n+1)!)^2} : \frac{n^{n+1}}{(n!)^2} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{n}\, e < 1, \ (\forall)\ n \geqslant 3,$$

rezultă că $(y_n)_{n\geqslant 3}$ este monoton descrescător şi deci $(\exists)\ y = \lim_{n\to\infty} y_n$ şi $y \in \mathbb{R}$. Trecînd la limită în relaţia $y_{n+1} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n y_n$, obţinem $y = 0 \cdot e \cdot y$, deci $y = 0$ şi cum $0 < x_n < y_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deducem că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

2.3.38. Exercițiu. *Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_n^1 C_n^2 \dots C_n^n} = \infty$.

Soluția 1. Fie $p_n := C_n^1 C_n^2 \dots C_n^n$ $(n \geqslant 1)$. Evident avem:

$$p_n = \frac{n}{1}\,\frac{n(n-1)}{1.2} \dots \frac{n(n-1)\dots 2.1}{1.2\dots n} =$$

$$= \left(\frac{n}{1}\right)^n \cdot \left(\frac{(n-1)}{2}\right)^{n-1} \dots \left(\frac{1}{n}\right)^1 \quad (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Grupînd primul termen cu ultimul, al doilea cu penultimul etc. obținem:

$$p_n = \left(\frac{n}{1}\right)^{n-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-3} \dots$$

Cum termenii produsului p_n sînt $\geqslant 1$, rezultă că $p_n \geqslant \left(\frac{n}{1}\right)^{n-1}$, deci

$$\sqrt[n]{p_n} \geqslant n^{1-\frac{1}{n}},\ (\forall)\ n \geqslant 1 \text{ și deci } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p_n} = \infty.$$

Soluția 2. Evident $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_{n+1}^1 \cdot C_{n+1}^2 \dots C_{n+1}^{n+1}}{C_n^1 \cdot C_n^2 \dots C_n^n} = \infty$, deci

(T.2.3.25. Cor. 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_n^1 \cdot C_n^2 \dots C_n^n} = \infty$.

2.3.39. Exercițiu. *Să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)} = 0,\ (\forall)\ a > 0$$

Soluție. Fie $x_n := \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$ $(n \geqslant 1.$

Evident avem $0 < x_n < a^n$, dacă $o < a < 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Deoarece $0 < x_n < \dfrac{a^n}{a \cdot a^2 \dots a^n} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}n(n-1)}}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{2}n(n-1)} = \infty$, pentru $a > 1$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, pentru $a > 1$.

Dacă $a = 1$, atunci $x_n = \dfrac{1}{2^n}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Cum $x_n/x_{n+1} > 1$, avem că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este strict descrescător.

2.3.40. Exercițiu. *Să se calculeze limita șirului* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *definit astfel* $x_n = 1 + \sin(x_{n-1} - 1)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, *cu* $x_0 = 0$.

Soluție. Cum $x_n - 1 = \sin(x_{n-1} - 1)$ $(\forall)\ n \geqslant 1$, dacă notăm $x_n - 1$ cu a_n, atunci $a_n = \sin a_{n-1}$ $(\forall)\ n \geqslant 1$ (1). Deoarece $a_0 = -1$, deducem imediat că $a_n < 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ și că $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton crescător, deci (T.2.3.21. (2°)) $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ există. Din (1) rezultă că $a = \sin a$, deci $a = 0$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

2.3.41. Exerciţiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale definit astfel :*

$x_n = \dfrac{x_{n-1}}{\sqrt{1+x_{n-1}^2}}$, $(\forall)\ n \geq 1$, *unde* $x_0 \in \mathbf{R}$ *este fixat. Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Soluţie. Notăm x_0 cu a şi arătăm că $x_n = \dfrac{a}{\sqrt{1+na^2}}$ $(\forall)\ n \geq 1$ (1)

Pentru $n = 1$ relaţia (1) este evidentă. Fie $n \geq 1$ un element pentru care (1) este adevărat. Atunci :

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{1+x_n^2}} = \frac{a}{\sqrt{1+na^2}} : \sqrt{1+\frac{a^2}{1+na^2}} = \frac{a}{\sqrt{1+(n+1)a^2}}$$

Conform principiului inducţiei (1) este adevărată pentru $(\forall)\ n \geq 1$.

Prin trecere la limită din (1) deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2.3.42. Exerciţiu. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(c_n)_{n\geq 1}$ *trei şiruri de numere definite astfel :*

$$a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1}+c_{n-1}),\quad b_n = \frac{1}{2}(c_{n-1}+a_{n-1}),\quad c_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1})\ (\forall)\ n \geq 1,$$

unde $a_0, b_0, c_0 \in \mathbf{R}$ *sînt fixaţi. Atunci cele trei şiruri sînt convergente şi au aceeaşi limită, egală cu* $\dfrac{1}{3}(a_0+b_0+c_0)$.

Soluţie. Fie $s = a_0 + b_0 + c_0$. Evident $a_n + b_n + c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$, $(\forall)\ n \geq 1$ deci $a_n + b_n + c_n = s$ $(\forall)\ n \geq 1$. Atunci din relaţiile $2a_n = b_{n-1} + c_{n-1}$ şi $a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = s$, rezultă că $2a_n + a_{n-1} = s$, de unde deducem imediat :

$$2a_n = (2a_n + a_{n-1})\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + (2a_{n-1} + a_{n-2})\left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \ldots +$$

$$+ (2a_1 + a_0)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + a_0\left(-\frac{1}{2}\right)^n =$$

$$= s\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] + a_0\left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{s}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{a_0}{2} \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{s}{3}$$

Analog obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \dfrac{s}{3}$.

2.3.43. Exerciţiu. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de numere definite astfel :*

$a_{n+1} = a_n\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$ *şi* $b_{n+1} = b_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $(\forall)\ n \geq 1$, *unde* $a_1, b_1 \in \mathbf{R}_+^*$ *sînt fixaţi. Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Evident avem :

$$a_{n+1} = a_1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2n}\right),$$

$$b_{n+1} = b_1 \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = (n+1)\, b_1,$$

deci

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + \frac{1}{2k}}{1 + \frac{1}{k}} = \frac{a_1}{b_1} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k+2}.$$

Dacă $b_1 > 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2}\, b_1 = \infty$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \text{ (T.2.3.25. Cor. 5)}$$

2.3.44. Exercițiu *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale definit astfel : $x_0 = 1$ și $x_{n+1} = \sqrt{a x_{n-1}}$, $(\forall)$ $n \geq 1$, unde $a > 0$ este fixat. Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Soluție. Să arătăm că $x_n = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \dots a^{\frac{1}{2^n}}$, $(\forall)$ $n \geq 1$ (1).
Pentru $n = 1$ relația (1) este evidentă. Fie $n \geq 1$ pentru care (1) este adevărată. Atunci

$$x_{n+1} = \sqrt{a x_n} = \sqrt{a}\sqrt{x_n} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \dots a^{\frac{k}{2^{n+1}}}$$

Conform principiului inducției (1) este adevărată $(\forall)$ $n \geq 1$.

Să punem $y_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$, $(\forall)$ $n \geq 1$. Atunci $x_n = a^{y_n}$ și

cum $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a^1 = a$.

Să observăm în fine că pentru $a > 1$, avem

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{y_{n+1}}}{a^{y_n}} = a^{y_{n+1} - y_n} = a^{1/(2n+1)} > a^0 = 1,$$

deci $x_{n+1} > x_n$, $(\forall)$ $n \geq 1$, în timp ce pentru $0 < a < 1$, avem $a^{\frac{1}{2n+1}} < a^0 = 1$, deci $x_{n+1} < x_n$, $(\forall)$ $n \geq 1$.

2.3.45 Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere cu proprietatea că subșirurile sale $(x_{2n})_{n\geq 1}$, $(x_{2n+1})_{n\geq 1}$ și $(x_{3n})_{n\geq 1}$ au limită. Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ are limită.*

Soluție. Să presupunem că

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = a, \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = b \text{ și } \lim_{n\to\infty} x_{3n} = c$$

Deoarece $(x_{6n})_{n\geq 1}$ este un subșir al șirurilor $(x_{2n})_{n\geq 1}$ și $(x_{3n})_{n\geq 1}$, în virtutea unicității limitei, rezultă că $a = c$.

De asemenea $(x_{3(2n+1)})_{n\geq 1}$ este un subșir al șirurilor $(x_{2n+1})_{n\geq 1}$ și $(x_{3n})_{n\geq 1}$, deci $b = c$ și deci $a = b$.

De aici deducem evident că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Scanned with OKEN Scanner

2.3.46. Exercițiu. *Dacă* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este un șir convergent, atunci avem* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$. *Reciproca nu este numaidecît adevărată.*

Soluție. Fie $x:=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ și $\varepsilon>0$ fixat. Atunci există $n_\varepsilon\geq 1$ a.î. $|x_n-x|\leq \frac{\varepsilon}{2}$, $(\forall)\ n\geq n_\varepsilon$. De aici rezultă

$$|x_{n+1}-x_n|\leq |x_{n+1}-x|+|x-x_n|\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\ (\forall)\ n\geq n_\varepsilon,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$.

Pentru partea a doua să construim un contraexemplu.

Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ construit astfel:

$$0,\underbrace{\frac{1}{2},\frac{2}{2}},\underbrace{\frac{3}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}},\ 0,\underbrace{\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4}},\underbrace{\frac{5}{5},\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}},0,\ldots$$

Evident $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$ și $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este convergent.

Observație. Există șiruri $(x_n)_{n\geq 1}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

2.3.47. Exercițiu. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un șir convergent la* 0 *și* $(b_n)_{n\geq 1}$ *un șir mărginit. Atunci șirul* $(x_n)_{n\geq 1}$, *unde* $x_n=\frac{1}{n}(a_1b_n+\ldots+a_nb_1)$, $(\forall)\ n\geq 1$, *este convergent la* 0.

Soluție. Cum $a_n\to 0$, avem $|a_n|\to 0$, deci (T.2.3.25. Cor. 1). $\frac{1}{n}(|a_1|+\ldots+\ldots+|a_n|)\to 0$. Însă $(b_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, deci există $M>0$ a.î. $|b_n|\leq M$, $(\forall)\ n\geq 1$. Prin urmare

$$|x_n|\leq \frac{1}{n}(|a_1|\,|(b_n|+\ldots|a_n|\,|b_1|)\leq \frac{M}{n}(|a_1|+\ldots+|a_n|)\to 0,\text{ deci } x_n\to 0.$$

Observație. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ *și* $(b_n)_{n\geq 1}$ două șiruri convergente la o și $x_n=a_1b_n+\ldots+\ldots+a_nb_1$, $(\forall)n\geq 1$. Atunci nu rezultă numaidecît că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ converge la 0.

Contraexemplu: $a_n=b_n=\frac{1}{n^\alpha}$; $(\forall)\ n\geq 1\ \ 0<\alpha<\frac{1}{2}$.

2.3.48. Exercițiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un șir de numere nenegative cu proprietatea că* $x_{n+1}\leq \frac{1}{n^2}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$, $(\forall)\ n\geq 1$. *Atunci șirul* $(\bar{x}_n)_{n\geq 1}$, *cu* $\bar{x}_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$, *este monoton și are limita* 0.

Soluție. Evident, pentru $(\forall)\ n>1$, avem:

$$\bar{x}_{n+1}=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n+1}+\frac{x_{n+1}}{n+1}\leq \frac{x_1+\ldots+x_n}{n+1}+\frac{x_1+\ldots+x_n}{n^2(n+1)}=$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n^2(n+1)}\right)(x_1+x_2+\ldots+\bar{x}_n)\leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\bar{x}_n,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$0 \leqslant x_n \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{(n-1)^2} = \frac{1}{n-1}\tilde{x}_{n-1} < \frac{\tilde{x}_1}{n-1} = \frac{x_1}{n-1}$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad \text{încît} \quad \lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = 0.$$

2.3.49. Exercițiu. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir definit astfel:* $x_1 = x_2 = 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{3}(a + x_n + x_{n-1}^2)$, $(\forall)$ $n > 1$ *cu* $0 \leqslant a \leqslant 1$ *fixat. Să se arate că* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este convergent, apoi să se calculeze limita sa.*

Ind. $x_3 = \frac{1}{3}\, a > x_2 = 0$. Dacă $x_k > x_{k-1}$, $(\forall)$ $2 \leqslant k \leqslant n$, atunci

$x_{n+1} > \frac{1}{3}(a + x_{n-1} + x_{n-2}^2) = x_n$, deci șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este strict crescător.

Evident $x_3 < 1$. Dacă $x_k < 1$, $(\forall)$ $1 \leqslant k \leqslant n$, atunci

$x_{n+1} < \frac{1}{3}(a + 1 + 1) < 1$, deci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este majorat.

Notînd $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ și trecînd la limită în relația de recurență, obținem

$$x = \frac{1}{3}(a + x + x^2) \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{1-a}.$$

2.3.50. Exercițiu. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de numere cu proprietatea:* $(\forall)$ $n \geqslant 1$, $(\exists)$ k *natural,* $\frac{n}{2} \leqslant k < n$ *a.î.* $x_n = \frac{x_k}{2}$. *Să se arate că* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Soluție. Să arătăm că $|x_n| \leqslant \frac{|x_1|}{n}$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$ (1)

Evident avem $x_2 = \frac{x_1}{2}$ deci $|x_2| \leqslant \frac{|x_1|}{2}$.

Presupunem că $|x_i| \leqslant \frac{|x_1|}{i}$, $(\forall)$ $1 \leqslant i \leqslant k$. Cum $x_{k+1} = \frac{x_i}{2}$ pentru un anumit i, $\frac{k+1}{2} \leqslant i < k+1$, rezultă că $|x_{k+1}| = \frac{|x_i|}{2} \leqslant \frac{|x_1|}{2i} \leqslant \frac{|x_1|}{k+1}$.

Aplicînd principiul inducției, (1) este arătat.

Din (1) deducem că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

2.3.51. Exercițiu. *Fie* $f : [0,1] \to [0,1]$ *o funcție definită astfel* $f(x) = \frac{1}{2}\{x\}$. *Atunci* $\lim_{n\to\infty} \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n \text{ ori}}(x) = 0$, $(\forall)$ $x \in [0,1]$.

Soluție. Avem $\{x\} = x$, dacă $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ și $\{x\} = 1 - x$, dacă $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Să arătăm că $\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n \text{ ori}}(x) = \frac{1}{2^n}\{x\}$, $(\forall)$ $x \in [0,1]$ și $n \in \mathbf{N}$ (1)

Evident avem $\{x\} = x$, $(\forall)$ $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ și $0 \leqslant \{x\} \leqslant \frac{1}{2}$, $(\forall)$, $x \in [0,1]$.

$$f(f(x)) = f\left(\frac{1}{2}\{x\}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\{x\}\right\} = \frac{1}{4}\{x\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă pentru un $n \geqslant 2$ avem $\underbrace{(f\circ f\circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}})(x) = \frac{1}{2^n}\{x\}$, atunci

$$\underbrace{(f\circ f\circ \ldots \circ f}_{n+1 \text{ ori}})(x) = f\left(\frac{1}{2^n}\{x\}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^n}\{x\} = \frac{1}{2^{n+1}}\{x\}.$$

Cf. principiului inducției, relația (1) este arătată.

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{(f\circ f\circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}})(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\{x\} = 0$

2.3.52. Exercițiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to A$ o funcție cu proprietatea că $f\circ f = 1_A$. Să se determine mulțimea punctelor x din A pentru care șirul $a_n(x) = \underbrace{(f\circ f\circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}})(x)$, $(\forall)n \geqslant 1$, este convergent.*

Soluție. Să arătăm că $a_{n+2}(x) = a_n(x)$, $(\forall)x \in A$ și $n \geqslant 1$.

Într-adevăr, $(\forall)\, x \in A$ și $n \geqslant 1$, avem :

$$a_{n+2}(x) = f(a_{n+1}(x)) = (f\circ f)(a_n(x)) = a_n(x)$$

Atunci șirul $(a_n(x))_{n\geqslant 1}$ este convergent $\Leftrightarrow a_1(x) = a_2(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow$ x este punct fix pentru f.

Exemple. 1° $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$. Atunci $f(x) = x \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$.

2° $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$. Atunci $f(x) = x \Leftrightarrow x = 2$.

Observație. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime infinită. Atunci există cel puțin o funcție bijectivă $f : A \to A$ a.î. șirul $(a_n(x))_{n\geqslant 1}$, unde $a_n(x) = (f\circ f\circ \ldots \circ f)(x)$, $(\forall)\, n \geqslant 1$, nu este convergent pentru nici un x din A (v. [ ]).

2.3.53. Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir convergent care are limita x. Atunci șirul $((-1)^n x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent $\Leftrightarrow x = 0$.*

Soluție. ($\Rightarrow$). Fie $y_n := (-1)^n x_n$, $(\forall)\, n \geqslant 1$ și să presupunem că $(y_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent, fie y limita sa. Dacă $x \neq 0$, există $n_0 \geqslant 1$ a.î. $x_n \neq 0$ $(\forall)\, n \geqslant n_0$. Evident atunci șirul $(y_n/x_n)_{n\geqslant n_0}$ este bine definit și are limita y/x, ceea ce este absurd, deoarece $y_n/x_n = (-1)^n$, $(\forall)\, n \geqslant n_0$ și șirul $((-1)^n)_{n\geqslant n_0}$ nu are limită. Rămîne că $x = 0$.

($\Leftarrow$) Această implicație e evidentă, deoarece $|(-1)^n x_n| = |x_n|$, $(\forall)\, n \geqslant 1$, deci $x_n \to 0 \Leftrightarrow |x_n| \to 0 \Leftrightarrow |(-1)^n x_n| \to 0 \Leftrightarrow (-1)^n x_n \to 0$.

2.3.54. Exercițiu. *Să se calculeze limita șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$, unde*

$$x_n = \left[\frac{n!(n+2k)!}{(n+k)!}\right]^{n^\alpha},\ (\forall)\, n \geqslant 1 \text{ cu } \alpha \in \mathbf{R} \text{ și } k \in \mathbf{N} \text{ fixați.}$$

Soluție. Evident avem :

$$x_n = \left[\frac{\left(1+\frac{k+1}{n}\right)^n\left(1+\frac{k+2}{n}\right)^n \ldots \left(1+\frac{2k}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{2}{n}\right)^n \ldots \left(1+\frac{k}{n}\right)^n}\right]^{n^\alpha - 1}$$

Notînd paranteza $[\ldots]$ cu y_n, din P.2.4.2. deducem :

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{e^{k+1}\cdot e^{k+2} \ldots e^{2k}}{e^1\cdot e^2 \ldots e^k} = \underbrace{e^k\cdot e^k \ldots e^k} = e^{k^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha-1} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \alpha < 1 \\ 1 & ,, \quad \alpha = 1 \\ \infty & ,, \quad \alpha > 1 \end{cases}$ rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (y_n)^{n^{\alpha-1}} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \alpha < 1 \\ e^{k^2} & ,, \quad \alpha = 1 \\ \infty & ,, \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

2.3.53 Exercițiu. *Să se calculeze limita șirului* $(x_n)_{n\geq 1}$, *unde*

$$x_n = n - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+4k+1}{k^2+4k+3}, \quad (\forall)\ n \geq 1.$$

Soluție. Prin împărțire și descompunere în fracții simple, deducem:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{k^2+4k+1}{k^2+4k+3} = 1 - \frac{2}{k^2+4k+3} \\ &\frac{2}{k^2+4k+3} = \frac{2}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \end{aligned}\right\} (\forall)\ k \geq 1$$

Atunci avem:

$$x_n = n - \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n+3}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right),$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

2.3.55. Exercițiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un șir definit astfel:* $x_n = x_{n-1} - \frac{n}{(n+1)!}$, $(\forall)\ n \geq 1$, *unde* $x_0 > 1$ *fixat. Să se arate că* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este monoton și mărginit, apoi să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} (n!\ln x_n)$.

Soluție. Cum $x_n = x_{n-1} - \frac{n}{(n+1)!} < x_{n-1}$, rezultă că $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător. Evident avem $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$; $(\forall)\ n \geq 1$, deci

$$x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_1 - x_0) + x_0 =$$

$$= -\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + x_0 =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} - 1 + x_0, \ (\forall)\ n \geq 1$$

Așadar $0 < x_n < x_0$, $(\forall)\ n \geq 1$, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit și evident avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 - 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a calcula $\lim\limits_{n\to\infty} n!\ln x_n$, să plecăm de la egalitatea :

$$n!\ln x_n = n!\ln\left(x_0 - 1 + \frac{1}{(n+1)!}\right),\ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Dacă $1 < x_0 < 2$, atunci avem

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(x_0 - 1 + \frac{1}{(n+1)!}\right)\right] = \ln(x_0 - 1) < 0,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} n!\ln x_n = -\infty$.

Dacă $x_0 > 2$, atunci avem

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(x_0 - 1 + \frac{1}{(n+1)!}\right)\right] = \ln(x_0 - 1) > 0$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} n!\ln x_n = \infty$.

Dacă $x_0 = 2$, atunci avem

$$n!\ln x_n = n!\ln\left(1 + \frac{1}{(n+1)!}\right) = \frac{n!}{(n+1)!}\ln\left[1 + \frac{1}{(n+1)!}\right]^{(n+1)!},$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} n!\ln x_n = 0.\ \ln e = 0$.

2.3.57. Exerciţiu. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}$$

Soluţie. Plecînd de la identitatea (Ap.4.4.) :

$$x_n = \sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}},\quad (\forall)\ n \geqslant 1$$

deducem

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2}.$$

2.3.58 Exerciţiu. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty}\cos\theta\cdot\cos\frac{\theta}{2}\ldots\cos\frac{\theta}{2^n},\ \textit{unde}\ \theta \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Soluţie. Plecînd de la identitatea (Ap. 4.3.) :

$$x_n = \cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\ldots\cos\frac{\theta}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}},\ (\forall)\ \theta \neq k\pi$$

deducem :

$$x_n = \frac{\sin 2\theta}{2\theta}\cdot\frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin\frac{\theta}{2^n}},\ (\forall)\ n \geqslant 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\sin 2\theta}{2\theta} = \frac{1}{\theta}\sin\theta\cos\theta$$

2.3.59. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\theta$, *dacă* $\theta \in \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Dacă $\theta = m\pi, m \in \mathbf{Z}$, atunci $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = 0$, deci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Dacă $\theta \neq m\pi$, $(\forall)\, m \in \mathbf{Z}$, atunci (Ap. 4.1.) avem identitatea :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}},\ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

deci

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = 0.$$

2.3.60. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n}$ și $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{n}$

Soluție. Din Ap.4.1. deducem :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\sin\frac{(n+1)\pi}{2n};\quad \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot\cos\frac{(n+1)\pi}{2n},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\left(\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)\sin\frac{(n+1)\pi}{2n} = \frac{2}{\pi}$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\left(\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)\cos\frac{(n+1)\pi}{2n} = \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

2.3.61. Exercițiu. *Să se determine expresia termenului general al șirurilor definite recursiv astfel :*

1° $a_1 = 1$ *și* $a_{n+1} = a_n \cos x + \cos nx$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

2° $a_1 = 1$, $a_2 = 2\cos x$ *și* $a_{n+1} = 2a_n \cos x - a_{n-1}$, $(\forall)\ n \geqslant 2$.

Soluție. 1° Evident putem presupune că $x \in [0, 2\pi)$.

a) Dacă $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, avem $\sin x \neq 0$. Atunci :

$$a_2 = 1 \cdot \cos x + \cos x = 2\cos x = \frac{\sin 2x}{\sin x}$$

Fie $k \geqslant 2$ a.î. $a_k = \frac{\sin kx}{\sin x}$. În acest caz avem :

$$a_{k+1} = \frac{\sin kx}{\sin x}\cdot\cos x + \cos kx = \frac{\sin kx\cos x + \cos kx \sin x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin(k+1)x}{\sin x}.$$

Prin urmare cf. principiului inducției $a_n = \dfrac{\sin nx}{\sin x}$, $(\forall)\ n \geqslant 2$

b) Dacă $x = 0$, avem $a_{n+1} = a_n + 1$, deci $a_n = n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

c) Dacă $x = \pi$, avem $a_{n+1} = -a_n + (-1)^n$, $(\forall)\ n \geqslant 2$, deci $a_n = (-1)^{n+1} n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Să observăm în încheiere că șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ nu este convergent.

2° Se procedează ca în cazul 1°.

2.3.62. Exercițiu. *Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n!\,\pi x) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n!\,\pi x) = 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{Q}$.

Soluție. Prin ipoteză avem $x = \dfrac{p}{q}$ cu $p, q \in \mathbf{Z}$ și $q \neq 0$. Evident putem presupune $q > 0$. Deci $\dfrac{n!\,x}{2} = 1 \cdot 2 \ldots n \dfrac{p}{2q} \in \mathbf{Z}$ dacă $n \geqslant 2q$ și deci $n!\,\pi x$ este un multiplu întreg de 2π pentru $n \geqslant 2q$.

Prin urmare $\sin(n!\,\pi x) = 0$, $\cos(n!\,\pi x) = 1$ $(\forall)\ n \geqslant 2q$ deci

$$\lim_{n\to\infty} \sin(n!\,\pi x) = 0 \text{ și } \lim_{n\to\infty} \cos(n!\,\pi x) = 1.$$

2.3.63. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\pi \sqrt{n^{2k}+n^k-1}$ *pentru* $k \in \mathbf{Z}$ *fixat.*

Soluție. Evident avem $\sin^2(a + n\pi) = \sin^2 a$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R} \wedge n \in \mathbf{Z}$, deci

$$\sin^2\pi \sqrt{n^{2k} + n^k - 1} = \sin^2\pi(\sqrt{n^{2k} + n^k - 1} - n^k) =$$

$$= \sin^2\pi \frac{n^{2k} + n^k - 1 - n^{2k}}{\sqrt{n^{2k} + n^k - 1} + n^k}, \quad (\forall)\ n \geqslant 1$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2\pi \sqrt{n^{2k} + n^k - 1} = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1.$$

2.3.64. Exercițiu. *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de numere reale. Să se cerceteze legătura dintre convergența (resp. divergența) șirurilor :* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ $([a_n])_{n\geqslant 1}$ *și* $(a_n - [a_n])_{n\geqslant 1}$.

Soluție. (i) Șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$, cu $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, este convergent în timp ce șirurile $([a_n])_{n\geqslant 1}$ și $(a_n - [a_n])_{n\geqslant 1}$ sînt divergente.

Într-adevăr este suficient să observăm că

$$\left[\frac{(-1)^n}{n}\right] = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ -1, & n \text{ impar} \end{cases}, \quad \frac{(-1)^n}{n} - \left[\frac{(-1)^n}{n}\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n \text{ par} \\ -\dfrac{1}{n} + 1, & n \text{ impar} \end{cases}$$

(ii) Șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ cu $a_n = 1$ dacă n par și $a_n = \dfrac{3}{2}$, dacă n impar este divergent în timp ce șirul $([a_n])_{n\geqslant 1}$ este convergent, deoarece $[a_n] = 1$ $(\forall)\ n \geqslant 1$; deci $(a_n - [a_n])_{n\geqslant 1}$ este divergent.

Într-adevăr avem $[a_n] = 1$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

(iii) Sirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ cu $a_n = n + \frac{1}{n}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, este divergent, șirul $([a_n])_{n\geqslant 1}$ este divergent în timp ce șirul $(a_n - [a_n])_{n\geqslant 1}$ este convergent.

Într-adevăr $[a_n] = n$ și $a_n - [a_n] = \frac{1}{n}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Prin urmare nu există nici o legătură între convergența (resp. divergență) șirurilor considerate.

2.3.65. Exercițiu. *Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale cu proprietatea că a_1, a_2, a_3 sînt în progresie geometrică, a_2, a_3, a_4 sînt în progresie aritmetică, a_3, a_4, a_5 sînt în progresie geometrică ș.a.m.d. Să se găsească termenul general al șirului $(a_n)_{n\geqslant 1}$ cunoscîndu-se a_1 și a_2.*

Ind. 1° $a_1 = 0 \Rightarrow a_n = 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$

2° $a_1 \neq 0$; atunci deducem (prin inducție):

$$a_{2n} = \frac{(na_2 - (n-1)a_1)((n-1)a_2 - (n-2)a_1)}{a_1}.$$

și

$$a_{2n+1} = \frac{(na_2 - (n-1)a_1)^2}{a_1},\quad (\forall)\ n \geqslant 1$$

Se arată imediat relația:

$$a_{2n-1}\cdot a_{2n+1} = a_{2n}^2 \text{ și } a_{2n} + a_{2n+2} = 2a_{2n+1},\ (\forall)\ n \geqslant 1.$$

2.3.66. Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ și $(y_n)_{n\geqslant 1}$ două șiruri din $\mathbf{R}$. Dacă $\inf\limits_{n\geqslant 1} x_n > 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$.*

Ind. Fie $M = \inf\limits_{n\geqslant 1} x_n$ și $c \in \mathbf{R}_+$ fixat. Atunci există $n_c \geqslant 1$ a.î. $y_n \geqslant \frac{c}{M}$, $(\forall)\ n \geqslant n_c$, deci $x_n y_n \geqslant M\frac{c}{M} = c$, $(\forall)\ n \geqslant n_c$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$.

2.3.67. Exercițiu. *Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir convergent de numere reale care are limita a și $(b_n)_{n\geqslant 1}$ un șir definit astfel $b_n = b + (-1)^n \sin a_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, cu $b \in \mathbf{R}$ fixat. Pentru ce valori ale lui a șirul $(b_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent și care este în acest caz limita sa?*

Ind. Evident $b_{2n} \to b + \sin a$ și $b_{2n+1} \to b - \sin a$. Așadar $(b_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent $\Leftrightarrow \sin a = 0 \Leftrightarrow a = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

2.3.68. Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere și $\pi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ o funcție. Atunci:*

1° *Dacă π este bijectivă, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ există $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{\pi(n)}$ există. În acest caz cele două limite coincid.*

2° *Dacă π este injectivă, avem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ există $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{\pi(n)}$ există. Implicația reciprocă nu este numaidecît adevărată.*

3° *Dacă π este surjectivă și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ există, nu rezultă numaidecît că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\pi(n)}$ există.*

Ind. 1° ($\Rightarrow$) Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ și V o vecinătate a lui x. Atunci există $n_V \geqslant 1$, a.î. $x_V \in V$, $(\forall)\ n \geqslant n_V$. Evident însă există $n_0 \geqslant 1$ a.î. $\pi(n) \geqslant n_V$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$,

Scanned with OKEN Scanner

deci $x_{\pi(n)} \in V$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\pi(n)} = x$.

($\Leftarrow$) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\pi(n)} = x$, atunci cum $\pi^{-1}\circ\pi(n) = n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, avem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

2.3.69 Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir din* $\mathbf{R}$ *care verifică relația:*

$$x_n \leqslant \frac{x_{n-k} + x_k}{2},\ (\forall)\ n \geqslant 2 \text{ și } k = \overline{1, n-1} \tag{1}$$

Atunci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ are limită, finită sau $-\infty$.

Ind. Fie $\widetilde{x}_n := \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$, $(n \geqslant 1)$. Scriind (1) pentru $k = 1, 2, \ldots, n-1$ și adunînd obținem că

$$x_n \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} = \widetilde{x}_{n-1},$$

deci

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}$$

și deci $(\widetilde{x}_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton descrescător, încît $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n$ există, finită sau $-\infty$. Evident avem

$$x_{n+k} \leqslant \frac{x_n + x_k}{2} \Leftrightarrow x_n \geqslant 2x_{n+k} - x_n,\ (\forall)\ n, k \geqslant 1,$$

deci înlocuind k cu $1, 2, \ldots, n$ și adunînd obținem că

$$x_n \geqslant \frac{2(x_{n+1} + \ldots + x_{2n}) - (x_1 + \ldots + x_n)}{n} = 4\widetilde{x}_{2n} - 3\widetilde{x}_n$$

Prin urmare

$$4\widetilde{x}_{2n} - 3\widetilde{x}_n \leqslant x_n \leqslant \tilde{x}_{n-1},\ (\forall)\ n \geqslant 1 \text{ etc.}$$

2.3.70 Exercițiu. *Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$, cu $x_n = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, este strict descrescător, apoi să i se calculeze limita.*

Ind. $x_{n+1} = \frac{1}{2^{2n+2}} \cdot \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} < x_n$

$$0 < x_n = \frac{1.2.3\ldots 2n}{2^{2n}(1.2\ldots n)^2} = \frac{1.2.3\ldots 2n}{(2.4\ldots 2n)^2} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$$

2.3.71. Exercițiu. *Să se construiască un șir convergent (resp. divergent) $(x_n)_{n\geqslant 1}$ din* $\mathbf{R}$ *care satisface proprietățile:* $(x_{n+1} - x_n)(x_n - x_{n-1}) < 0$, $(\forall)\ n > 1$ *și* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$.

Ind. $x_n = x_{n-1} + \frac{(-1)^n}{2^n}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, cu $x_0 = 1$.

resp. $x_n = x_{n-1} + \begin{cases} 1/n - 1, & \text{dacă } n \text{ par} \\ -1/2n, & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, cu $x_0 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

2.3.72. Exercițiu. *Să se determine șirurile* $(x_n)_{n\geq 1}$ *de numere strict pozitive care au proprietatea :* $\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$, $(\forall)\ n \geq 1$.

Soluție. Egalitatea cunoscută $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$, $(\forall)\ n \geq 1$, ne sugerează că $x_n = n$, $(\forall)\ n \geq 1$.

Într-adevăr din $x_1^3 = x_1^2$ și $x_1 > 0$, rezultă că $x_1 = 1$.

Fie $n \geq 1$ cu proprietatea că $x_k = n$, $(\forall)\ k = \overline{1, n}$. Atunci

$$x_{n+1}^3 + \sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 + 2x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^3 + 2x_{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + x_{n+1}^2,$$

deci

$$x_{n+1}^3 - x_{n+1}^2 - n(n+1)\,x_{n+1} = 0.$$

Simplificăm cu x_{n+1} apoi deducem că $x_{n+1} = n+1$. Cf. principiului inducției rezultă $x_n = n$, $(\forall)\ n \geq 1$.

2.3.73. Exercițiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un șir strict crescător de numere întregi a.î.* $x_2 = 2$ *și* $x_{nm} = x_n x_m$, $(\forall)\ n, m \geq 0$. *Să se determine expresia lui* x_n *pentru* $(\forall)\ n \geq 0$.

Soluție. Să arătăm prin inducție relativ la n că $x_n = n$, $(\forall)\ n \geq 0$.

$$x_0 = x_{2\cdot 0} = x_2 \cdot x_0 = 2x_0 \Rightarrow x_0 = 0.$$

Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ fiind strict crescător, avem $0 = x_0 < x_1 < x_2 = 2$, deci cum $x_1 \in \mathbf{Z}$, rezultă că $x_1 = 1$.

Fie $n \geq 1$ a.î. $x_k = k$, $(\forall)\ k = \overline{1, n}$ și să arătăm că $x_{n+1} = n+1$.

1° Dacă $n = 2k+1$, atunci $2k < n < 2(k+1)$, deci

$$2k = x_{2k} < x_n < x_{2(k+1)} = x_2 \cdot x_{k+1} = 2(k+1)$$

și deoarece $x_n \in \mathbf{Z}$, rezultă că $x_n = 2k+1 = n$.

2° Dacă $n = 2k$, atunci $x_n = x_2 \cdot x_k = 2k = n$

Prin urmare $x_n = n$, $(\forall)\ n \geq 1$.

2.3.74. Exercițiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit recursiv astfel :* $x_1 \in \mathbf{R}$, $x_{n+1} = \frac{nx_n}{n+3}$, $(\forall)\ n \geq 1$ (1). *Să se determine expresia lui* x_n *în funcție de* x_1 *și* n.

Soluție (1) $\Leftrightarrow (n+3)\,x_{n+1} = nx_n$, $(\forall)\ n \geq 1$,

$$\left(\prod_{k=1}^{n}(k+3)\right)\cdot\prod_{k=1}^{n} x_{k+1} = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)\prod_{k=1}^{n} x_k,\ (\forall)\ n \geq 1$$

sau

$$\left(\prod_{k=4}^{n+3} k\right)\cdot\left(\prod_{k=2}^{n+1} x_k\right) = n!\ \prod_{k=1}^{n} x_k,\ (\forall)\ n \geq 1$$

și deci

$$(n+1)(n+2)(n+3)\,x_{n+1} = 1.2.3.x_1,$$

Scanned with OKEN Scanner

încît

$$x_{n+1} = \frac{6x_1}{(n+1)(n+a)(n+3)}, \quad (\forall)\, n \geqslant 1 \text{ etc.}$$

2.3.75. Exercițiu. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir definit astfel:*

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_n = -(x_{n-1} + 2x_{n-2}),\ (\forall)\, n \geqslant 3$$

Atunci $(\forall)\, n > 1$, *numărul* $2^{n+1} - 7x_{n-1}^2$ *este un* ***pătrat perfect.***

Soluție. Vom arăta prin inducție că

$$2^{n+1} - 7x_{n-1}^2 = (2x_n + x_{n-1})^2 \qquad (\forall)\, n \geqslant 2 \qquad (1)$$

Cum $x_2 = -1$, relația (1) se verifică direct pentru $n = 2$. Fie $n \geqslant 2$ fixat pentru care (2) este adevărată. Atunci avem:

$$2^{n+2} - 7x_n^2 = 2(7x_{n-1}^2 + (2x_n + x_{n-1})^2) - 7x_n^2 =$$

$$= 16x_{n-1}^2 + 8x_nx_{n-1} + x_n^2 = 16\left(-\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)^2 - 8x_n\frac{x_n + x_{n+1}}{2} + x_n^2 =$$

$$= 8x_n^2 + 8x_nx_{n+1} + 4x_{n+1}^2 - 4x_n^2 - 4x_nx_{n+1} + x_n^2 = (2x_{n+1} + x_n)^2$$

Cf. principiului de inducție (1) este arătat etc.

2.3.76 Exercițiu. *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *și* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *două șiruri de numere cu proprietatea că există* $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir din* $\mathbf{R}_+^*$ *convergent la* 0 *a.î.* $|a_n - b_n| \leqslant \varepsilon_n|b_n|$, $(\forall)\, n \geqslant 1$ (1). *Atunci* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *este convergent* $\Leftrightarrow$ $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *este convergent; în acest caz cele două limite coincid.*

Soluție ($\Rightarrow$) Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ convergent și $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Deoarece $\varepsilon_n \to 0$, putem presupune că $0 < \varepsilon_n < 1$, $(\forall)\, n \geqslant 1$. Cf. (1) pentru $(\forall)\, n \geqslant 1$ avem:

$$|b_n| \leqslant |b_n - a_n| + |a_n| \leqslant \varepsilon_n|b_n| + |a_n|,$$

deci $|b_n| \leqslant \dfrac{|a_n|}{1-\varepsilon_n}$ și deci $|a_n - b_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}|a_n|$, de unde rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n} a_n = 0 \cdot a = 0, \text{ adică } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

($\Leftarrow$) Dacă $(b_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent, el este mărginit, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n|b_n| = 0$ și deci cf. (1) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

2.3.77. Exercițiu. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de numere cu* ***proprietatea*** *că șirurile* $a_n = \dfrac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\cdot(n \geqslant 1)$ *și* $b_n = n(x_n - x_{n-1})$ $(n > 1)$ *sînt convergente; fie* a *respectiv* b *limita lor. Atunci* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este convergent și are limita* $a + b$.

Soluție. Evident avem:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} b_k = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=2}^{n} k(x_k - x_{k-1}) = x_n - \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n-1} x_k = x_n - \frac{n-1}{n}a_{n-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $b_n \to b$, avem (T. 2.3.25. Cor. 1) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k \to b$, deci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} a_{n-1} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} b_k = a + b$$

Observație. Dacă șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sau $(b_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent, nu rezultă numaidecît că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent.

Contraexemple. 1° $x_n := \ln(n+1) (n \geqslant 1)$. Atunci $x_n \to \infty$ și $n(x_n - x_{n-1}) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to 1$: 2° $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $(n \geqslant 1)$. Atunci $x_n \to \infty$ și $n(x_n - x_{n-1}) \to 1$.

2.3.78 Exercițiu. *Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir numeric cu proprietatea că șirul $x_n := a_{n+1} - a_n$, $n \geqslant 1$, este convergent; fie x limita sa. Atunci $(\forall)\, p, q \in \mathbf{N}$, avem :* $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_{n+q}) = x(p-q)$.

Generalizare. $x_n := n^\alpha(a_{n+p} - a_n)$, $n \geqslant 1$, $\alpha \in \mathbf{R}_+$ *fixat.*

Soluție. Fie $p, q \in \mathbf{N}$ fixați; presupunem $q < p$. Atunci

$$a_{n+p} - a_{n+q} = (a_{n+p} - a_{n+p-1}) + \ldots + (a_{n+q+1} - a_{n+q}),$$

de unde prin trecere la limită obținem :

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_{n+q}) = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{p-q} = x(p-q)$$

Raționament analog dacă $x_n := n^\alpha(a_{n+1} - a_n)$, $n \geqslant 1$.

Corolar 1.

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n+p]{a} - \sqrt[n+q]{a}\right) = (p-q)\ln a,\ a \in \mathbf{R}_+^*,\ p, q \in \mathbf{N}.$$

Soluție $n^2(a^{\frac{1}{n+1}} - a^{\frac{1}{n}}) = n^2 \cdot a^{\frac{1}{n}}(a^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1) =$

$$= \frac{n^2}{n^2+n} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}} \to 1 \cdot 1 \cdot \ln a \text{ etc.}$$

2.3.79 Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir strict crescător de numere pozitive a.î.* $\lim_{n\to\infty} n^p(x_{n+1} - x_n) = a > 0$, *cu* $p > 0$. *Atunci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este mărginit* $\Leftrightarrow p > 1$.

Soluție. Fie $0 < \varepsilon < a$ fixat. Atunci $(\exists)\, N \geqslant 1$ a.î.

$$(a-\varepsilon)\frac{1}{n^\alpha} \leqslant x_{n+1} - x_n \leqslant (a+\varepsilon)\frac{1}{n^\alpha},\ (\forall)\, n \geqslant N,$$

deci

$$(a-\varepsilon)\sum_{n=N}^{N+p}\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \sum_{n=N}^{N+p}(x_{n+p} - x_n) \leqslant (a+\varepsilon)\cdot\sum_{n+N}^{N+p}\frac{1}{n^\alpha},\ (\forall)\, p \geqslant 1$$

și deci

$$(a-\varepsilon)\sum_{n=N}^{N+p}\frac{1}{n^\alpha} \leqslant x_{N+p} - x_N \leqslant (a+\varepsilon)\cdot\sum_{n=N}^{N+p}\frac{1}{n^\alpha},\ (\forall)\, p \geqslant 1$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci avem

$$(x_n)_{n\geq 1} \text{ mărginit} \Leftrightarrow \sup_{n\geq N} x_n < \infty \Rightarrow \sum_{n\geq N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - \varepsilon}(\sup_{n\geq N} x_n - x_N) < +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p > 1 \text{ (T. 3.2.5. Cor. 1) etc.}$$

2.3.80 Exerciţiu. *Fie* $x_n = \left(\frac{1+\sin \pi/n}{1+\operatorname{tg} \pi/n}\right)^{n^3}$, $n \geq 1$. *Să se calculeze* $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Soluţie. Fie $a_n = \frac{1+\operatorname{tg} \pi/n}{\sin \pi/n - \operatorname{tg} \pi/n}$ $(n \geq 1)$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1; \quad x_n = \left[\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right]^{n^2/a_n}, \quad (\forall)\ n \geq 1$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{a_n} = \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{\sin \pi/n - \operatorname{tg} \pi/n}{1+\operatorname{tg} \pi/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \pi/n \cdot \dfrac{\cos \pi/n - 1}{\cos \pi/n} \cdot n^2}{\dfrac{\cos \pi/n + \sin \pi/n}{\cos \pi/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^3}{4} \frac{\sin \pi/n}{\pi/n} \cdot \frac{-2\sin^2 \pi/2n}{(\pi/2n)^2} = -\frac{\pi^3}{2},$$

rezultă că $\lim_{n\to\infty} x_n = e^{-\pi^3/2}$.

2.3.81. Exerciţiu. *Să se arate că şirul* $(\sin n)_{n\geq 1}$ *nu are limită.*

Soluţie. Evident $|\sin n| \leq 1$, $(\forall)\ n \geq 1$. Dacă $(\sin n)_{n\geq 1}$ ar avea limită, ar rezulta că este convergent. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} [\sin(n+1) - \sin(n-1)] = 0.$$

Deoarece $\sin(n+1) = \sin(n-1) = 2 \sin 1 \cdot \cos n$, avem că $\lim_{n\to\infty} \cos n = 0$ (1), deci

$$\lim_{n\to\infty} \sin 2n = \lim_{n\to\infty} 2 \sin n \cdot \cos n = 0. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) deducem

$$1 = \lim_{n\to\infty} (\sin^2 2n + \cos^2 2n) = \lim_{n\to\infty} \sin^2 2n + \lim_{n\to\infty} \cos^2 2n = 0,$$

absurd. Rămîne că $(\sin n)_{n\geq 1}$ nu are limită.

Corolar 1. *Fie* $P \in \mathbf{Z}[X]$ *un polinom. Atunci şirul* $(\sin P(n))_{n\geq 1}$ *este convergent* $\Leftrightarrow$ grad $P = 0$.

2.3.82. Exerciţiu. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri convergente cu elemente din* $\mathbf{R}$. *Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{n} = \lim_{n\to\infty} a_i \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ și $M := \sup\limits_{n\geqslant 1} |b_n|$. Atunci

$$\left|\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1}{n} - ab\right| =$$

$$= \left|\frac{(a_1 - a)b_n + (a_2 - a)\,b_{n-1} + \ldots + (a_n - a)b_1}{n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i=\overline{1,n}} |b_i| \cdot \frac{|a_1 - a| + \ldots + |a_n - a|}{n} \leqslant M \cdot \frac{|a_1 - a| + \ldots + |a_n - a|}{n}$$

Cum $a_n \to a \Rightarrow a_n - a \to 0 \Rightarrow \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i - a| \to 0$, deci

$$\left|\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1}{n} - ab\right| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

2.3.83. Exercițiu. *Să se stabilească relația :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = \operatorname{sign}(|x| - 1), \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Ind. Dacă $|x| < 1$, limita dată este -1 (P. 2.4.1.)

Dacă $|x| > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^{2n}} = 1.$

2.3.84. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{a^n + b^n}$, $(a, b \in \mathbf{R}_+^*)$.

Ind. $\frac{a^n}{a^n + b^n} = \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}$, $(\forall)\ n \geqslant 1.$

Limita dată este 0, dacă $a < b$; $\frac{1}{2}$, dacă $a = b$; 1, dacă $a > b$ (cf. P.2.4.1.).

2.3.85. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}$, $(0 \neq |a| \neq |b| \neq 0)$.

Ind. $\frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}} = \frac{1}{b} \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} + 1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}} = \frac{1}{a}\left(\text{resp. } \frac{1}{b}\right), \text{ dacă } |a| > (\text{resp. } < |b|).$$

2.3.86 Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}x^k$, *dacă* $|x|\leqslant 1$.

Ind. 1° Dacă $x=1$, limita dată este 1.

2° Dacă $x\neq 1$, avem $\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}x^k\right|=\left|\frac{1}{n}\cdot\frac{1-x^n}{1-x}\right|\leqslant\frac{2}{n(1-x)}\to 0$

2.3.87 Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}a^n\sin\frac{\pi}{a^n}$, $a\in\mathbf{R}$.

Soluție. 1° Dacă $|a|\leqslant 1$, atunci $|a|^n\to 0$ și cum $\left|a^n\sin\frac{\pi}{a^n}\right|\leqslant|a|^n$, $(\forall)\ n\geqslant 1$ rezultă că $a^n\sin\frac{\pi}{a^n}\to 0$.

2° Dacă $|a|>1$, atunci $|a|^n\to\infty$, deci

$$a^n\sin\frac{\pi}{a^n}=\pi\frac{\sin\frac{\pi}{|a|^n}}{\frac{\pi}{|a|^n}}\to\pi$$

3° Dacă $|a|=1$, atunci $a^n\sin\frac{\pi}{a^n}=0$, $(\forall)\ n\geqslant 1$ etc

2.3.88 Exercițiu.

$$\lim_{n\to\infty}n^p\sin a^n=0,\ (\forall)\ |a|<1\ \text{și}\ p>0.$$

Ind. $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin a^n}{a^n}=1$; $\lim\limits_{n\to\infty}a^nn^p=0$,

deci

$$\lim_{n\to\infty}n^p\sin a^n=\lim_{n\to\infty}(a^nn^p)\frac{\sin a^n}{a^n}=0.$$

2.3.89 Exercițiu. *Să se calculeze limita șirului* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *definit astfel*

$$x_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(a+n)(a+n+1)\dots(a+2n)},\ \text{cu}\ a\in\mathbf{R}_+\ \text{fixat.}$$

Ind. Fie $z_n:=\frac{1}{n^n}(a+n)(a+n+1)\dots(a+2n)(n\geqslant 1)$. Atunci

$$\frac{z_{n+1}}{z_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\frac{(a+2n+1)(a+2n+2)}{(n+1)(a+n)}\to 4e^{-1},$$

deci (T.2.3.25. Cor. 4):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{z_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{z_{n+1}}{z_n}=4e^{-1}.$$

2.3.90 Exercițiu. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\dots(a+\sqrt{n})},\ (a\geqslant\sqrt{2}-1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $a \geqslant \sqrt{2} - 1$, fixat. Atunci

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1 \leqslant a, \ (\forall)\, k \geqslant 1,$$

deci

$$\frac{1}{a + \sqrt{k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \ (\forall)\, k \geqslant 1$$

și deci

$$0 < \frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\ldots(a+\sqrt{n})} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

2.3.91. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}}$

Ind. $\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}, \ (\forall)\, k = \overline{1, n},$

deci

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}, \ (\forall)\, n \geqslant 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}} = 1.$$

2.3.92. Exercițiu. *Să se calculeze limitele:*

$1^\circ \lim\limits_{n\to\infty} n\,(n^{\frac{1}{n}} - 1)$; $2^\circ \lim\limits_{n\to\infty} n^p\,(n^{\frac{1}{n}} - 1)$, $(p \in \mathbf{R})$.

Soluție. 1° Fie $x_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$ $(n \geqslant 1)$. Deoarece $\sqrt[n]{n} \to 1$, avem $x_n \to 0$. Însă $\frac{1}{n} \ln n = \ln(1 + x_n)$, deci $n = \frac{\ln n}{\ln(1+x_n)}$ și deci

$$\lim_{n\to\infty} n(n^{1/n} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(1+x_n)} \cdot x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(1+x_n)} 1/x_n = \infty.$$

2° Deoarece $n^p(n^{1/n} - 1) = n^{p-1}[n(n^{1/n} - 1)]$, avem:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(n^{1/n} - 1) = +\infty$, dacă $p > 1$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} n^p(n^{1/n} - 1) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(1+x_n)^{1/x_n}} \cdot \frac{\ln n}{n^{1-p}} = \frac{1}{e} \cdot 0 = 0$, dacă $p < 1$.

2.3.93. Exercițiu. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de numere nenegative care are limită. Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x_n} - 1)$.

Soluție. Fie $x := \lim x_n$ și $a_n := n(\sqrt[n]{x_n} - 1)$ $(n \geqslant 1)$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{x_n} - 1) = 0,$$

deci $(\exists)\ n_0 \geqslant 1$ a.î. $\left|\frac{a_n}{n}\right| \leqslant 1$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$. Cum

$$x_n = \left[\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^{\frac{n}{a_n}}\right]^{a_n},\ (\forall)\ n \geqslant n_0 \Leftrightarrow a_n = \frac{\ln x}{\ln\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^{\frac{n}{a_n}}},\ n \geqslant n_0,$$

prin trecere la limită, obținem :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \ln x, & \text{dacă} \quad x \in \mathbf{R}_+^* \\ -\infty, & ,, \quad x = 0 \\ +\infty, & ,, \quad x = \infty \end{cases}$$

Corolar 1.

$1^\circ\ \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1) = \ln x\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$; $2^\circ\ \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{n}-1) = \infty$.

Corolar 2.

$1^\circ\ \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}) = \ln\frac{a}{b},\ (a, b \in \mathbf{R}_+^*)$;

$2^\circ\ \lim_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n+1]{a}-\sqrt[n]{a}) = \ln a (a \in \mathbf{R}_+^*)$;

$3^\circ\ \lim_{n\leftarrow\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}}) = 2\ln a (a \in \mathbf{R}_+^*)$.

Soluție. $1\quad n(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}) = n(\sqrt[n]{a}-1) - n(\sqrt[n]{b}-1) \to \ln a - \ln b$

$2^\circ\ n^2(\sqrt[n+1]{a}-\sqrt[n]{a}) = \sqrt[n]{a}\, n^2(a^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}-1) =$

$$= \sqrt[n]{a}\,\frac{n}{n(n+1)}\left[n(n+1)(a^{\frac{1}{n(n+1)}}-1)\right]$$

$3^\circ\ n(a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}}) = n(\sqrt[n]{a}-1) - n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}-1\right)$ etc.

2.3.94. Exerciţiu. *Să se calculeze limita şirului* $(x_n)_{n>1}$ *definit astfel* :

$$x_n = \frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ (\alpha \in \mathbf{R})$$

Soluţie. Prin inducţie se arată relaţia :

$$2(\sqrt{n+1}-1) < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n}-\frac{1}{2}\right),$$

deci

$$\frac{2(\sqrt{n+1}-1)}{n^\alpha} < x_n < \frac{2\sqrt{n}-1}{n^\alpha},\ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Însă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n+1}-2}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}-1}{n^\alpha} = 2\ (\text{resp. } 0,\ \text{resp. } \infty),$$

Scanned with OKEN Scanner

după cum $\alpha = \frac{1}{2}\left(\text{resp. } \alpha > \frac{1}{2}, \text{ resp. } \alpha < \frac{1}{2}\right)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ (resp. 0, resp. ∞), dacă $\alpha = \frac{1}{2}\left(\text{resp. } \alpha > \frac{1}{2}, \text{ resp. } \alpha < \frac{1}{2}\right)$.

2.3.95. Exercițiu. *Să se studieze șirul* $(x_n)_{n\geq 1}$, *definit astfel*

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \lambda[\sqrt{n}, (\forall)\ n \geq 1, \text{ cu } \lambda \in \mathbf{R} \text{ fixat.}$$

Soluție. Monotonia : $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \lambda(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = x_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{\lambda}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = x_n + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}\left(1 - + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) < (\text{resp.} >) x_n$, dacă $\lambda \geq 2$ și $n \geq 1$ (resp. $\lambda < 2$ și n suficient de mare). Deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător, dacă $\lambda \geq 2$ și crescător de la un anumit rang, dacă $\lambda < 2$.

Limita : deoarece avem (prin inducție !) :

$$2\sqrt{n} - 2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1, \ (\forall)\ n \geq 1,$$

rezultă

$$2\sqrt{n} - \lambda\sqrt{n} - 2 < x_n < 2\sqrt{n} - \lambda\sqrt{n-1}, \ (\forall)\ n \geq 1 \qquad (1)$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} (2 - \lambda)\sqrt{n} = +\infty$ (resp. $-\infty$), dacă $\lambda < (\text{resp.} >) 2$, deducem din (1) că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (resg. $-\infty$), dacă $\lambda < (\text{resp.} >) 2$.

Dacă $\lambda = 2$, atunci $-2 < x_n < 0$ $(\forall)$ $n \geq 1$ și cum $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător, rezultă că $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ există și $x \in [0, 2)$.

2.3.96. Exercițiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *și* $(y_n)_{n\geq 0}$ *două șiruri de numere legate prin relațiile* : $y_0 = ax_0$ $y_n = ax_n + bx_{n-1}$, $(\forall)$ $n \geq 1$, *unde* $a, b \in \mathbf{R}^*$ *și* $|a| \neq |b|$. *Știind că* $(y_n)_{n\geq 1}$ *este convergent, ce putem spune despre* $(x_n)_{n\geq 1}$?

Soluție. Fie $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$; evident putem presupune $y = 0$.

Notăm $z_n = \frac{1}{a} y_n$ și $c = -\frac{b}{a}$. Atunci avem

$$x_0 = z_0 \text{ și } x_n = z_n + cx_{n-1}, \ (\forall)\ n \geq 1 \qquad (1)$$

Din (1) deducem imediat

$$x_n = z_n + cz_{n-1} + \ldots c^n z_0, \ (\forall)\ n \geq 1 \qquad (2)$$

(i) Dacă $|a| > |b|$, avem $|c| < 1$, deci seria $\sum\limits_{n\geq 0} c^n$ este absolut convergentă și cum evident $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, rezultă că

$$\sum_{i=1}^{n} c^i z_{n-i} \to 0 \ (n \to \infty),$$

deci cf. (2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(ii) Dacă $|a| < |b|$, atunci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este numaidecît convergent. Spre exemplu, dacă $y_0 \neq 0$ și $y_n = 0$, $(\forall)$ $n \geq 1$, atunci $x_n = c^n z_0 \to \pm\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

2.3.97. Exercițiu *Fie* $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbf{R}$ *a.î.* $b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2$ *există și* $b \in \mathbf{R}^*$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *există* $\Leftrightarrow (\exists)\delta > 0$, $(\exists)\, n_0 \geq 1$ *a.î.* $|a_n + a_m| \geq \delta (\forall)\, m, n \geq n_0$.

Soluție. ($\Rightarrow$) Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$; cum $a^2 = b$ și $b \neq 0$, avem $a \neq 0$, deci $\varepsilon := \dfrac{|a|}{2} > 0$. Mai departe, există $n_\varepsilon \geq 1$ a.î. $|a_n - a| \leq \varepsilon$, $(\forall) n \geq n_\varepsilon$, deci

$$|a_n + a_m - 2a| \leq 2\varepsilon, \ (\forall)\, n, m \geq n_\varepsilon$$

și deci

$$\frac{1}{2}|a_n + a_m| \geq |a| - \varepsilon > 0, (\forall)\, n, m \geq n_\varepsilon \text{ etc.}$$

($\Leftarrow$) Presupun că există $\delta > 0$ și $n_0 \geq 1$ a.î. $|a_n + a_m| \geq \delta$, $(\forall)\, n, m \geq n_0$. Șirul $(a_n^2)_{n\geq 1}$ fiind convergent, este Cauchy, deci există $n_\varepsilon \geq n_0$ a.î. $|a_n^2 - a_m^2| < \varepsilon\delta$, $(\forall)\, n, m \geq n_\varepsilon$. Atunci pentru $n, m \geq n_\varepsilon$, avem :

$$|a_n - a_m| = \frac{|a_n^2 - a_m^2|}{|a_n + a_m|} \leq \frac{1}{\delta} \cdot \varepsilon\delta = \varepsilon,$$

adică $(a_n)_{n\geq 1}$ este fundamental, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ există.

Observație. $\lim\limits_{x\to\infty} a_n^2 = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.3.98. Exercițiu. *Să se studieze natura șirului* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit astfel* $x_n = ax_n + b$, $(\forall)\, n \geq 1$, *unde* $a, b, x_0 \in \mathbf{R}$ *sînt fixați.*

Soluție. Evident $(\forall)\, n \geq 1$, avem

$$x_n - x_{n-1} = a(x_{n-1} - x_{n-2}) = a^2(x_{n-2} - x_{n-3}) = \ldots = a^{n-1}(x_1 - x_0),$$

deci

$$x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_1 - x_0) + x_0 =$$

$$= (a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)(x_1 - x_0) + x_0, \ (\forall)\, n \geq 1$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a^{k-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - a^n}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}, \ (\forall)\, |a| < 1; \ x_1 - x_0 = (a - 1)\, x_0 + b,$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a}((a-1)x_0 + b) + x_0 = \dfrac{b}{1-a}, \text{ dacă } |a| < 1 \\ x_0, \text{ dacă } (a-1)\, x_0 + b = 0 \\ \pm\infty, \text{ dacă } a \geq 1 \text{ și } (a-1)\, x_0 + b \neq 0 \\ \text{nu există, dacă } a \leq -1 \text{ și } (a-1)x_0 + b \neq 0 \end{cases}$$

2.3.99. Exercițiu. *Fie* $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ *un șir cu elemente din* $(0, 1]$ *și* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un șir definit astfel :* $x_1 = b$ *și* $x_n = \lambda_n a + (1 - \lambda_n)x_{n-1}$, $(\forall)\, n > 1$, *unde* $a, b \in \mathbf{R}$ *sînt fixați și* $a < b$. *Atunci* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent, iar dacă* $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ *este monoton crescător, avem* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Deoarece $x \leqslant \lambda x + (1-\lambda)y \leqslant y$, $(\forall)\ \lambda \in [0,1]$ și $x, y \in \mathbf{R}$, $x < y$, rezultă imediat că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton descrescător și $x_n \in [a,b]$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ există și $x \in [a,b]$. Dacă $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton crescător, el este convergent și $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n \in (0,1]$. Trecînd la limită în relația de definiție a lui x_n, obținem $x = \lambda a + (1-\lambda)x \Leftrightarrow x = a$.

2.3.100. Exercițiu. *Fie* $p, q \in \mathbf{N}$ *cu* $p > q\sqrt{2}$ *și* $a = p + q\sqrt{2}$. Pentru $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ *să reprezentăm pe* a^n *sub forma:* $a^n = x_n + y_n\sqrt{2}$ *cu* $x_n, y_n \in \mathbf{N}$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$.

Soluție. Fie $b = p - q\sqrt{2}$. Evident $0 < b < a$, deci $b^n > 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Deoarece $(\forall)\ n \geqslant 1$ avem:

$$a^n = p^n + C_n^1 p^{n-1} q\sqrt{a} + C_n^2 p^{n-2} 2q^2 + \ldots;$$

$$b^n = p^n - C_n^1 p^{n-1} q\sqrt{2} + C_n^2 p^{n-2} 2q^2 - \ldots,$$

rezultă că $b^n = x_n - y_n\sqrt{2}$, deci $x_n = \dfrac{a^n + b^n}{2}$, $y_n = \dfrac{a^n - b^n}{2\sqrt{2}}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 2\sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{a^n + b^n}{a^n - b^n} = 2\sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^n}{1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^n} = 1.$$

2.3.101. Exercițiu. *Să se studieze proprietățile șirului* $(x_n)_{n\geqslant 1}$, *unde* $x_n = \left(a - \dfrac{1}{n}\right)^{(-1)^n/n}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ *și* $a > 1$ *fixat.*

Soluție. Evident există $n_0 \geqslant 1$ a.î. $1 < a - \dfrac{1}{n} < a$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, deci

$$(*)\begin{cases} 1 < x_n = \left(a - \dfrac{1}{n}\right)^{1/n} < a^{1/n} < a, \text{ dacă } n \geqslant n_0 \text{ și } n \text{ par;} \\ \dfrac{1}{a} < a^{-1/n} < x_n = \left(a - \dfrac{1}{n}\right)^{-1/n} < 1, \text{ dacă } n \geqslant n_0 \text{ și } n \text{ impar} \end{cases}$$

și deci $a^{-1} < x_n < a$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, adică $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este mărginit.

Dacă $y_n := x_{2n}$, $z_n := x_{2n-1}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, atunci inegalitatea $(*)$ se transcrie

$$1 < y_n < a^{1/2n},\ a^{-1/2n-1} < z_n < 1,\ (\forall)\ n > \frac{1}{2} n_0.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{-1/2n-1} = 1$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ nu este monoton, deoarece toți termenii x_n, cu $n \geqslant n_0$ și n par, sînt mai mari ca 1, în timp ce termenii x_n, cu $n \geqslant n_0$ și n impar, sînt mai mici ca 1.

Scanned with OKEN Scanner

2.3.102. Exerciţiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir cu elemente din* $\mathbf{R}^*$. *Să se studieze proprietăţile şirului* $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\geq 1}$.

Soluţie. a) Presupunem $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent şi fie $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

a_1) Dacă $x \neq 0$, atunci $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent şi are limita 1.

a_2) Dacă $x = 0$, atunci $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ poate fi oricum.

Exemplul 1. Fie $x_n = \frac{1}{2^{n^2}}$, $(\forall)\, n \geq 1$. Atunci $x_n \to 0$ şi $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to 0$.

Exemplul 2. Fie $0 < a < 1$ şi $x_n := a^n$, $(\forall)\, n \geq 1$. Atunci $x_n \to 0$ şi $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a$.

Exemplul 3. Fie $x_n = \frac{1}{n}$, $(\forall)\, n \geq 1$. Atunci $x_n \to 0$ şi $\frac{x_{n+1}}{x} \to 1$.

Exemplul 4. Fie $x_{2n} = \frac{1}{n}$ şi $x_{2n-1} = \frac{1}{n^2}$, $(\forall)\ n \geq 1$. Atunci $x_n \to 0$ şi $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ nu are limită : $\frac{x_{2n}}{x_{2n-1}} \to \infty$, $\frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} \to 0$.

a_3) Dacă $x = 0$ şi $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent, fie x^* limita sa, atunci $|x^*| \leq 1$. Într-adevăr, să presupunem că $|x^*| > 1$ şi fie $0 < \varepsilon < |x^*| - 1$ fixat. Atunci există $n_\varepsilon \geq 1$ a.î.

$$|x^*| - \varepsilon < \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < |x^*|,\ (\forall)\, n \geq n_\varepsilon,$$

deci

$$|x_{n+1}| > |x_n|,\ (\forall)\, n \geq n_\varepsilon,$$

ceea ce contrazice faptul că $|x_n| \to 0$. Rămîne că $|x^*| \leq 1$.

b) Presupunem $(x_n)_{n\geq 1}$ divergent. Atunci $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ poate fi oricum.

Exemplul 1. Fie $x_n = n$, $(\forall)\, n \geq 1$. Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ are limita ∞ şi $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to 1$.

Exemplul 2. Fie $x_n := (-1)^n$, $(\forall)\, n \geq 1$. Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ nu are limită şi $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to -1$.

Exemplul 3. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir definit astfel :

$$1, -2, -3, 4, -5, -6, 7, -8, -9, 10, -\ldots$$

Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ nu are limită şi $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ nu are limită.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 4. Fie $x_n = 1 + a_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, unde $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este definit astfel :

$$\underbrace{\frac{1}{2}}, \underbrace{\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}}, \underbrace{\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}}, \underbrace{\frac{5}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}}, \ldots\ldots$$

Atunci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ nu are limită și $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.

Într-adevăr, avem $1 \leqslant x_n \leqslant 2$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ și $\lim (x_{n+1} - x_n) = 0$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1.$$

2.3.103. Exerciţiu. *Să se construiască un şir numeric divergent* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *cu proprietatea că şirul* $(x_{kn})_{n\geqslant 1}$ *este convergent* $(\forall)\ k \geqslant 2$.

Soluţie. Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ și $(b_n)_{n\geqslant 1}$ două șiruri numerice convergente a.î. $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ și fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir definit astfel : $x_n = a_n$, dacă n este prim și $x_n = b_n$, dacă n este neprim.

Să arătăm că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ satisface proprietăţile din enunţ.

1° Dacă k prim, $k \geqslant 1$, atunci :

$(x_{kn})_{n\geqslant 1} = (a_k, b_{2k}, b_{3k}, \ldots)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_{kn} = b$.

2° Dacă k neprim, atunci :

$$(x_{kn})_{n\geqslant 1} = (b_{kn})_{n\geqslant 1}, \text{ deci } \lim_{n\to\infty} x_{kn} = b.$$

3° Şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ nu este convergent, deoarece conţine subşirul

$$x_1, x_2, x_3, x_5, x_7, \ldots x_p, \ldots \ (p \text{ prim}),$$

care are limita a şi prin ipoteză $a \neq b$.

2.3.104. Exerciţiu. *Fie* $(p_n/q_n)_{n\geqslant 1}$, *unde* $p_n \in \mathbf{Z}$ *şi* $q_n \in \mathbf{N}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, *un şir convergent nestaţionar* (*resp. şi* $\lim\limits_{n\to\infty} p_n/q_n \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$). *Atunci* $\sup\limits_{n\geqslant 1} q_n = \infty$ (*resp.* $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$).

Soluţie. Dacă $\sup\limits_{n\geqslant 1} q_n < +\infty$, rezultă că mulţimea $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} \{q_n\}$ este finită; fie q cel mai mare dintre elementele sale. Notînd p_n/q_n cu r_n, şirul $(qr_n)_{n\geqslant 1}$ este format cu numere întregi şi fiind evident convergent, este staţionar, absurd. Rămîne că $\sup\limits_{n\geqslant 1} q_n = +\infty$.

Presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} r_n \notin \mathbf{Q}$ şi că şirul $(q_n)_{n\geqslant 1}$ nu are limita $+\infty$, există deci $[c, \infty]$ o vecinătate a lui $+\infty$, în afara căreia se află o infinitate de termeni ai şirului $(q_n)_{n\geqslant 1}$. De aici rezultă că $(q_n)_{n\geqslant 1}$ posedă un subşir constant $q_{n_k} = q$, $(\forall)\ k \geqslant 1$. Atunci şirul $(qr_{n_k})_{k\geqslant 1}$ este format din numere întregi şi fiind evident convergent, limita sa este un număr întreg p, deci $\lim\limits_{k\to\infty} r_{n_k} = p/q \in \mathbf{Q}$, absurd. Rămîne $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$.

Observaţie Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} p_n/q_n \in \mathbf{Q}$, nu rezultă numaidecît că $(q_n)_{n\geqslant 1}$ are limită.

Contraexemplu $1, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{2}{3}, 1, \dfrac{3}{4}, \ldots 1, \dfrac{n-1}{n}, \ldots$

2.3.105. Exerciţiu. *Să se calculeze limita şirului* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *definit astfel* :

$$x_n = \frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^1} + \ldots + \frac{1}{C_n^n}, \ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Deoarece $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, avem $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!(n-k)!}{n!}$, deci

$$x_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-k-1)!(n-k)}{n!}, \quad (\forall)\, n \geqslant 1$$

Evident însă pentru $(\forall)\, a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{R}$, avem : $\sum_{k=0}^{m} a_k = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k}$, deci

$$x_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1-k)!\,k!\,(k+1)}{n!}\ (\forall)\, n \geqslant q$$

și deci

$$2x_n = 2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-k-1)!\,(n-k)+(k+1)}{n!} = 2 +$$

$$+ \frac{n+1}{n} \sum_{k+0}^{n-1} \frac{k!\,(n-1-k)!}{(n-1)!} = 2 + \frac{n+1}{n} a_{n-1} \Leftrightarrow x_n = 1 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) x_{n-1},\ (\forall)\, n \geqslant 2.$$

Prin inducție relativ la n deducem imediat că $2 \leqslant x_n \leqslant 2 + \frac{4}{n}$, $(\forall)\ n \geqslant 2$, deci $\lim_{n\to\infty} x_n$ există și este egală cu 2.

2.3.106. Exercițiu. *Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ (resp. $(b_n)_{n\geqslant 1}$) un șir numeric ai cărui termeni sînt în progresie aritmetică (resp. geometrică). Să se calculeze :*

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 \cdot b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n).\ \textit{Discuție.}$$

Soluție. Notăm $a_1 = a$, $b_1 = b$; r (resp. q) rația progresiei aritmetice (resp. geometrice). Atunci

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = ab + (a+r)\,bq + \ldots + (a+(n-1)\,r)bq^{n-1} =$$

$$= ab(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) + rb\,(q + 2q^2 + \ldots + (n-1)\,q^{n-1}) =$$

$$= ab\,\frac{1-q^n}{1-q} + rb \sum_{k=1}^{n-1} kq^k$$

Cum $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, dacă $|q| < 1$ și $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$, dacă $|q| < 1$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{ab}{1-q} + \frac{bqr}{(1-q)^2},\ \text{dacă}\ |q| < 1.$$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, dacă $q \geqslant 1$, iar dacă $q \leqslant -1$, atunci $(s_n)_{n\geqslant 1}$ nu are limită.

2.3.107. Exercițiu. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} (a + 2a^2 + \ldots + na^n - a^{n+1}),\ a \in \mathbf{R}.\ \textit{Discuție.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $a \in \mathbf{R}$ fixat și $s_n(a)$ suma din enunț. Atunci avem :

$$\sum_{k=1}^{n} ka^k = \frac{a + na^{n+2} - (n+1)a^{n+1}}{(1-a)^2}, \quad (\forall)\ a \neq 1,$$

deci

$$s_n(a) = \frac{a}{(1-a)^2} + \frac{1}{(1-a)^2} na^{n+2} - \frac{n+1}{(1-a)^2} a^{n+1} - a^{n+1} =$$

$$= \frac{a}{(1-a)^2} + na^{n+1}\left[\frac{a}{(1-a)^2} - \frac{n+1}{n}\frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{n}\right]$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} na^n = 0$, dacă $|a| < 1$, avem :

$$\lim_{n\to\infty} s_n(a) = \frac{a}{(1-a)^2}, \quad \text{dacă } |a| < 1.$$

Dacă $a = 1$, rezultă direct că $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(a) = \infty$.

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a}{(1-a)^2} - \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{a-1} \quad (a \neq 1),$$

rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(a) = +\infty$, dacă $a > 1$ și $(s_n(a))_{n\geq 1}$ nu are limită, dacă $a \leqslant -1$.

2.3.108. Exercițiu. *Să se arate că șirul* $(x_n)_{n\geq 1}$, *unde* $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} ka^k (\forall)\ n \geqslant 1$ *și* $|a| < 1$, *este convergent și are limita* $\dfrac{a}{(1-a)^2}$.

Soluție. Variantă a Propoziției 3.5.1. Cor. 1.

Corolar 1. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{b_k}$ *dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ (*resp.* $(b_n)_{n\geq 1}$) *sînt termenii unei progresii infinite aritmetice* (*resp. geometrice cu* $b_n \neq 0$ $(\forall)\ n \geqslant 1$).

Soluție. Fie a, r (resp. b, q) primul termen și rația progresiei aritmetice (resp. geometrice) și $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{b_k} (n \geqslant 1)$. Atunci

$$a_k = a + (k-1)r, \ b_k = bq^{k-1}, \ (\forall)\ k \geqslant 1$$

deci

$$s_n = \frac{a}{b}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q^{k-1}} + \frac{r}{b}\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{q^{k-1}}, \quad (\forall)\ n \geqslant 1$$

și de ci

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q}} + \frac{r}{b}\left(1 + \frac{q}{(1-q)^2}\right), \quad \text{dacă } |q| > 1$$

Dacă $a, b, r > 0$ și $0 < q \leqslant 1$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

În celelalte cazuri șirul $(s_n)_{n\geq 1}$ nu este convergent sau are limita $+\infty$ sau $-\infty$.

Corolar 2

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a^k}=\frac{a}{(1-a)^2},\ (\forall)\ |a|>1.$$

2.3.109. Exercițiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un șir de numere reale cu proprietățile:* $1^\circ\ \lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = 0$; 2° x_{n+1} *este cuprins între* x_n *și* x_{n-1}, $(\forall)\ n>1$. ***Atunci*** $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent.*

Soluție. Fie I_n intervalul de capete x_{n-1} și $x_n (n>1)$. Evident din 1° avem $|I_n|\to 0$. Să arătăm că $I_1\supseteq I_2\supseteq\ldots\supseteq I_n\supseteq\ldots$

Într-adevăr deoarece $x_1, x_2\in I_1$ și x_3 este cuprins între x_1 și x_2, din 2° rezultă că $x_3\in I_1$, deci $I_2\subseteq I_1$. Fie $n\geq 1$ a.î. $I_{n-1}\supseteq I_n$. Deoarece $x_n, x_{n+1}\in I_n$ și x_{n+2} este cuprins între x_n și x_{n+1}, din 2° rezultă că $x_{n+2}\in I_n$, deci $I_{n+1}\subseteq I_n$.

Prin urmare $I_1\supseteq I_2\supseteq\ldots\supseteq I\supseteq\ldots$
Din T.2.3.21.(4°) rezultă că $\bigcap_{n\to 1} I_n$ se reduce la un singur punct x și $x_n\to x$.

2.3.110 Exercițiu. *Fie* $p\in\mathbf{N}$ *și* $x_0\in\mathbf{R}_+^*$ *fixați. Să se arate că printre* m *termeni consecutivi ai șirului definit recursiv astfel:*

$$x_{n+1}=\sqrt{1+p^2}\cdot x_n+p\sqrt{1+x_n^2},\ (\forall)\ n\geq 0, \tag{1}$$

există cel puțin $\left[\frac{m}{3}\right]$ *numere iraționale.*

Soluție. $(\forall)\ n\geq 0$, din (1) deducem:

$$(x_{n+1}-\sqrt{1+p^2}\,x_n)^2=p^2(1+x_n^2),\quad x_n^2-2\sqrt{1+p^2}\,x_n\,x_{n+1}+x_{n+1}^2-p^2=0,$$

deci

$$x_n=\sqrt{1+p^2}\,x_{n+1}\pm p\sqrt{1+x_{n+1}^2}$$

Cum însă $x_n<x_{n+1}$, $(\forall)\ n\geq 1$, rezultă că

$$x_n=\sqrt{1+p^2}\,x_{n+1}-p\sqrt{1+x_{n+1}^2} \tag{2}$$

Din (1) avem

$$x_{n+2}=\sqrt{1+p^2}\,x_{n+1}+p\sqrt{x_{n+1}^2} \tag{3}$$

Din (2) și (3) prin adunare obținem:

$$x_{n+2}=2\sqrt{1+p^2}\,x_{n+1}-x_n,\ (\forall)\ n\geq 1 \tag{4}$$

Cum $\sqrt{1+p^2}$ este irațional $(\forall)\ p\in\mathbf{N}$, din (4) deducem că din trei termeni consecutivi și șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ cel puțin unul este irațional. De aici rezultă că printre m termeni consecutivi ai șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ cel puțin $\left[\frac{m}{3}\right]$ sînt numere iraționale.

2.3.111. Exercițiu. *Să se arate că termenii șirului* $(10^n\sqrt{2}-[10^n\sqrt{2}])_{n\geq 1}$ *sînt diferiți între ei doi cîte doi.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Se știe că orice număr irațional x admite o reprezentare zecimală unică neperiodică $x = a, a_1a_2a_3\ldots$ Atunci

$$[x] = a;\ x - [x] = 0, a_1a_2a_3\ldots.$$

Numărul $\sqrt{2}$ fiind irațional, admite o reprezentare zecimală unică neperiodică $\sqrt{2} = 1, a_1a_2a_3\ldots$ Evident avem :

$$x_n := 10^n\sqrt{2} - [10^n\sqrt{2}] = 0, a_{n+1}a_{n+2}\ldots,\ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

deci

$$x_n = x_m \Leftrightarrow 0, a_{n+1}a_{n+2}\ldots = 0, a_{m+1}a_{m+2}\ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{n+k} = a_{m+k}(\forall)\ k \geqslant 1 \Leftrightarrow a_{n+k} = a_{m-n+(n+k)},\ (\forall)\ k \geqslant 1$$

(în ipoteza $n < m$). Am obținut că reprezentarea zecimală a lui $\sqrt{2}$ este periodică, absurd. Așadar $x_n \neq x_m$, $(\forall)\ n \neq m$.

2.3.112. Exercițiu. *Să se determine o enumerare $(x_n)_{n\geqslant 1}$ a mulțimii $\mathbf{Q}_+^*$ a.î. șirul $(\sqrt{x_n})_{n\geqslant 1}$ să fie convergent.*

Soluție. Fie $A_k := \left\{\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{k}{1}\right\}$ $(k \geqslant 1)$, deci A_k are k elemente și avem :

$$\frac{1}{k} \leqslant x \leqslant k,\ (\forall)\ x \in A_k,\ (\forall)\ k \geqslant 1$$

Deoarece $\mathbf{Q}_+^* = \bigcup_{k\geqslant 1} A_k$, putem enumera $\mathbf{Q}_+^*$ astfel

$$\underbrace{x_1}_{A_1};\ \underbrace{x_2, x_3}_{A_2};\ \underbrace{x_4, x_5, x_6}_{A_3};\ \underbrace{x_7, x_8, x_9, x_{10}}_{A_4};\ \ldots$$

Se verifică imediat relația : $\frac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leqslant \sqrt[n]{x_n} \leqslant \sqrt[n]{n}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, de unde prin trecere la limită, rezultă $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$ (cf. P.2.4.1. (1°))

Observație. Dacă $I \subseteq \mathbf{R}$ este un interval arbitrar cu $\mathring{I} \neq \emptyset$, atunci mulțimea $I \cap \mathbf{Q}$ nu poate fi aranjată într-un șir convergent.

2.3.113. Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale nenule. Atunci există $\alpha \in \mathbf{R}$ irațional a.î. αx_n este irațional, pentru orice $n \geqslant 1$.*

Soluția 1. Evident mulțimea $x_n^{-1} \cdot \mathbf{Q} = \{x_n^{-1} r;\ r \in \mathbf{Q}\}$ este numerabilă, fiind echipotentă cu $\mathbf{Q}$, pentru orice $n \geqslant 1$. Atunci mulțimea $A = \bigcup_{n\geqslant 1} (x_n^{-1}\mathbf{Q})$ este numerabilă (P.1.4.13.). Cum $\mathbf{R}$ este nenumerabilă (P. 2.3.23), rezultă că $A \cup \mathbf{Q} \neq \mathbf{R}$; fixăm $\alpha \in \mathbf{R} \setminus (A \cup \mathbf{Q})$. Atunci α este irațional și avem $\alpha \notin x_n^{-1} \cdot \mathbf{Q}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci $\alpha x_n \notin \mathbf{Q}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Soluția 2. Presupunem prin absurd că $(\forall)\ \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $(\exists)\ n \geqslant 1$ cu αx_n rațional. Cum mulțimea $\mathbf{Q}$ este numerabilă și $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ nenumerabilă, există o mulțime nenumerabilă $A \subseteq \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ și există $n_0 \geqslant 1$ a.î. αx_{n_0} este rațional, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Considerăm aplicația $A \ni \alpha \mapsto \alpha x_{n_0} \in \mathbf{Q}$, care este evident injectivă, deci A se aplică injectiv pe o parte a lui $\mathbf{Q}$ și deci A este numerabilă, absurd.

Scanned with OKEN Scanner

Rămîne că $(\exists)\ \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ a.î. $\alpha x_n \in \mathbf{Q}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Observație. Se poate arăta că $(\exists)\ \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ a.î. $\alpha + x_n$ este irațional $(\forall)\ n \geqslant 1$.

2.3.114. Exercițiu. *Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale pozitive cu proprietatea că $(\exists)\ q > 0$ a.î. $a_n - a_{n+1} > qa_n^2$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Atunci șirul $(na_n)_{n\geqslant 1}$ este majorat de q^{-1}.*

Soluție. Deoarece avem :

$$a_n - a_{n+1} \geqslant qa_n^2 > 0,\ (\forall)\ n \geqslant 1, \tag{1}$$

rezultă că $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este strict descrescător, deci (T.2.3.21.(2°)) este convergent; fie a limita sa. Trecînd în relația (1) la limită, $n \to \infty$, obținem $a - a \geqslant qa^2$, deci $a = 0$. Din (1) prin împărțire la $a_n\, a_{n+1}$ rezultă $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} \geqslant q\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant q$,

deci $\dfrac{(n+1)-n}{\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}} \leqslant q^{-1}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Aplicînd T. 2.3.26. Cor. 2 deducem că

șirul $\left(\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_n}}\right)_{n\geqslant 1}$ este majorat de q^{-1}.

2.3.115. Exercițiu. *Să se arate că șirul $(2^n - 3)_{n\geqslant 1}$ conține o infinitate de elemente care sînt prime între ele două cîte două.*

Soluție. Evident $2^2 - 3$ și $2^3 - 3$ sînt prime între ele. Fie $k \geqslant 1$ cu proprietatea că

$$a_1 = 2^{n_1} - 3,\ a_2 = 2^{n_2} - 3, \ldots, a_k = 2^{n_k} - 3$$

sînt prime între ele două cîte două și să arătăm că există un număr de forma $2^n - 3$ care este prim cu fiecare din numerele $a_1, a_2, \ldots a_k$.

Într-adevăr, fie $l = a_1 a_2 \ldots a_k$. Deoarece $2^l > 2l$, numerele $2, 2^1, 2^2, \ldots, 2^l$ conțin cel puțin două care împărțite la l dau aceleași rest; fie acestea 2^r și 2^s cu $r < s$. Evident $\dfrac{2^s - 2^r}{l}$ este natural, să-l notăm cu p, deci $l_p = 2^s - 2^r = 2^r(2^{s-r} - 1)$(*). Ca produs de numere impare l este impar, deci din (*) rezultă că $2^{s-r} - 1$ se divide la p, există deci $q \in \mathbf{N}$ cu $2^{s-r} - 1 = lq$. Atunci

$$2^{s-r+2} - 3 = 4 \cdot 2^{s-r} - 3 = 4(1 + lq) - 3 = 4lq + 1$$

Elementul $2^{s-r+2} - 3$, pe care să-l notăm cu a_{k+1}, face parte din șir, este prim cu l, deci cu $a_1, a_2, \ldots a_k$.

Prin urmare cf. principiului inducției șirul $(2^n - 3)_{n\geqslant 1}$ posedă o infinitate de elemente, prime între ele două cîte două.

2.3.116. Exercițiu. *Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir ai cărui termeni sînt în progresie aritmetică, cu primul termen a și rația $r \neq 0$. Atunci $(a_n)_{n\geqslant 1}$ posedă un subșir ai cărui termeni sînt în progresie geometrică $\Leftrightarrow a/r$ este rațional.*

Soluție. ($\Rightarrow$) Presupunem că $(a_n)_{n\geqslant 1}$ posedă un subșir în progresie geometrică și fie $a + ir$, $a + jr$, $a + kr$, trei termeni consecutivi ai progresiei geometrice, cu $i < j < k$, deci

$$(a + jr)^2 = (a + ir)(a + kr) \Leftrightarrow a(2j - i - k) = r(ik - j^2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $2j - i - k = 0$, atunci $ik - j^2 = 0$, deci $(i-k)^2 = (i+k)^2 - 4ik = (2j)^2 - 4j^2 = 0 \Leftrightarrow i = k$, absurd. Rămîne că $2j - i - k \neq 0$, deci $\frac{a}{r} = \frac{ik - j^2}{2j - i - k} \in \mathbf{Q}$

($\Leftarrow$) Dînd la o parte un număr finit de termeni, putem presupune că toți termenii șirului dat au același semn, spre exemplu strict pozitivi, deci putem presupune că $a > 0$ și $r > 0$. Cum $\frac{a}{r} \in \mathbf{Q}$, avem $\frac{a}{r} = \frac{p}{q}$ cu $p, q \in \mathbf{N}$. Deoarece numărul $(1+q)^m - 1$, $(\forall)\ m \in \mathbf{N}$, se divide la numărul $(1+q) - 1$, adică la q, avem că:

$$\frac{a(1+q)^m - a}{r} = \frac{ap((1+q)^m - 1)}{rp} = p\,\frac{(1+q)^m - 1}{q} \in \mathbf{N},$$

deci $(\forall)\ m \in \mathbf{N}$ există $n = n(m) \in \mathbf{N}$ a.î. $a(1+q)^m = a + rn = a_{n+1}$, deci $(a(1+q)^m)_{m \geq 1}$ este un subșir al șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ și are termenii în progresie geometrică.

2.3.117. Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir din $\mathbf{R}$ cu proprietatea că există $\lambda \in \mathbf{R}$, $|\lambda| < 1$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} (x_{n+1} - \lambda x_n) = 0$. Atunci $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și are limita 0.*

Soluție. Înlocuind x_n cu $-x_n$, putem presupune că $0 < \lambda < 1$. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)\ N \geq 1$ a.î.

$$-\varepsilon \leq x_{n+1} - \lambda x_n \leq \varepsilon, \quad (\forall)\ n \geq N,$$

deci

$$\lambda x_n - \varepsilon \leq x_{n+1} \leq \lambda x_n + \varepsilon, \quad (\forall)\ n \geq N \tag{1}$$

Fie $p \geq 1$ fixat. Din (1) obținem:

$$x_{N+p} \leq \lambda x_{n+p-1} + \varepsilon \leq \lambda(\lambda x_{N+p-2} + \varepsilon) + \varepsilon =$$

$$= \lambda^2 x_{N+p-2} + (1+\lambda)\varepsilon \leq \ldots \leq \lambda^p n_N + (1 + \lambda + \ldots + \lambda^{p-1})\varepsilon.$$

Însă

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^{p-1} = \frac{1 - \lambda^p}{1 - \lambda} < \frac{1}{1 - \lambda},$$

deci

$$x_{N+p} \leq \lambda^p x_N + \frac{\varepsilon}{1 - \lambda}$$

Analog se arată că

$$x_{N+p} \geq \lambda^p x_N - \frac{\varepsilon}{1 - \lambda}, \quad (\forall)\ p \geq 1$$

Așadar avem:

$$\lambda^p x_N - \frac{\varepsilon}{1 - \lambda} \leq x_{N+p} \leq \lambda^p x_N + \frac{\varepsilon}{1 - \lambda}, \quad (\forall)\ p \geq 1 \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $\lim_{p\to\infty} \lambda^p = 0$, există $p_0 \geqslant 1$ a.î. $\lambda^p |x_N| \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ p \geqslant p_0$. De aici și din (2) rezultă că

$$-\varepsilon - \frac{\varepsilon}{1-\lambda} \leqslant x_{N+p} \leqslant \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1-\lambda}, \quad (\forall)\ p \geqslant p_0,$$

deci

$$|x_n| \leqslant \frac{2-\lambda}{1-\lambda}\varepsilon, \quad (\forall)\ n \geqslant N + p_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Corolar 1. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir din* $\mathbf{R}$ *cu proprietatea că* $\lim_{n\to\infty}\left(x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n\right) = 0$. *Atunci* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Corolar 2. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir definit astfel* : $x_1 = 0$ *și* $x_{n+1} = \lambda x_n + 2^{-n}n^2$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, *unde* $|\lambda| \leqslant 1$. *Să se arate că* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este convergent și să se calculeze limita sa.*

Soluție. 1° Deoarece $\lim_{n\to\infty} 2^{-n}n^2 = 0$, rezultă că $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - \lambda x_n) = 0$, deci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent, și are limita 0, dacă $|\lambda| < 1$.

2° Dacă $\lambda = 1$, avem $x_{n+1} = x_n + 2^{-n}n^2$, deci

$$x_{n+1} = (x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + \ldots + (x_2 - x_1) =$$

$$= \frac{n^2}{2^n} + \frac{(n-1)^2}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1^2}{2^1}, \quad (\forall)\ n \geqslant 1$$

Șirul $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k}\right)_{n\geqslant 1}$ fiind convergent și având limita 6 (P.12.3.8. Exemple)., rezultă că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent și are limita 6.

3° Dacă $\lambda = -1$, avem $x_{n+1} + x_n = 2^{-n}n^2$, deci

$$x_{n+1} = (x_{n+1} + x_n) - (x_n + x_{n-1}) + \ldots \pm (x_2 - x_1) =$$

$$= \frac{n^2}{2^n} - \frac{(n-1)^2}{2^{n-1}} + \ldots \pm \frac{1^2}{2^1}.$$

Ținem mai departe seama de P.12.3.8. Exemple.

2.3.118. Exercițiu. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de numere reale definit astfel* :

$$x_1 = 2\ ;\ x_{n+1} = \frac{1 + x_n^4}{5x_n}, \quad (\forall)\ n \geqslant 1.\ \textit{Atunci}\ \frac{1}{3} < x_n < 2, \ (\forall)\ n \geqslant 1\ (1).$$

Soluție. Să arătăm că $x_n > \frac{1}{3}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Într-adevăr din inegalitatea mediilor (P.2.1.31) avem :

$$x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 1}{5x_n} = \frac{x_n^3}{5} + \frac{1}{15x_n} + \frac{1}{15x_n} + \frac{1}{15x_n} \geqslant$$

$$\geqslant 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{x_n^3}{5} \cdot \frac{1}{15x_n} \cdot \frac{1}{15x_n} \cdot \frac{1}{15x_n}} = 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{5 \cdot 15^3}} = \frac{4}{15} \cdot \sqrt[4]{3} > \frac{1}{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să arătăm prin inducție că $x_n < 2$, $(\forall)\ n > 1$.

Evident avem: $x_2 = \dfrac{2^4+1}{5\cdot 2} = \dfrac{17}{10} < 2 = x_1$

Fie $n>1$ cu $x_n < 2$. Atunci

(i) dacă $\dfrac{1}{3} < x_n < 1$, avem: $x_{n+1} = \dfrac{x_n^4+1}{5x_n} < \dfrac{1+1}{5x_n} < \dfrac{2\cdot 3}{5} < 2$

(ii) dacă $1 \leqslant x_n < 2$, considerăm funcția $f(x) = \dfrac{x^4+1}{5x}$, $x \in [1,2]$.

Deoarece $f'(x) = \dfrac{3x^4-1}{x^2} > 0$ $(\forall)\ x \in [1,2]$, funcția f este strict crescătoare, deci

$$x_{n+1} = f(x_n) < f(2) = \frac{2^4+1}{5\cdot 2} = \frac{17}{10} < 2$$

Cf. principiului inducției $x_n < 2$, $(\forall)\ n > 1$.

Prin urmare $\dfrac{1}{3} < x_n < 2$ $(\forall)\ n > 1$.

Observație. Șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ nu este monoton, altfel ar fi convergent; fie x limita sa. Deoarece $\dfrac{1}{3} < x_n < 2$, $(\forall)\ n>1$, rezultă că $\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 2$, Trecînd la limită în relația $x_{n+1} = \dfrac{x_n^4+1}{5x_n}$, $n \geqslant 1$, obținem $x = \dfrac{x^4+1}{5x} \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$ $\left(\text{deoarece } \dfrac{5-\sqrt{21}}{2} < \dfrac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}}$, absurd, deoarece $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}} > 2$.

2.3.119. Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir definit astfel:*

$$x_0 = 2,\ x_1 = \frac{5}{2},\quad x_{n+1} = (x_{n-1}^2 - 2)\,x_n - x_1,\quad (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Atunci $[x_n] = 2^{\frac{2n-(-1)^n}{3}}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$

Soluție. Evident avem:

$$x_1 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2^{\frac{2^1-(-1)^1}{3}} + 2^{-\frac{2^1-(-1)^1}{3}};$$

$$x_2 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2^{\frac{2^2-(-1)^2}{3}} + 2^{-\frac{2^2-(-1)^2}{3}},$$

de unde, prin inducție, deducem:

$$x_n = 2^{\frac{2n-(-1)^n}{3}} + 2^{-\frac{2n-(-1)^n}{3}},\quad (\forall)\ n \geqslant 1$$

Deoarece $\dfrac{2^n-(-1)^n}{3} \in \mathbf{N}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, rezultă relația

$$[x_n] = 2^{\frac{2n-(-1)^n}{3}} \text{ și } x_n = [x_n] + \frac{1}{[x_n]},\quad (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.3.120. Exerciţiu. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir strict crescător de numere naturale. Atunci există o infinitate de termeni* a_m *ai şirului dat care pot fi reprezentanţi sub forma :* $a_m = pa_i + qa_j$ *cu* $p, q \in \mathbf{N}$ *şi* $i \neq j$ (1)

Soluţie. Fiecare termen al şirului dat are restul împărţirii prin a_1 un număr r aparţinînd mulţimii $\{0, 1, 2, \ldots, a_1 - 1\}$, deci dintre a_1 termeni ai şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ cel puţin doi au acelaşi rest prin împărţirea cu a_1. Fie deci a_h, a_k cu $h \neq k$ a.î. $a_h = t\ a_1 + r$, şi $a_k = t'a_1 + r$. Presupunem $t > t'$, deci $(\exists)\ s \in \mathbf{N}$ cu $t = t' + s$. Atunci

$$a_h = ta_1 + (a_k - t'a_1) = sa_1 + 1 \cdot a_k,$$

deci $a_h = sa_1 + 1\ a_k$ şi deci a_h admite o reprezentare de forma (1).

Considerînd şirul $(a_n)_{n>h+1}$ deducem analog că există a_{h_1} cu $h_1 \geq h + 1$, care admite o reprezentare de forma (1).

Aplicăm mai departe principiul inducţiei.

2.3.121. Exerciţiu. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_8 \in \mathbf{R}$, *nu toate nule şi* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir definit astfel :* $x_n = a_1^n + a_2^n + \ldots + a_8^n$, $(\forall)\ n \geq 1$. *Ştiind că o infinitate de termeni ai şirului* $(x_n)_{n\geq 1}$ *sînt egali cu* 0, *să se determine toţi termenii acestui şir care sînt egali cu* 0.

Soluţie. Reordonînd putem presupune că $|a_1| \geq |a_2| \geq \ldots \geq |a_8|$. Evident avem :

$$|a_1| > 0,\ x_{2n} = a_1^{2n} + \ldots + a_8^{2n} > 0,\quad (\forall)\ n \geq 1.$$

Dacă $|a_1| > |a_2|$, atunci $0 < \rho = \dfrac{|a_2|}{|a_1|} < 1$, deci

$$|a_2^n + a_3^n + \ldots + a_8^n| \leq |a_2|^n + |a_3|^n + \ldots + |a_8|^n \leq 7\rho^n |a_1|^n,\quad (\forall)\ n \geq 1$$

şi deci

$$|x_n| \geq |a_1|^n - |a_2^n + \ldots + a_8^n| \geq |a_1|^n (1 - 7\rho^n) > 0, \tag{1}$$

dacă $1 - 7\rho^n > 0$, adică dacă $n \geq N = \left[\dfrac{\ln 7}{-\ln \rho}\right]$.

Cum o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ sînt 0, inegalitatea (1) este imposibilă. Rămîne că $|a_1| = |a_2|$

Dacă $a_1 = a_2$, atunci punînd $\rho := \dfrac{|a_3|}{|a_2|}$, avem

$$|x_n| \geq |a_1|^n (2 - 6\rho^n),\quad (\forall)\ n \geq 1,$$

deci raţionînd ca mai sus deducem că $|a_2| = |a_3|$ şi continuînd obţinem că $|a_1| = |a_2| = \ldots = |a_8|$ şi deci

$$x_{2n} = 8a_1^{2n} \text{ şi } x_{2n-1} = ka_1^{2n-1},\quad (\forall)\ n \geq 1,\quad (\forall)\ k \in \{1, 2, \ldots, 8\} \tag{2}$$

Cum o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ sînt 0, din (2) rezultă că $a_1 = 0$, deci $a_1 = a_2 = \ldots = a_8 = 0$, absurd.

Prin urmare $a_1 = -a_2$ şi analog se arată că $a_3 = -a_4$, apoi că $a_5 = -a_6$ şi în fine că $a_7 = -a_8$. De aici se deduce că $x_{2n-1} = 0$, $(\forall)\ n \geq 1$.

Scanned with OKEN Scanner

2.3.122. Exercițiu. *Să se studieze natura șirului* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit astfel:* $x_{n+1}=\frac{2}{1+x_n}$, $(\forall)\ n\geq 1$ *cu* $x_1>-1$ *fixat.*

Soluție. Să observăm că $\frac{2}{1+\lambda}<$ (resp. $>$) 1 dacă $\lambda>1$ (resp. $-1<\lambda<1$).

1) $x_1>1$. Atunci $x_2=\frac{2}{1+x_1}<1$, $x_3=\frac{2}{1+x_2}>1$ și în general $x_{2n}<1$, $x_{2n+1}>1$, $(\forall)\ n\geq 1$.

Să observăm de asemenea că $\frac{2+2\lambda}{3+\lambda}<$ (resp. $>$) λ, dacă $\lambda>1$ (resp. $-1<\lambda<1$) și $x_{n+1}=\frac{2+2x_{n-1}}{3+x_{n-1}}$, $(\forall)\ n>1$.

Atunci $x_{2n+1}=\frac{2+2x_{2n-1}}{3+x_{2n-1}}<x_{2n-1}$ și $x_{2n}=\frac{2+2x_{2n-2}}{3+x_{2n-2}}>x_{2n-2}$, deci

$$0<x_2<x_4<\ldots<x_{2n}<1<x_{2n-1}<\ldots<x_3<x_1,\quad (\forall)\ n\geq 1,$$

deci (T.2.3.21. (2°)) $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}$, $x'=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}$ există și avem $0<x\leq 1\leq x'$. Trecînd la limită în relațiile $x_{2n}=\frac{2}{1+x_{2n-1}}$ și $x_{2n+1}=\frac{2}{1+x_{2n}}$, obținem $x=\frac{2}{1+x'}$ și $x'=\frac{2}{1+x}$, deci $x=x'$ și deci $x=x'=1$.

2) $-1<x_1<1$. Atunci raționînd ca mai sus obținem:

$$x_1<x_3<\ldots<x_{2n-1}<1<x_{2n}<\ldots<x_4<x_2,\quad (\forall)\ n\geq 1 \text{ etc.}$$

3) $x_1=1$. Atunci $x_n=1$, $(\forall)\ n\geq 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

2.3.123. Exercițiu. *Să se afle limita șirului* $(x_n)_{n\geq 1}$, *definit astfel* $x_0=0$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}(a+x_n^2)$, $(\forall)\ n\geq 1$ *și* $0\leq a\leq 1$.

Soluție. Evident $(\forall)\ n\geq 1$ avem:

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\cdot(a+x_n^2-a-x_{n-1}^2)=\frac{x_n+x_{n-1}}{2}(x_n-x_{n-1}),$$

de unde deducem

$$x_{n+1}-x_n=\frac{(x_n+x_{n-1})\ldots(x_2+x_1)(x_1+x_0)}{2^n}(x_1-x_0)$$

Deoarece $x_1-x_0=\frac{1}{2}\ a\geq 0$, rezultă că $x_{n+1}-x_n\geq 0$, $(\forall)\ n\geq 1$ deci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător.

Scanned with OKEN Scanner

Să arătăm că $0 \leqslant x_n \leqslant 1$. Într-adevăr $0 \leqslant x_1 = \frac{1}{2} a < 1$, iar dacă presupunem că $0 \leqslant x_k < 1$, atunci $x_{k+1} = \frac{1}{2}(a + x_k^2) < \frac{1}{2}(a+1) \leqslant 1$, deci în virtutea principiului inducției avem $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Prin urmare (T.2.3.21.(2°)) $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ există. Trecînd la limită în relația $x_{n+1} = \frac{1}{2}(a + x_n^2)$, $n \geqslant 1$, obținem $x = \frac{1}{2}(a + x^2)$, deci $x = 1 \pm \sqrt{1-a}$ și cum $0 \leqslant x \leqslant 1$, rezultă că $x = 1 - \sqrt{1-a}$.

2.3.124. Exercițiu (Formula lui Heron). *Să se arate că* $(\forall)\ b > 0$ *și* $x_1 > 0$ *șirul* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *cu* $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{b}{x_{n-1}}\right)$, $(\forall)\ n \geqslant 2$, *este convergent și are limita* $\sqrt{b}$.

Soluție. Să observăm în prealabil că $\lambda^2 - 2\lambda\sqrt{b} + b = (\lambda - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$, $(\forall)\ \lambda \in \mathbf{R}$, deci

$$\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{b}{\lambda}\right) \geqslant \sqrt{b} > 0, \quad (\forall)\ \lambda > 0 \tag{1}$$

De asemenea, dacă $\lambda \geqslant \sqrt{b}$, atunci

$$\frac{b}{\lambda} - \lambda \leqslant 0 \tag{2}$$

Din (1) deducem inductiv că definiția lui x_n cu $n > 1$ are sens și avem $x_n \geqslant \sqrt{b}$, $(\forall)\ n > 1$. Din (2) deducem că

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{b}{x_{n-1}}\right) - x_{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{x_{n-1}} - x_{n-1}\right) \leqslant 0,$$

adică $x_n \leqslant x_{n-1}$, $(\forall)\ n > 1$. Am obținut că $(x_n)_{n>1}$ este monoton descrescător și minorat de $\sqrt{b}$, deci este convergent; fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Evident $x \geqslant \sqrt{b}$, de unde prin trecere la limită, $n \to \infty$, în egalitatea $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{b}{x_{n-1}}\right)$ $(n \geqslant 1)$, obținem $x = \frac{1}{2}x + \frac{b}{2x}$, deci $x = \frac{b}{x}$ și deci $x = \pm\sqrt{b}$. Cum $x \geqslant \sqrt{b}$, concludem că $x = \sqrt{b}$.

Generalizare (Formula lui Newton). *Să se arate că* $(\forall)\ b > 0$, $x_1 > 0$ *și* k *natural* $\geqslant 2$, *șirul* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *cu* $x_n = \frac{1}{k}\left((k-1)\,x_{n-1} + \frac{b}{x_{n-1}^{k-1}}\right)$, $(\forall)\ n \geqslant 2$, *este convergent și are limita* $\sqrt[k]{b}$.

Observație. Dacă α_n $(n \geqslant 1)$ *este eroarea pe care o facem înlocuind* $\sqrt{b}$ *prin* x_n, *atunci* $|\alpha_n| \leqslant \frac{1}{2}|\alpha_{n-1}|$, *deci* $\boxed{|\alpha_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}|\alpha_1|,\ (\forall)\ n \geqslant 1.}$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, prin definiţie $\alpha_n = \sqrt{b} - x_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci

$$\alpha_n = \sqrt{b} - \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{b}{x_{n-1}}\right) = \frac{2x_{n-1}\sqrt{b} - x_{n-1}^2 - b}{2x_{n-1}} =$$

$$= -\frac{(x_{n-1} - \sqrt{b})^2}{2x_{n-1}} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{b}}{x_{n-1}}\right)\alpha_{n-1}$$

şi deoarece $0 < 1 - \dfrac{\sqrt{b}}{x_{n-1}} \leqslant 1$, avem :

$$|\alpha_n| = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{b}}{x_{n-1}}\right) \cdot |\alpha_{n-1}| \leqslant \frac{1}{2}|\alpha_{n-1}|.$$

Aplicaţie. Să se calculeze $\sqrt{2}$ *cu o eroare* $\leqslant 10^{-2}$.

Dacă alegem $x_1 = 1$, atunci $0 < \alpha_1 = \sqrt{2} - 1 < \dfrac{1}{2}$, deci din $|\alpha_n| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}} \cdot \dfrac{1}{2} \leqslant$ $\leqslant 10^{-2}$ deducem $2^n \geqslant 10^2$, deci $n \geqslant 7$. Rămîne să calculăm pe x_7. Avem succesiv :

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2},\quad x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2}\right) = \frac{17}{12} \text{ etc.}$$

Dacă alegem $x_1 = \dfrac{3}{2}$, atunci cum $\dfrac{7}{5} < \sqrt{2} < \dfrac{3}{2}$, avem $|\alpha_1| < \dfrac{1}{10}$, deci din $|\alpha_n| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}} \cdot \dfrac{1}{10} 10^{-2}$, deducem $2^{n-1} \geqslant 10$, deci $n \geqslant 5$. Rămîne să calculăm pe x_5 ; obţinem succesiv :

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{12},\quad x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{765}{408} \text{ etc.}$$

2.3.125. Exerciţiu. *Să se arate că şirul* $(x_n)_{n \geqslant 1}$, *unde* $x_1 = \sqrt{a}$ $(a > 0)$ *şi* $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$ $(\forall)\ n \geqslant 1$, *este convergent, apoi să se calculeze limita sa.*

Soluţie. Evident avem $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} > \sqrt{a} = x_1$. Fie $n > 1$ cu $x_n > x_{n-1}$. Atunci $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} > \sqrt{a + x_{n-1}} = x_n$, deci conf. principiul inducţiei $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este strict crescător.

Fie acum $n > 1$ fixat. Atunci $x_n > x_1 = \sqrt{a}$, deci $\dfrac{1}{x_n} < \dfrac{1}{\sqrt{a}}$; cum însă $x_n^2 = a + x_{n-1} < a + x_n$, deci $x_n(x_n - 1) < a$ rezultă că $x_n < 1 + \dfrac{1}{x_n} a <$ $< 1 + \dfrac{a}{\sqrt{a}} = 1 + \sqrt{a}$. Am obţinut că $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este majorat de $1 + \sqrt{a}$, deci este convergent ; fie $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Trecînd la limită în relaţia $x_n^2 = a + x_{n-1} (n \geqslant 1)$ obţinem că $x^2 = a + x$. Cum $x > x_1 = \sqrt{a} > 0$, deducem că $x = \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a})$.

Generalizare. 1) Fie $x_n = \sqrt{a + b x_{n-1}}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, unde a, b, $x_0 > 0$ sînt fixaţi. Atunci şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este crescător (resp. descrescător) după cum x_0 este mai mic (resp. mai mare) ca rădăcina pozitivă a ecuaţiei $x^2 - bx - a = 0$.

2) Fie $x_1 = \sqrt[p]{a}$ şi $x_n = \sqrt[p]{a + x_{n-1}}$, $(\forall)\ n \geqslant 2$, unde $a > 0$, şi $p > 1$ sînt fixaţi. Atunci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent şi are drept limită soluţia pozitivă a ecuaţiei $x^p - x - a = 0$.

2.3.126. Exerciţiu. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un şir definit astfel:*

$$x_n = a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + \ldots + a_n \sqrt{2}}},\quad (\forall)\ n \geqslant 1,$$

unde $a_n \in \{-1, 1\}$. Să se arate că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent şi să se calculeze limita sa.

Soluţie. Am arătat (Ex. 2.1.19.) relaţia:

$$x_n = 2 \sin\left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \ldots + \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4},\quad (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Punem $\varepsilon_n = a_1 a_2 \ldots a_n$ $(n \geqslant 1)$; deci $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Evident şirul $\left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_3}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{2^{n-1}}\right)_{n\geqslant 1}$ este şir Cauchy, deci convergent. Atunci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent şi avem:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}}\right),$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\varepsilon_n}{2^{n-1}}\right)$$

Corolar 1. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un şir definit astfel:*

$$x_1 = \sqrt{2},\ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n},\quad (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Atunci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent şi are limita 2.

Soluţie. Punem în Ex. 2.3.126. $a_n = 1$ $(n \geqslant 1)$. Atunci $\varepsilon_n = 1$ $(n \geqslant 1)$ şi avem:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2 \sin\frac{2\pi}{4} = 2$$

2.3.127. Exerciţiu. *Să se studieze natura şirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$ definit astfel*

$$x_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2^n}}},\quad (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Soluţia 1. Deoarece $2^n < 2^n + \sqrt{2^{n+1}}$, $(\forall)$, $n \geqslant 1$, rezultă că $x_n < x_{n+1}$, deci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este strict crescător.

Se deduce imediat prin inducţie că $n < 2^n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Fie $n > 1$; scriem că $n < 2^n + 2$ şi $k < 2^k + 1$, $(\forall)\ k = \overline{1, n-1}$ şi obţinem:

$$x_n < y_n := \sqrt{2^{2+1} + \sqrt{2^{2^1+1} + \ldots + \sqrt{2^{2^{n-1}+1} + \sqrt{2^{2^n+2}}}}}.$$

Însă

$$y_n = \sqrt{2^{2^n+1} + \sqrt{2^{2^1+1} + \ldots + \sqrt{2^{2^{n-1}+1} + 2^{2^{n-1}+1}}}} = y_{n-1},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$y_n = y_{n-1} = y_{n-2} = \ldots = y_1 = \sqrt{2^{2^0+1} + \sqrt{2^{2^1+2}}} = 2\sqrt{2}.$$

Prin urmare $x_n < 2\sqrt{2}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent.

Soluția 2. Evident pentru orice $n \geqslant 1$ avem :

$$x_n < \sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2^{n-1} + 2\sqrt{2^{n-1}}}}} <$$

$$< \sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2^{n-2} + 2\sqrt{2^{n-2} + \sqrt{2^{n-1}}}}}} < \ldots$$

$$< \sqrt{1 + \sqrt{2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \ldots + \sqrt{2^{n-1}})}} = \sqrt{1 + \sqrt{2x_{n-1}}},$$

deci

$$x_n < \sqrt{1 + \sqrt{2x_{n-1}}} \Leftrightarrow x_n^2 - \sqrt{2}\, x_n - 1 < 0,\ x_n > 0 \Leftrightarrow 0 < x_n < \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

Corolar 1. *Să se studieze natura șirului* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *definit astfel*

$$x_n = \sqrt{1 + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a^n}}}\ \ (\forall)\ n \geqslant 1,\ \ \textit{unde}\ \ a \in \mathbf{R}_+.$$

Soluție. Dacă $a > 1$ se reia soluția 2 a Ex. 2.3.127. și se obține că $x_n < \sqrt{1 + \sqrt{a}x_{n-1}}$, de unde se deduce că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este majorat, deci convergent. Dacă $0 < a < 1$, atunci $a^n < 2^n$, deci

$$x_n < \sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2^n}}} < \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6}),\ \ (\forall)\ n \geqslant 1$$

și deci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent.

Corolar 2. *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de numere nenegative cu proprietatea că există* $k > 0$ *a.î.* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{k^n} < \infty$. *Atunci șirul* $(x_n)_{n\geqslant 1}$, *unde* $x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \ldots + \sqrt{a_n}}}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, *este convergent.*

Soluție. Înlocuind k cu $2k$, putem presupune că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{k^n} = 0$. Atunci $(\exists)\ n_0 \geqslant 1$ a.î. $a_n \leqslant k^n$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$ și deci $x_n \leqslant \sqrt{k + \sqrt{k^2 + \ldots + \sqrt{k^n}}}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Din Cor. 1 deducem că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este majorat, deci fiind evident și strict crescător, este convergent.

2.3.128. Exercițiu. *Să se studieze natura șirului* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *definit astfel :*

$$x_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n}}},\ \ (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Soluția 1. Deoarece $\sqrt{n} < \sqrt{n + \sqrt{n+1}}$ șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este strict crescător. Folosind repetat inegalitatea $\sqrt{\alpha} < \frac{1}{2}(1 + \alpha)$, $(\forall)\ \alpha \in \mathbf{R}_+$, deducem :

$$x_n < \frac{1}{2}(1 + 1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n}}) = \frac{2}{2^1} + \frac{2}{2^1}\sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n}} <$$

$$< \frac{2}{2^1} + \frac{1}{2^1}(1 + 2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{n}}) = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{1}{2^2}\sqrt{3 + \ldots + \sqrt{n}} <$$

$$< \ldots < \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}}\sqrt{n} <$$

$$< \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n+1}{2^n} = 2\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{2^k} - 1$$

Așa dar $0 < x_n < 2\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{2^k} - 1$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci (Ex. 2.3.108) $x_n < 2\frac{2}{(1-2)^2} - 1 = 3$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ și deci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent și $\lim_{n\to\infty} x_n \in (1.3]$.

Soluția 2. Deoarece $n < 2^n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ avem :

$$x_n < \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{2^2 + \ldots + \sqrt{2^n}}}}, \quad (\forall)\ n \geqslant 1$$

deci (Ex. 2.3.127) $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este majorat, etc.

Corolar 1. *Să se studieze natura șirului* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *definit astfel*

$$x_n = \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \ldots + \sqrt[n]{n}}}, \quad (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Soluție 1. Deoarece $\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n + \sqrt[n+1]{n+1}}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, rezultă că $x_n < x_{n+1}$, deci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este strict crescător.

Evident $(\forall)\ n > 1$, avem $2^n > n + 2 \Leftrightarrow \sqrt[n]{n+2} < 2$, deci

$$x_n < \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \ldots + \sqrt[n-1]{n - 1 + \sqrt[n]{n+2}}}} <$$

$$< \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \ldots + \sqrt[n-1]{(n-1)+2}}} < \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \ldots + \sqrt[n-2]{(n-2)+2}}} <$$

$$< \ldots < \sqrt{2 + \sqrt[3]{3+2}} = \sqrt{2 + \sqrt[3]{5}}.$$

Așadar $x_n < \sqrt{2 + \sqrt[3]{5}}$ $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este majorat și deci convergent.

Soluția 2. Deoarece $\sqrt[n]{n} < \sqrt{n}$, $(\forall)\ n > 1$, rezultă că $x_n < \sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n}}}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci (Ex. 2.3.128.) $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este majorat, etc.

2.3.129. Exercițiu (Gauss). *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *două șiruri definite astfel :*

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad (\forall)\ n \geqslant 1,$$

unde $a_0, b_0 \in \mathbf{R}_+$ *și* $a_0 < b_0$. *Atunci cele două șiruri sînt convergente și au aceeași limită.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Evident avem

$$b_n - a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2 > 0, \ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

deci

$$a_n < b_n, \quad (\forall)\ n \geqslant 1 \tag{1}$$

De asemenea avem :

$$a_n - a_{n+1} - a_n - \sqrt{a_n b_n} = \frac{a_n(a_n - b_n)}{a_n + \sqrt{a_n b_n}} < 0,$$

deci

$$(a_n < a_{n+1}, \quad (\forall)\ n \geqslant 1 \tag{2}$$

Analog se arată că

$$b_{n+1} < b_n, \quad (\forall)\ n \geqslant 1 \tag{3}$$

Din (1), (2) și (3) deducem că $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ și $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ există (T.2.3.21.(3°)). Trecînd la limită în egalitatea $b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, obținem $b = \frac{1}{2}(a + b)$, deci $a = b$.

Observație. Limita comună a celor două șiruri se numește media *aritmetico-geometrică* a numerelor a_0 și b_0.

2.3.130. Exercițiu (V i è t e). *Să se arate că :*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \cdots \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \ldots + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}}_{n\text{-radicali}} = \frac{2}{\pi}$$

Soluție. Să observăm că :

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$$

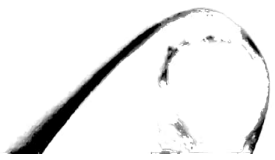
$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{1}{4}\right)} = \cos\frac{\pi}{8}$$

. . . . . .

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \ldots + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)} = \cos\frac{\pi}{2^n}.$$

Prin urmare limita dată este echivalentă cu :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \ldots \cos\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{2}{\pi}. \tag{1}$$



Din Ex. 2.1.21. deducem, pentru $0 = \frac{\pi}{2}$, relaţia :

$$\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\ldots\cos\frac{\pi}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\ldots\cos\frac{\pi}{2^n}\right)=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{2}{\pi}.$$

Aşadar relaţia (1) şi deci relaţia iniţială este arătată.

2.3.131. Exerciţiu (Şirul lui Fibonacci). *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir definit astfel* : $x_1 = x_2 = 1$ *şi* $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $(\forall)\ n\geq 1$ $(x_0 = 0)$. *Atunci* $(\forall)\ n\geq 1$ *avem relaţiile* :

$1^\circ\ x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$;

$2^\circ\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_{n+2} - 1$;

$3^\circ\ x_1 + x_3 + \ldots + x_{2n-1} = x_{2n}$;

$4^\circ\ x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n} = x_{2n+1} - 1$;

$5^\circ\ x_2 - x_3 + x_4 + \ldots + (-1)^n x_n = (-1)^n x_{n-1}$;

$6^\circ\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_n x_{n+1}$;

$7^\circ\ x_{n-1}x_{n+1} - x_n^2 = (-1)^n$;

$8^\circ\ x_{2n} - x_{n+1}^2 - x_n^2 = 0$;

$9^\circ\ x_n^2 + x_{n+1}^2 - x_{2n+1} = 0$;

$10^\circ\ x_{n-2}x_{n+2} - x_n^2 = (-1)^{n+1}$;

$11^\circ\ x_{n-1}x_{n+1} - x_{n-2}x_{n+2} = 2(-1)^n$;

$12^\circ\ C_n^0 + C_{n-1}^1 + \ldots + C_0^n = x_{n+1}$;

$13^\circ\ x_{n+h}x_{n+k} - x_n x_{n+h+k} = (-1)^n x_h x_k$ $(h,\ k\geq 1)$.

Soluţie. 1° Să arătăm prin inducţie relativ la n relaţia

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\quad(\forall)\ n\geq 1. \tag{1}$$

Evident avem

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right].$$

Fie $n\geq 1$ a.î. $x_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$. Atunci $x_{n+1} = x_n +$

$$+ x_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]-\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]\right\}=$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Prin urmare relaţia (1) este arătată.

Să justificăm în alt mod relaţia (1).

Fie ecuaţia $t^2 - t - 1 = 0$, cu rădăcinile $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Din egalităţile : $t_1 + t_2 = 1$ şi $t_1 t_2 = -1$ avem că

$$x_{n+1} = (t_1 + t_2)\, x_n - t_1 t_2\, x_{n-1},$$

de unde succesiv deducem :

$$x_{n+1} - t_2 x_n = t_1 (x_n - t_2 x_{n-1}) = t_1^2 (x_{n-1} - t_2 x_{n-2}) = \ldots = t_1^n (x_1 - t_2 x_0),$$

deci

$$x_{n+1} - t_2 x_n = t_1^n x_1 \tag{2}$$

În mod analog $x_{n+1} - t_1 x_n = t_2^n x_1$ (3)

Scăzînd relaţia (2) din relaţia (3) şi ţinînd cont că $x_1 = 1$, obţinem :

$$x_n (t_2 - t_1) = t_2^n - t_1^n,$$

deci

$$x_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

2° Din definiţia şirului $(x_n)_{n \geq 1}$ avem :

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= x_1 + x_0 \\ x_3 &= x_2 + x_1 \\ x_4 &= x_3 + x_2 \\ &\vdots \\ x_{n+2} &= x_{n+1} + x_n, \end{aligned}$$

de unde prin adunare deducem :

$$x_{n+2} = 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

3° Din definiţia şirului $(x_n)_{n \geq 1}$ avem :

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + x_0 \\ x_4 &= x_3 + x_2 \\ x_6 &= x_5 + x_4 \\ x_8 &= x_7 + x_6 \\ &\vdots \\ x_{2n} &= x_{2n-1} + x_{2n-2}, \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde prin adunare deducem :

$$x_{2n} = x_1 + x_3 + x_5 + \ldots + x_{2n-1}$$

Relaţiile 4° şi 5° se deduc analog cu relaţiile 2° şi 3°. Relaţiile 6°-13° se deduc uşor, fie prin inducţie relativ la n, fie utilizînd relaţia 1° ; Spre exmplu :

6° $\qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_n x_{n+1} \quad (\forall) \quad n \geqslant 1$

Pentru $n = 1$ avem $x_1^2 = x_1 x_2$.
Fie $n \geqslant 1$ a.î. $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_n x_{n+1}$. Atunci

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = x_n x_{n+1} + x_{n+1}^2 = (x_n + x_{n+1})\, x_{n+1} = x_{n+1} x_{n+2}$$

Prin urmare $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_n x_{n+1}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$

7° $\qquad x_{n-1} x_{n+1} - x_n^2 = (-1)^n, \quad (\forall)\ n \geqslant 1.$

Pentru $n = 1$ avem : $x_0 x_2 - x_1^2 = (-1)^1$
Fie $n \geqslant 1$ a.î. $x_{n-1} x_{n+1} - x_n^2 = (-1)^n$. Atunci

$$x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2 = x_n (x_n + x_{n-1}) - x_{n+1} (x_n + x_{n-1}) =$$
$$= -(x_n x_{n+1} - x_n^2) = -1 \cdot (-1)^n = (-1)^{n+1}$$

Prin urmare $x_{n-1} x_{n+1} - x_n^2 = (-1)^n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$
Evident 11° rezultă din 7° şi 10° scăzindu-le.
Corolar 1. *Fie $(x_n)_{n \geqslant 1}$ şirul lui Fibonacci. Atunci :*
1° *Fiecare al cincilea termen al şirului se divide cu 5 ;*

2° $$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_2 & x_3 & \ldots & x_{n+1} \\ \vdots & & & \\ x_n & x_{n+1} & \ldots & x_{2n-1} \end{vmatrix} = 0, \quad (\forall)\ n \geqslant 3$$

Soluţie. 1° Să arătăm în prealabil relaţia :

$$x_n = 5x_{n-4} + 3x_{n-5}$$

Într-adevăr

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} = (x_{n-2} + x_{n-3}) + (x_{n-3} + x_{n-4}) =$$
$$= (x_{n-3} + x_{n-4}) + 2x_{n-3} + x_{n-4} = 3x_{n-3} + 2x_{n-4} =$$
$$= 3\,(x_{n-4} + x_{n-5}) + 2x_{n-4} = 5x_{n-4} + 3x_{n-5}$$

Să arătăm prin inducţie că $x_{5n} \vdots 5$, $(\forall)$, $n \geqslant 1$.
Evident $x_5 = 5$, deci $x_5 \vdots 5$. Fie $n \geqslant 1$ a.î. $x_{5n} \vdots 5$. Atunci cf. (1) $x_{5(n+1)} = 5x_{5n+1} + 3x_{5n}$, deci $x_{5n(+1)} \vdots 5$ şi deci $x_{5n} \vdots 5$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.
2° Determinantul considerat este 0, deoarece prima linie plus a doua este egală cu linia a treia.
Corolar 2. *Fie $(x_n)_{n \geqslant 1}$ şirul lui Fibonacci. Atunci :*

1° $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_{n-1}}{x_n} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (*numărul „de aur”*) ;

2° $(\exists)\ p > 0$, *unic a.î.* $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{p^n} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$;

Scanned with OKEN Scanner

3° $(\exists)\ p>0$ *unic a.î.* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{p^{n+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$;

4° $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$;

5° *Seria* $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{x_n}$ *este convergentă adică* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}<+\infty$;

6° *Seria* $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$ *are suma* $\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$.

Soluție: 1° Evident avem:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]:\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\cdot\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}}\to\frac{1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}},$$

deoarece $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|<\dfrac{1}{2}$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n=0$.

2° Să arătăm că pentru $p=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ avem satisfăcută condiția din enunț. Într-adevăr avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{p^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[1-\frac{\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right]=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

Numărul $p>0$, determinat mai sus este unic: fie $p>0$, $p'>0$, a.î. $\dfrac{x_n}{p^n}\to\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\dfrac{x_n}{p'^n}\to\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, deci $\left(\dfrac{p}{p'}\right)^n=\dfrac{x_n}{p^n}\cdot\dfrac{p'^n}{x_n}\to\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{1}=1$ și deci $\dfrac{p}{p'}=1$, adică $p=p'$.

3° Deoarece $x_1+x_2+\ldots+x_n=x_{n+2}-1$, din 2° avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{p^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+2}}{p^{n+2}}-\frac{1}{p^{n+2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Unicitatea lui $p>0$ se deduce ca în cazul 2°.

4° Cum $\sqrt[n]{x_n}=p\left(\dfrac{x_n}{p^n}\right)^{1/n}$, cu $p=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, și $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{p^n}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=p\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^0=p$.

Scanned with OKEN Scanner

5° Fie $a_n = \frac{1}{x_n}$, $n \geqslant 1$. Atunci $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x_n}{x_{n+1}}$, deci cf. 1° $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \rho < 1$. Aşadar există $N \geqslant 1$ a.î. $a_{n+1} \leqslant \rho a_n$, $(\forall)$ $n \geqslant N$, deci

$$a_{N+p} \leqslant \rho^p a_N, \quad (\forall)\ p \geqslant 1.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \rho^p = \frac{\rho}{1-\rho} < \infty$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{N} a_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} a_{N+p} \leqslant \sum_{i=1}^{N} a_i + a_N \frac{\rho}{1-\rho} < \infty.$$

6° Am văzut că $s_n = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_n x_{n+1}$ $(\forall)$ $n \geqslant 1$.

Să arătăm că $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{s_i} = \frac{x_n}{x_{n+1}}$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$ (1)

Într-adevăr, pentru $n = 1$, avem : $\frac{1}{s_1} = \frac{x_1}{x_2}$.

Fie $n \geqslant 2$ a.î. $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{s_i} = \frac{x_n}{x_{n+1}}$. Atunci

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{(-1)^{i+1}}{s_i} = \frac{x_n}{x_{n+1}} + \frac{(-1)^{n+2}}{s_{n+1}} = \frac{x_n}{x_{n+1}} + \frac{(-1)^{n+2}}{x_{n+1}x_{n+2}} =$$

$$= \frac{x_n x_{n+2} + (-1)^n}{x_{n+1}x_{n+2}} = \frac{x_{n+1}^2}{x_{n+1}x_{n+2}} = \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}},$$

deoarece $x_n x_{n+2} = x_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$.

Prin urmare relaţia (1) este adevărată.

Atunci cf. 1° $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{s_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$.

2.3.132. Exerciţiu. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ şirul lui Fibonacci şi $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un şir definit astfel* $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{5}{a_{n-1}}\right)$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, *unde* $a_0 = 1$. *Am văzut* (Cor. 2. Ex. 2.3.131.) *că* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *şi* (Ex. 2.3.124.) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{5}$, *deci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+a_n}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. *Să se arate că şirul* $\left(\frac{1+a_n}{2}\right)_{n\geqslant 1}$ *este un subşir al şirului* $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\geqslant 1}$.

Soluţie. Să calculăm expresia lui a_n în funcţie de a_0 şi b, unde $b = 5$. Evident, $(\forall)$ $n \geqslant 1$ avem :

$$\frac{a_n - \sqrt{b}}{a_n + \sqrt{b}} = \frac{\frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{b}{a_{n-1}}\right) - \sqrt{b}}{\frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{b}{a_{n-1}}\right) + \sqrt{b}} = \left(\frac{a_{n-1} - \sqrt{b}}{a_{n-1} + \sqrt{b}}\right)^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

De aici deducem imediat că :

$$\frac{a_n - \sqrt{b}}{a_n + \sqrt{b}} = \left(\frac{a_{n-2} - \sqrt{b}}{a_{n-2} + \sqrt{b}}\right)^{2^1} = \ldots = \left(\frac{a_0 - \sqrt{b}}{a_0 - \sqrt{b}}\right)^{2^n},$$

deci

$$a_n = \frac{1 + \left(\frac{a_0 - \sqrt{b}}{a_0 + \sqrt{b}}\right)^{2^n}}{1 - \left(\frac{a_0 - \sqrt{b}}{a_0 + \sqrt{b}}\right)^{2^n}} \sqrt{b} = \frac{(a_0 + \sqrt{b})^{2^n} + (a_0 - \sqrt{b})^{2^n}}{(a_0 + \sqrt{b})^{2^n} - (a_0 - \sqrt{b})^{2^n}} \cdot \sqrt{b}.$$

Înlocuind a_0 cu 1 și b cu 5, pentru $\frac{1 + a_n}{2}$ se obține expresia :

$$\frac{1 + a_n}{2} = \frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}\right)^{2^n} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}\right)^{2^n}} \tag{1}$$

Pe de altă parte am văzut (Ex. 2.3.131). că

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \quad (\forall)\ n \geqslant 1,$$

deci

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}\right)^n \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}\right)^n}. \tag{2}$$

Din (1) și (2) deducem relația : $\frac{1 + a_n}{2} = \frac{x_{2n+2}}{x_{2n}}$, $(\forall)\ n \geqslant 0$, deci șirul $\left(\frac{1 + a_n}{2}\right)_{n \geqslant 1}$ este un subșir al șirului $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n \geqslant 1}$.

Cu alte cuvinte : orice termen al șirului $\left(\frac{1 + a_n}{2}\right)_{n \geqslant 1}$ care aproximează prin exces pe $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ este egal cu cîtul a doi termeni consecutivi din șirul lui Fibonacci.

Exemplificare

$(x_n)_{n \geqslant 1} \equiv 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \ldots$

$$(a_n)_{n \geqslant 0} \equiv 1, 3, \frac{7}{3}, \frac{47}{21}, \frac{2207}{987}, \ldots \ldots \ldots$$

$$\left(\frac{1 + a_n}{2}\right)_{n \geqslant 1} \equiv 1, 2, \frac{5}{3}, \frac{34}{21}, \frac{1597}{987}, \ldots \ldots \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Comentarii. Pentru soluția dată mai sus a fost esențială prima aproximantă a_0 a lui $\sqrt{5}$ egală cu 1.

2.3.133. Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ șirul lui Fibonacci. Atunci avem proprietățile :*

1° $(\forall)$ $k \geq 3$, *suma a k termeni consecutivi ai șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ nu aparține șirului ;*

2° *Dacă p_n este al n-lea număr prim cu $p_1 = 1$, avem $p_n \leq x_{n+1}$ $(\forall)$ $n \geq 1$;*

3° *Fiecare număr natural se scrie ca suma unor termeni diferiți ai șirului $(x_n)_{n\geq 1}$.*

Soluție. 1° Fie $m \geq 1$ fixat și $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+k-1}$ k termeni consecutivi ai șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ iar s suma lor. Atunci avem :

$$s > x_{m+k-2} + x_{m+k-1} = x_{m+k}$$

și

$$x_{m+k+1} = (x_{m+k+1} - x_{m+k}) + (x_{m+k} - x_{m+k-1}) + \ldots + (x_{m+2} - x_{m+1}) +$$

$$+ x_{m+1} = (x_{m+k-1} + x_{m+k-2} + \ldots + x_m) + x_{m+1} > s,$$

deci

$$x_{m+k} < s < x_{m+k+1},$$

prin urmare $s \neq x_n$, $(\forall)$ $n \geq 1$.

2° Ținînd seama că

$$(p_n)_{n\geq 1} = (1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots)$$

și

$$(x_n)_{n\geq 1} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$$

avem $p_n = x_{n+1}$ pentru $n = \overline{1,4}$.

Fie $n > 1$ cu $p_k \leq x_{k+1}$, $(\forall)$ $k = \overline{1,n}$. Atunci utilizînd inegalitatea cunoscută :

$$p_{n+1} \leq p_{n-1} + p_n, \quad (\forall), \quad n \geq 1,$$

rezultă că

$$p_{n+1} \leq x_n + x_{n+1} = x_{n+1}.$$

deci, cf. principiului inducției, $p_n \leq x_n$, $(\forall)$ $n \geq 1$.

3° Fie $n \in \mathbf{N}$ și $P(n)$ propoziția :

$(\forall)$ $1 \leq m \leq x_n$ el se reprezintă ca suma unor termeni diferiți ai șirului finit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$.

Evident $P(2)$ este adevărată ; fie $n \geq 2$ cu $P(k)$ adevărată $(\forall)$ $k = \overline{1,n}$ și fie m natural $1 \leq m \leq x_{n+1}$ fixat.

Dacă $m \leq x_n$ el se poate scrie ca suma unor termeni diferiți ai șirului finit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$, deci și ai șirului finit $(x_i)_{1\leq i<n+1}$. Presupunem că $m > x_n$. Avem $m - x_n \leq x_{n-1}$, altfel din $m - x_n > x_{n-1}$ ar rezulta că $m > x_n + x_{n-1} = x_{n+1}$. absurd. Așadar $m = (m - x_n) + x_n$ și $m - x_n \leq x_{n-1}$. Cum $P(n-1)$ este adevărată, $m - x_n$ se scrie ca suma unor termeni diferiți ai șirului finit $(x_i)_{1\leq i\leq n-1}$, deci m se scrie ca suma unor termeni diferiți ai șirului finit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ și deci $P(n+1)$ este adevărată.

Scanned with OKEN Scanner

În virtutea principiului inducției $P(n)$ este adevărată $(\forall)\ n \geqslant 2$.

Observăm în fine că $(\forall)\ m \in \mathbf{N}$ există x_n cu $m \leqslant x_n$, deci m se scrie ca o sumă finită de termeni diferiți ai șirului lui Fibonacci.

2.3.134. Exercițiu (T r. L a l e s c u). *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)$.

Soluție (M. Țena). Am văzut (T.2.5.10. Cor 2) că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e},\quad\text{deci}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{n+1}{n}=\mathrm{e}.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{n+1}{n}=\mathrm{e}^{-1}\cdot\mathrm{e}\cdot 1=1$$

și

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\left(\frac{(n+1)!}{(\sqrt[n]{n!})^{n+1}}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\left(\frac{n!\cdot(n+1)}{n!\sqrt[n]{n!}}\right)^n}=\mathrm{e}$$

Dacă punem $a_n=\dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$ și $b_n=\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}$ $(n\geqslant 1)$, avem

$$(a_n)^n=\left[(1+(a_n-1))^{\frac{1}{a_n-1}}\right]^{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot b_n}\quad(\forall)\ n\geqslant 1. \tag{1}$$

Deoarece $(a_n)^n\to\mathrm{e}$, $(1+(a_n-1))^{1/a_n-1}\to\mathrm{e}$ și $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}\to\mathrm{e}$, rezultă că șirul $(b_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent, deci din (1) prin trecere la limită obținem :

$$\mathrm{e}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\Leftrightarrow\lim b_n=\mathrm{e}^{-1}.$$

2.3.135. Exercițiu. *Fie* $a,\ r\in\mathbf{R}_+^*$ *și* A_n (*resp.* G_n) *media aritmetică* (*resp. geometrică*) *a numerelor* : $a,\ a+r,\ \ldots,\ a+(n-1)r$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{G_n}=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Soluție. Din P.2.1.31. avem $G_n\leqslant A_n$ $(\forall)\ n\geqslant 1$ și cum $G_n>0$, rezultă că $0<\dfrac{G_n}{A_n}\leqslant 1$, $(\forall)\ n\geqslant 1$, deci șirul $\left(\dfrac{G_n}{A_n}\right)_{n\geqslant 1}$ este mărginit. Se vede imediat că șirul $\left(\dfrac{G_n}{A_n}\right)_{n\geqslant 1}$ este descrescător, deci este convergent. Să calculăm limita sa. Evident avem :

$$\frac{G_n}{A_n}=\frac{(a(a+r)\ldots(a+(n-1)r))^{1/n}}{\frac{1}{n}(a+a+(n-1)r)\cdot\frac{n}{2}}=2\left[\frac{a(a+r)\ldots(a+(n-1)r}{(2a+(n-1)r)^n}\right]^{1/n}.$$

Din T. 2.3.25. Cor. 4. deducem :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{G_n}{A_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a(a+r)\dots(a+nr)}{(2a+nr)^{n+1}}:\frac{a(a+r)\dots(a+(n-1)r)}{(2a+(n-1)r)^n}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{a+nr}{2a+nr}\cdot\left(\frac{2a+(n-1)r}{2a+nr}\right)^n=2\cdot 1\cdot\frac{1}{e}=\frac{2}{e}\text{ etc.}$$

Corolar 1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e.$$

Soluție. Punem $a=r=1$ în Ex. 2.3.135.

2.3.136. Exercițiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un șir de numere care satisface condiția :*

$$x_{n+m}\leq x_n+x_m,\ (\forall)\ n,\ m>1$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$ *există și este egală cu* $\inf\limits_{n\geq 1}\frac{x_n}{n}$

Soluție. Notăm $\lambda=\inf\limits_{n\geq 1}\frac{x_n}{n}$ și să presupunem că $\lambda>-\infty$. Fie $\varepsilon>0$. fixat. Din definiția marginii inferioare, există $n_0\geq 1$ a.î. $\frac{x_n}{n}\leq\lambda+\varepsilon$. Fie $M=\max\limits_{1\leq i\leq n_0}x_i$. Orice număr natural m se scrie

$$m=n\,n_0+n_1,\text{ unde }0\leq n_1<n_0\text{ și }n=\left[\frac{m}{n_0}\right]$$

Din ipoteză rezultă $x_m\leq n\,x_{n_0}+x_{n_1}$, deci

$$\lambda\leq\frac{x_m}{m}\leq\frac{nx_{n_0}}{m}+\frac{x_{n_1}}{m}\leq\frac{n\,n_0}{m}(\lambda+\varepsilon)+\frac{M}{m}$$

și deci

$$\lambda\leq\frac{x_m}{m}\leq\frac{\left[\frac{m}{n_0}\right]}{\left[\frac{m}{n_0}\right]}(\lambda+\varepsilon)+\frac{M}{m}$$

Cum $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\left[\frac{m}{n_0}\right]}{\frac{m}{n_0}}=1$ și $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{M}{m}=0$, există $m_\varepsilon\geq 1$ a.î.

$$\frac{\left[\frac{m}{n_0}\right]}{\frac{m}{n_0}}(\lambda+\varepsilon)\leq\lambda+2\varepsilon\text{ și }\frac{M}{m}\leq\varepsilon,\ (\forall)\ n\geq m_\varepsilon,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$\lambda \leqslant \frac{x_m}{m} \leqslant \lambda + 3\varepsilon, \ (\forall)\ m \geqslant m_\varepsilon$$

Prin urmare

$$\lim_{m\to\infty} \frac{x_m}{m} = \lambda.$$

Dacă $\lambda = -\infty$ se raționează la fel.

Observație. Ex. 2.3.137. poate fi generalizat astfel : Fie $a \geqslant 0$ și $f : (a, \infty) \to \mathbf{R}$ o funcție subaditivă a.î. $\sup f(A) < +\infty$, $(\forall)$ mulțimea $A \subseteq (2a, \infty)$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \inf\limits_{x>a} \frac{f(x)}{x} < +\infty$ (E. Hille, R. Phillips, Functional analysis and semi-groups, cap. VII ; Amer. Math. Soc., Colloq. Public., vol. XXXI, 1957).

2.3.138. Exercițiu. *Să se arate că* $(\forall)\ n \in \mathbf{N}\setminus\{1\}$ *ecuația* $x^n - nx + 1 = 0$ *are două rădăcini* α_n *și* β_n *cu proprietățile :*

$$1^\circ\ 0 < \alpha_n < 1 < \beta_n ;\ 2^\circ \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \lim_{n\to\infty} \beta_n = 1.$$

Soluție. Fie polinomul $P_n = X^n - nX + 1$. Deoarece $P_n(0) = 1 > 0$, $P_n(1) = -n + 1 < 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} P(x) = \infty$, există $\alpha_n \in (0,1)$ și $\beta_n \in (1, \infty)$ a.î. $P_n(\alpha_n) = P_n(\beta_n) = 0$.

Din egalitatea $\alpha_n^n - n\alpha_n + 1 = 0$ și $\alpha_n \in (0,1)$, rezultă că

$$0 < \alpha_n = \frac{1 + \alpha_n^n}{n} < \frac{2}{n}, (\forall)\quad n \geqslant 1,$$

de unde prin trecere la limită obținem că $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Din egalitatea $\beta_n^n - n\beta_n + 1 = 0$ și $\beta \in (1, \infty)$, rezultă că

$$\beta_n^n = n\beta_n - 1 < n\beta_n, \ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

deci

$$1 < \beta_n^{n-1} < n, \ (\forall)\, n \geqslant 1$$

și deci

$$1 < \beta_n < \sqrt[n-1]{n}\ , \ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

de unde prin trecere la limită obținem cf. P.2.4.1. (1°) că $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 1$.

2.3.139. Exercițiu. *Fie* $a, b \in \mathbf{R}$, $\lambda \in (0,2)$ *fixați și* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir definit astfel :* $x_0 = a$, $x_1 = b$, $\ldots$, $x_n = \lambda x_{n-1} + (1 - \lambda) x_{n-2}$, $(\forall)\ n \geqslant 2$. *Atunci* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este convergent și are limita* $a + \frac{b-a}{2-\lambda}$

Soluție. Evident avem :

$$x_n - x_{n-1} = \lambda x_{n-1} + (1 - \lambda)\ x_{n-2} - x_{n-1} = (\lambda - 1)\,(x_{n-1} - x_{n-2}),$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde deducem că

$$x_n - x_{n-1} = (\lambda - 1)^{n-1}(x_1 - x_0), \quad (\forall), \quad n \geqslant 1$$

Atunci avem :

$$x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_1 - x_0) =$$

$$= [(\lambda - 1)^{n-1} + (\lambda - 1)^{n-2} + \ldots + (\lambda - 1)^1 + 1] \ (x_1 - x_0) =$$

$$= \frac{1 - (\lambda - 1)^n}{1 - (\lambda - 1)}(x_1 - x_0) = \frac{1 - (-1)^n(1 - \lambda)^n}{2 - \lambda}(x_1 - x_0), \ (\forall) \ n \geqslant 1.$$

Cum $0 < \lambda < 2$, avem $|\lambda - 1| < 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda - 1)^n = 0$.

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 + \frac{1}{2 - \lambda}(x_1 - x_0) = a + \frac{b - a}{2 - \lambda}$

Corolar 1. *Fie* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ *şi* $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$, $(\forall)\ n \geqslant 2$.

Atunci $x_n = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^n}{2^n}\right)$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$.

2.3.140. Exerciţiu. *Să se arate relaţiile :*

1° $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$;

2° $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}\ldots\sin\frac{\pi}{n}} = 0$;

3° $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\ldots\sin\frac{\pi}{n}} = \pi$.

Soluţie. Aplicînd T.2.3.25. Cor. 3. deducem :

1° $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} n = 0$;

2° $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}\ldots\sin\frac{\pi}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n} = 0$ etc.

2.3.141. Exerciţiu. *Utilizînd lema Cesaro-Stolz* (T.2.3.26.) *să se arate că :*

1° $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k = +\infty$;

2° $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln k} = 0$;

3° $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ln k = 0$;

4° $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 0$;

5° $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = 2$;

6° $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n} = \infty \ (a > 1)$;

7° $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$;

8° $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$;

9° $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \frac{2}{3}$;

10° $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}k^p = \frac{1}{p+1} \ (p \in \mathbf{R}_+)$;

Scanned with OKEN Scanner

11° $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+a)^{p+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}(a+k)^p=\frac{1}{1+p}(a,p\in\mathbf{R}_+)$;

12° $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1^p+2^p\ldots+n^p}{n^{p+1}}-\frac{1}{p+1}\right)=\frac{1}{2}$, $(\forall)\ p\in\mathbf{N}$;

13° *Dacă* $x_{n+1}=x_n-x_n^2(\forall)\ n\geqslant 1$ *şi* $0<x_1<1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=0$.

Soluţie. 1° Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=\infty$, din T.2.3.25. Cor. 1 avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k=\infty$

Se poate arăta că şirul dat $\left(\frac{\ln n!}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ este crescător.

2° Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$, din T.2.3.25. Cor. 1 avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln k}=0$.

3° Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$ (cf. 7°), din T.2.3.25. Cor. 1 avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}=0$.

4° Analog cu 2°.

5° Dacă punem $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ şi $\lambda_n=\sqrt{n}(\forall)\ n\geqslant 1$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1})^{-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=2,\ \text{deci (T.2.3.25.)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\lambda_n}=2.$$

6° Punem $x_n=a^n$ şi $\lambda_n=n$, $(\forall)\ n\geqslant 1$ etc.

7° Punem $x_n=\ln n$ şi $\lambda_n=n\,(\forall)\ n\geqslant 1$ etc.

8° Dacă $a_n=\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ atunci $\ln a_n=\frac{1}{n}\left[n\ln n-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k\right]$ $(\forall)\ n\geqslant 1$.

Să punem $x_n:=n\ln n-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k$ şi $\lambda_n=n\,(\forall)\ n\geqslant 1$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}=\lim_{n\to\infty}[(n+1)\ln(n+1)-n\ln n-\ln(n+1)]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1,$$

deci (T.2.3.25). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\lambda_n}=1$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln a_n}=e$

9° Să punem $x_n:=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}$ şi $\lambda_n=n\sqrt{n}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}=\frac{2}{3},$$

deci (T.2.3.25.) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\lambda_n}=\frac{2}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

10° Să punem $x_n = 1+2^p + \ldots + n^p$ și $\lambda_n = n^{p+1}$ $(n \geqslant 1)$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}{n\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1\right] + \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1+p},$$

deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1\right] = p$. Din T.2.3.25 avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\lambda_n} = \frac{1}{p+1}$.

11° Punem $x_n := (1+a)^p + \ldots + (n+a)^p$, $\lambda^p = (n+a)^p$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$ și continuăm ca la 10°.

12° Punem $x_n = (p+1)(1^p + 2^p + \ldots + n^p) - n^{p+1}$ și $\lambda_n = (p+1)n^p$, $(\forall) n \geqslant 1$. Atunci

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \frac{(p+1)(n+1)^p - (n+1)^{p+1} + n^{p+1}}{(p+1)[(n+1)^p - n^p]} =$$

$$= \frac{n^{p-1}[(p+1)C_p^1 - C_{p+1}^2] + n^{p-2}[\ldots] + \ldots}{n^{p-1}(p+1)C_p^1 + n^{p-2}(p+1)C_p^2 + \ldots}$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \frac{(p+1)C_p^1 - C_{p+1}^2}{(p+1)C_p^1} = \frac{1}{2}$$

și deci (T.2.3.25.) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \frac{1}{2}$.

13° Prin inducție se vede imediat că $(x_n)_{n>1}$ este strict descrescător și $0 < x_n < 1$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, deci $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ există și cum $x = x - x^2$, avem $x = 0$. Evident însă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1}}{(n+1) - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{x_n x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_n - x_n^2} = 1,$$

deci (T.2.3.25.) avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x_n}}{n} = 1 \text{ și deci } \lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = 1.$$

2.3.142. Exercițiu. *Utilizînd* T.2.3.25. Cor. 4. *să se stabilească relațiile*:

1° $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; 2° $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1$; 3° $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$;

4° $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$; 5° $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = 4$; 6° $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n!} = 1$;

Scanned with OKEN Scanner

$7^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)\,(n+2)\ldots 2n}=\frac{4}{e}$; $\quad 8^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{k}}=0$;

$9^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n)}=1,\ (\forall)\ \lambda>-1.$

Soluție. $1^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$;

$2^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n+\ln\frac{n+1}{n}}{\ln n}=1$;

$3^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e$;

$4^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=+\infty$;

$5^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}:\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\,(2n+2)}{(n+1)^2}=4$;

$6^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)!}{\ln n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\ln n+\ln(n+1)-\ln n}{\ln n!}\right)=$

$$=\lim\left(1+\frac{\ln n}{\ln n!}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n!}\right)=1,$$

deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n-1)!}=0$;

$7^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)\,(n+2)\ldots 2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)\,(n+2)\ldots 2n}{n^n}}=$

$$=\lim\frac{(n+2)\,(n+3)\ldots(2n+2)}{(n+1)^{n+1}}:\frac{(n+1)\,(n+2)\ldots 2n}{n^n}=$$

$$=\lim\frac{n^n(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^{n+2}}=\frac{4}{e};$$

$8^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{k}}=\lim\left(\prod_{k=1}^{n+1}\sin\frac{\pi}{k}\right):\left(\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{k}\right)=\lim\sin\frac{\pi}{n+1}=0.$

$9^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n)}=$

$$=\lim\left[\frac{1}{(n+1)!}(\lambda+1)\ldots(\lambda+n+1)\right]:\left[\frac{1}{n!}(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)\right]=$$

$$=\lim\frac{\lambda+n+1}{n+1}=1.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.3.143. Exerciţiu. *Fie* $a, b \in \mathbf{R}_+$ *fixaţi şi* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir definit recursiv astfel:*

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \sqrt[n+1]{b + x_n^n}, \quad (\forall)\ n \geq 1.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Ind. Se arată prin inducţie că $x_n = \sqrt[n]{a+b(n-1)}$, $(\forall)\ n \geq 2$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

2.3.144. Exerciţiu. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri din* $\mathbf{R}^*$ *care au limita* ∞. *Se pot oare construi două subşiruri* $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ *şi* $(b_{n_k})_{k\geq 1}$ *ale lui* $(a_n)_{n\geq 1}$ *respectiv* $(b_n)_{n\geq 1}$ *a.î.* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{n_k}}{b_{n_k}} = 1$?

Ind. Răspunsul este negativ, după cum arată exemplul următor:

$$a_n = 2^{2n}, \quad b_n = 2^{2n-1}, \quad (\forall)\ n \geq 1.$$

2.3.145. Exerciţiu. *Fie* $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbf{N}^2}$ *un şir dublu de numere reale cu proprietăţile:*

1° $\lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm} = a$; 2° $\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm} = b_n$ $(\forall)\ n \geq 1$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Soluţie. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Din 1° rezultă că există $n_\varepsilon \geq 1$ şi $m_\varepsilon \geq 1$ a.î.

$$|a_{nm} - a| \leq \varepsilon, \quad (\forall)\ n \geq n_\varepsilon \wedge m \geq m_\varepsilon,$$

deci

$$|b_n - a| = \lim_{m\to\infty} |a_{nm} - a| \leq \varepsilon, \quad (\forall)\ n \geq n_\varepsilon$$

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

2.3.146. Exerciţiu. *Un şir numeric* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este constant* $\Leftrightarrow |x_n - x_m| \leq \frac{1}{|n-m|}$, $(\forall)\ n, m \geq 1$, $n \neq m$.

Ind. ($\Leftarrow$) Fie $m, m' \geq 1$ fixaţi arbitrar. Trecînd la limită după n obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_m$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_{m'}$, deci $x_m = x_{m'}$.

2.3.147. Exerciţiu. *Să se scrie termenul general al şirului*

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Ind. Grupul de termeni $1, 2, 3, \ldots n$ este precedat de $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)$ termeni, deci de $\frac{(n-1)n}{2}$ termeni. Atunci avem:

$$a_{\frac{n(n-1)}{2}+k} = k, \quad (\forall)\ n \geq 1 \wedge k = \overline{1, n}.$$

2.3.148. Exerciţiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir definit astfel:* $x_1 \in \mathbf{N}$ *fixat şi* $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$, $(\forall)\ n \geq 1$. *Atunci există o infinitate de termeni ai şirului iraţionali.*

Ind. Dacă $x_n \in \mathbf{Q}$ $(\forall)\ n \geq n_1$, atunci prin inducţie se arată că $x_n \in \mathbf{N}$, $(\forall)\ n \geq n_1$. Deoarece $x_n \in \mathbf{N}$, avem $1 < \sqrt{1 + x_n} \leq x_n$, $(\forall)\ n \geq n_1$, deci $x_{n+1} \leq x_n$, $(\forall)\ n \geq n_1$ şi deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este staţionar. Atunci $(\exists)\ n_0 \geq n_1$ a.î. $\sqrt{1 + x_{n_0}} = x_{n_0}$, deci $x_{n_0} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ absurd.

Scanned with OKEN Scanner

2.3.149. Exerciţiu. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri definite astfel:*

$$a_0 = a,\ b_0 = b\ (0 < a < b),\ a_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+b_{n-1}} \text{ şi } b_n = \frac{b_{n-1}^2}{a_{n-1}+b_{n-1}},\ (\forall)\ n \geq 1.$$

Să se studieze natura celor două şiruri.

Ind. Se deduc imediat relaţiile:

$$b_n - a_n = b_{n-1} - a_{n-1} = \ldots = b - a;\quad \frac{a_n}{b_n} = \left(\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\right)^2 = \left(\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}\right)^{2^2} = \ldots = \left(\frac{a}{b}\right)^{2^n}.$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ şi cum $\frac{a_n}{b_n} = \frac{b_n - (b-a)}{b_n} = 1 - \frac{b-a}{b_n}$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b - a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.3.150. Exerciţiu. *Să se studieze natura şirului* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit astfel*

$$x_n = \ln(1 + x_{n-1}),\ (\forall)\ n \geq 1 \text{ cu } x_0 \in \mathbf{R}_+^* \text{ fixat.}$$

Ind. Din inegalitatea (Ap. 6.2.) $\ln(1+x) < x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$ deducem $\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{\ln(1+x_{n-1})}{x_{n-1}} < 1$, $(\forall)\ n \geq 1$ deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător şi minorat de 0 şi deci $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ există. Cum $x = \ln(1+x)$ obţinem $x = 0$.

Observaţie. Ex. 2.3.150 rezultă şi din principiul contracţiei (T.13.3.5.).

2.3.151. Exerciţiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere definit astfel* $x_n = \sqrt{3x_{n-1} - 2}$, $(\forall)\ n \geq 1$, *unde* $x_0 \in [1, 2]$ *este fixat. Să se arate că* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent şi să se calculeze limita sa.*

Ind. Se arată că $x_n \geq x_0$ şi $0 \leq 4 - x_n^2 > \left(\frac{3}{2+x_0}\right)^n (4 - x_0^2)$, $(\forall)\ n \geq 0$.

2.3.152. Exerciţiu. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de numere întregi definite astfel:*

$$a_1 = 3,\ b_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 2b_n \text{ şi } b_{n+1} = a_n + b_n,\ (\forall)\ n \geq 1.$$

Atunci şirul $r_n = \frac{a_n}{b_n}$ $(n \geq 1)$, *de numere raţionale, satisface proprietăţile:*

1° $r_{2n} < \sqrt{2} < r_{2n-1}$, $(\forall)\ n \geq 1$;

2° $|r_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |r_n - \sqrt{2}|$, $(\forall)\ n \geq 1$;

3° $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \sqrt{2}$.

Ind. 1° şi 2° se arată prin inducţie. Din 2° deducem că $|r_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n} |r_1 - \sqrt{2}|$, $(\forall)\ n \geq 1$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \sqrt{2}$.

2.3.153. Exerciţiu. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir neconstant din* $\mathbf{R}_+^*$ *ai cărui termeni sînt în progresie aritmetică. Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{na_{k+1}} + \sqrt{na_k}}$.

Ind. Avem $a_{n+1} = r + a_n$, $(\forall)\ n \geq 1$, unde $a_1 > 0$ şi $r > 0$, deci

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{na_{k+1}} + \sqrt{na_k}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{r\sqrt{n}}$$

şi deci

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k = \frac{1}{r\sqrt{n}}(-\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}) = -\frac{\sqrt{a_1}}{r\sqrt{n}} + \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a_1 + (n-1)r}{n}} \to \frac{\sqrt{r}}{r}$$

2.3.154. Exerciţiu. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir din* $\mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ *care are limita* 1; $b_n = n(a_n - 1)$ *şi* $c_n = (a_n)^n$ $(\forall)\ n \geq 1$. *Atunci* $(b_n)_{n\geq 1}$ *are limită* $\Leftrightarrow$ $(c_n)_{n\geq 1}$ *are limită. In acest caz avem* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln c_n$.

Ind. $\dfrac{\ln c_n}{b_n} = \ln (a_n)^{1/(a_n-1)} = \ln[1 + (a_n - 1)]^{1/(a_n-1)}$, $(\forall)\ n \geq 1$

Trecem apoi la limită ţinînd cont că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - 1$.

2.3.115. Exerciţiu. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir din* $\mathbf{R}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *un şir din* $\mathbf{R}_+^*$ *care are limita* $+\infty$ *a.î.* $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ *există. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} + \ldots + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}\right) = l$$

Ind. Aplicăm T. 2.3.26.

Aplicaţie

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{1+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{n}{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

2.3.156. Exerciţiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir definit astfel*:

$$x_1 = 1 \text{ şi } x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2 - 2},\ (\forall)\ n \geq 1 \tag{1}$$

Atunci x_n *este număr natural,* $(\forall)\ n \geq 1$.

Ind. Din (1) scoatem pe x_n; obţinem

$$x_n = 2x_{n+1} \pm \sqrt{3x_{n+1}^2 - 2},$$

Prin inducţie însă deducem că $x_n < x_{n+1}$, $(\forall)\ n \geq 1$, deci

$$x_n = 2x_{n+1} - \sqrt{3x_{n+1}^2 - 2}$$

de unde

$$x_{n-1} = 2x_n - \sqrt{3x_n^2 - 2},\ (\forall)\ n \geq 1 \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$, $(\forall)\ n \geq 1$. Este deci evident că x_n este natural, $(\forall)\ n \geq 1$.

2.3.157. Exerciţiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale care satisface proprietăţile:* $x_{n+1}^2 < x_n^2$ *şi* $0 < x_{n+1} + x_n$, $(\forall)\ n \geq 1$. *Atunci* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent.*

Ind. Din inegalitatea $(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n) < 0$, $(\forall)\ n \geq 1$ rezultă că $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. Cum $|x_n| < \sqrt{|x_1|}$, $(\forall)\ n \geq 1$ şirul este mărginit, deci convergent.

2.3.158. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sqrt{n}}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

Ind. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sqrt{n}}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = e$.

Scanned with OKEN Scanner

2.3.159. Exerciţiu. *Să se arate că:*

$1^\circ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{n+n^2} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k+n^2}$; $2^\circ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\ln n} = 0$; $(a>0)$;

$3^\circ \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}\right)^{1/n} = 1 (p>0)$; $4^\circ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+a^n} = \max\{1, a\}, a>0$;

$5^\circ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{n^p} = 0\ (p\geqslant 2)$; $6^\circ \lim\limits_{n\to\infty} (a^n+a^{n+1}+\ldots+a^{kn}) = 0$; $|a|\leqslant 1$, $k\in\mathbf{N}$.

Ind. 1° $|\sin k|<1 \Rightarrow \left|\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{n+n^2}\right| \leqslant \frac{n}{n+n^2} \to 0$ etc.

2° $0 \leqslant \frac{1}{n}\sqrt[n]{\ln n} \leqslant \frac{1}{n}\sqrt[n]{n} \to 0.1 = 0$; 3° $1 \leqslant \left(1+\frac{1}{2^p}+\ldots+\frac{1}{2^p}\right)^{1/n} \leqslant$

$\leqslant n^{1/n} \to 1$.

4° Dacă $0<a<1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} [(1+a^n)^{1/a^n}]^{a^n/n} = e^0 = 1$.

Dacă $1<a<\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} a\cdot\sqrt[n]{1+\left(\frac{1}{a}\right)^n} = a$.

5° $0 < \frac{\ln n!}{n^p} = \frac{1}{n^p}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln k \leqslant \frac{n\ln n}{n^p} = \frac{1}{n^{p-2}}\cdot\frac{\ln n}{n} \to 0$.

6° $0 \leqslant a^n + a^{n+1} + \ldots + a^{kn} = a^n(1+a+\ldots+a^{(k-1)n}) \leqslant \frac{a^n}{1-a} \to 0$.

2.3.160. Exerciţiu. *Să se arate că:*

$1^\circ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^3} = 0$; $2^\circ \lim\limits_{n\to\infty} \cdot \frac{(2n)^n}{(2n)!} = 0$; $3^\circ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n\cdot n!}{(2n)!} = 0$; $4^\circ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = 0$

Ind. 1° Fie $x_n = \frac{(2n)!}{(n!)^3}$; atunci $x_{n+1} = x_n \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^3}$, deci $(\exists)\ n_0 \geqslant$

$\geqslant 1$ a.î. $x_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\cdot x_n$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$ şi deci $0 < x_{n+1} \leqslant \frac{1}{2^n} x_1$, $(\forall) n \geqslant n_0$.

2° Fie $x_n = \frac{(2n)^n}{(2n)!}$; atunci $x_{n+1} = x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$, deci $(\exists)\ n_0 \geqslant 1$

a.î. $x_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} x_n$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$ etc.

3° Utilizăm 2° ţinînd seama că $n! \leqslant n^n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

4° $\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!\,n!}{n![(n+1)\ldots(2n)]} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{n+2}\cdot\ldots\frac{n}{n+2} \leqslant \frac{1}{2^n}$,

deoarece $\frac{i}{n+i} \leqslant \frac{1}{2}$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$ etc.

2.3.161. Exerciţiu. *Să se arate că:*

$1^\circ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+1^p}{1+n^{p+1}} + \frac{2+2^p}{2+n^{p+1}} + \ldots + \frac{n+n^p}{n+n^{p+1}}\right) = \frac{1}{p+1}$ $(p>1)$.

Scanned with OKEN Scanner

$2^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1^p}{n^q}\right)\left(1+\frac{2^p}{n^q}\right)\dots\left(1+\frac{n^p}{n^q}\right)=\infty,\ (\forall)\ p>0\ \text{şi}\ q<p+1;$

$3^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p\cdot 2^p+2^p\cdot 3^p+\dots+n^p(n+1)^p}{n^{2p+1}}=\frac{1}{2p+1}\quad(q\in\mathbf{N});$

$4^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p-2^p+3^p-\dots-(2n)^p}{n^{p+1}}=0$

Ind. $1^\circ\ \frac{k^p}{n^{p+1}}\leqslant\frac{k+k^p}{k+n^{p+1}}\leqslant\frac{k^p}{n^{p+1}}+\frac{k^p}{n^{p+1}},\ (\forall)\ 1\leqslant k\leqslant n$

Sumăm pentru k de la 1 la n şi ţinem seama că :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^p=\frac{1}{p+1};\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}k=0$$

2° Din Ap. 6.6 avem : $\left(1+\frac{1^p}{n^q}\right)\left(1+\frac{2^p}{n^q}\right)\dots\left(1+\frac{n^p}{n^q}\right)\geqslant$

$$\geqslant 1+\frac{1}{n^q}(1^p+2^p+\dots+n^p)=1+n^{p+1-q}\cdot\frac{1^p+2^p+\dots n^p}{n^{p+1}}$$

Ţinem mai departe seama de (T. 2.3.26. Cor. 1).

3° Se ridică la puterea p, se grupează convenabil şi se ţine seama că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2p+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}k^{2p}=\frac{1}{2p+1}$ (T. 2.3.26. Cor. 1).

4° Evident avem identitatea :

$$1^p-2^p+3^p-\dots-(2n)^p=1^p+2^p+\dots+(2n)^p-2^{p+1}(1^p+2^p+\dots+n^p)$$

Împărţim la n^{p+1} şi trecem la limită (T. 2.3.26. Cor. 1) ; obţinem 0.

2.3.162. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a^n}{1+a+a^2+\dots+a^{n+p}}$ *unde* $p\in\mathbf{N}$, *şi* $a>-1$.

Ind. $\lim\limits_{n\to\infty}[\dots]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-a)(1+a^n)}{1-a^{n+p+1}}=\begin{cases}1-a, & |a|<1\\ \frac{1-a}{-a^{p+1}}, & |a|>1\end{cases}$

2.3.163. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{n\ln n}$.

Ind. Cf. Stolz-Cesaro avem :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{n\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\ln(n+1)}=1.$$

2.3.164. Exerciţiu. *Să se stabilească relaţiile* :

$1^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+\dots+n^n}=\infty$; $2^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n[(n+1)!+(n+2)!]}{(n+3)!}=1.$

Ind. 1° Avem $\sqrt[n]{1^n+2^n+\dots+n^n}\geqslant n,\ (\forall)\ n\geqslant 1$

2° Se simplifică cu $(n+1)!$.

Scanned with OKEN Scanner

2.3.165. Exerciţiu. *Să se calculeze limitele :*

$1^\circ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+\ldots+\sin\frac{2n-1}{n^2}\right)$;

$2^\circ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n^2}+\cos\frac{3}{n^2}+\ldots+\cos\frac{2n-1}{n^2}\right)$.

Ind. 1° Înlocuim pe θ cu $\frac{1}{n^2}$ în identitatea (Cor. Ap. 4.1.) :

$$\sin\theta+\sin 3\theta+\ldots+\sin(2n-1)\theta=\sin n\theta\,\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}.$$

Trecem apoi la limită după n.

2.3.166. Exerciţiu *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!}\right)^{(n+p)!}$ $(p\in\mathbf{N}_0)$

Ind. Ţinem seama de relaţia $\frac{k-1}{k!}=\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}$, $(\forall)\,k\geqslant 1$

Se obţine limita e^{-1} (resp. 0) dacă $p=0$ (resp. $p\geqslant 1$)

2.3.167. Exerciţiu. *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir de numere nenegative convergent la* 0. *Atunci există un şir* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *care are limita* ∞ *a.î.* $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$.

Ind. Punem $b_n:=n$, dacă $a_n=0$ şi $b_n=(a_n)^{-\frac{1}{2}}$, dacă $a_n\neq 0$.

2.3.168. Exerciţiu. *Să se construiască un şir* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *de numere pozitive care nu are limită a.î. şirul* $(\sqrt[n]{x_n})_{n\geqslant 1}$ *este convergent la* 1.

Ind. $x_n=n^{(-1)^n}$ $(\forall)\,n\geqslant 1$.

2.3.169. Exerciţiu. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir definit astfel* $x_n=\frac{1}{n^2+1}$, *dacă* n *par şi* $x_n=\frac{n}{n+1}$, *dacă* n *impar. Atunci* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este mărginit însă nu este convergent.*

Ind. Subşirurile convergente $(x_{2n})_{n\geqslant 1}$ şi $(x_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ au limite diferite.

2.3.170. Exerciţiu. *Să se calculeze limitele :*

$1^\circ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt[n]{n}\right)$; $2^\circ \lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha\,(1-\sqrt[n]{n})$, $(\alpha>0)$;

$3^\circ \lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$, $(\alpha>0)$;

$4^\circ \lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha\left(\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}-\frac{1}{p+1}\right)$, $(p$ *şi* $\alpha>0)$;

$5^\circ \lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n-\gamma\right)$, $(\alpha>0$, γ—*constanta Euler*$)$.

2.3.171. Exerciţiu. *Fie* $\delta:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $\delta(0)=1$ *şi* $\delta(x)=0$, $(\forall)\,x\neq 0$. *Atunci avem :* $\lim\limits_{n\to\infty}\delta\,(\sin(n!\,\pi x))=f(x)$, $(\forall)\,x\in\mathbf{R}$, *unde* f *este funcţia lui Dirichlet.*

Ind. Ţinem seama că $\bigcup\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\mathbf{Z}=\mathbf{Q}$ şi că avem :

$$\sin(n!\,\pi x)=0\Leftrightarrow n!\,\pi x\in\pi\mathbf{Z}\Leftrightarrow x\in\frac{1}{n!}\mathbf{Z}$$

2.3.172. Exerciţiu. *Un şir* $(x_n)_{n\geq 1}$ *din* $\mathbf{R}$ *este periodic* $\Leftrightarrow (\exists)\ p \in \mathbf{N}\setminus\{1\}$ *şi* $\lambda \in \mathbf{R}$ *a.î.* $x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+p} = \lambda$, $(\forall)\ n \geq 1$ (1).

Ind. ($\Leftarrow$). Înlocuim în relaţia (1) pe n cu $n+1$ apoi scădem relaţia (1) şi obţinem $x_{n+p+1} = x_n$, $(\forall)\ n \geq 1$, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ periodic.

($\Rightarrow$) Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este periodic de perioadă p, adică $x_{n+p} = x_n$, $(\forall)\ n \geq 1$, atunci $x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+p-1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_p$, $(\forall)\ n \geq 1$.

2.3.173. Exerciţiu. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de numere a.î.* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Dacă* $(\forall)\ b_k$ *există un subşir* $(a_{k_n})_{n\geq 1}$ *al şirului* $(a_n)_{n\geq 1}$ *care are limita* b_k, *atunci şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *posedă un subşir care are limita* b.

2.3.174. Exerciţiu. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri numerice care au limită. Atunci avem relaţiile :*

1° $\lim\limits_{n\to\infty} \min\{a_n, b_n\} = \min\{\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n\}$;

2° $\lim\limits_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n\}$;

3° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} \min\{a_n, b_n\}$.

În particular avem :

4° $\lim\limits_{n\to\infty} \min\{a_n, (-n)\} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$; 5° $\lim\limits_{n\to\infty} \max\{a_n, n\} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ind. 1° Dacă şirurile sînt convergente utilizăm relaţiile :

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|);$$

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|),\ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$$

Ind. 3° Avem : $\max\{a_n, b_n\} \leq a_n, b_n \leq \min\{a_n, b_n\}$, $(\forall)\ n \geq 1$

Corolar 1. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri numerice monotone. Atunci :*

1° $\lim\limits_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n\}$,

2° $\lim\limits_{n\to\infty} \min\{a_n, b_n\} = \min\{\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n\}$.

2.3.175. Exerciţiu. *Să se arate relaţia :* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} [kx] = \frac{1}{2}x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Ind. $\sum\limits_{k=1}^{n} kx \leq \sum\limits_{k=1}^{n} [kx] < \sum\limits_{k=1}^{n} (kx + 1)$

$$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{xn(n+1)}{2} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} [kx] \leq \frac{1}{n^2}\left(\frac{xn(n+1)}{2} + n\right)$$

2.3.176. Exerciţiu. *) *Utilizînd T. 9.1.4. Cor.2 să se arate relaţiile :*

1° $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}$, $(\forall)\ p > -1$; 2° $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln 2$;

3° $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \ln(1+\sqrt{2})$; 4° $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}} = \sqrt{2} - 1$;

5° $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$; 6° $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k\, e^{\frac{k}{n}} = 1$;

7° $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[n]{a^k} = \frac{a-1}{\ln a}$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$;

*) În Ex. 2.3.176—2.3.182. se utilizează elemente de calcul integral.

Scanned with OKEN Scanner

$8^\circ\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ \operatorname{arctg}\frac{k}{n}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2};$

$9^\circ\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2};$

$10^\circ\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{2}{\pi};\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}=0;$

$11^\circ\ \lim_{n\to\infty}\left[\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(n-1)^\pi}{2n}\right]^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt{2^\pi}};$

$12^\circ\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}=0.$

Soluție 1° Dacă $f(x):=x^p$, $x\in[0,1]$, atunci $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{p+1}$, deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^p=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{\pi}\right)=\frac{1}{p+1}.$$

2° Dacă $f(x):=\frac{1}{1+x}$, $x\in[0,1]$, atunci $\int_0^1 f(x)\,dx=\ln 2$, deci

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\ln 2.$$

3° Dacă $f(x):=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in[0,1]$, atunci

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2}),$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\ln(1+\sqrt{2})$$

4° Dacă $f(x):=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in[0,1]$, atunci $\int_0^1 f(x)\,dx=\sqrt{2}-1$, deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\sqrt{2}-1.$$

5° Se pune $f(x):=\ln(1+x^2)$, $x\in[0,1]$;
6° Se pune $f(x):=xe^x$, $x\in[0,1]$;
7° Se pune $f(x):=x^x$, $x\in[0,1]$;
8° Se pune $f(x):=x\operatorname{arctg}x$, $x\in[0,1]$;
9° Se pune $f(x):=\sin^2\pi x$, $x\in[0,1]$;
10° Se pune $f(x):=\sin\pi x$, $x\in[0,1]$; $f(x):=\cos\pi x$, $x\in[0,1]$;

Scanned with OKEN Scanner

11° Se pune $f(x) := \ln \sin x$, $x \in (0, 1]$ și se ține seama de relația $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ (P. 11.3.1. Exemplul 5). Atunci :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \sin \frac{k\pi}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = -\frac{\pi}{2} \ln 2,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \left[\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2n}\right]^{\frac{1}{n}} = e^{-\frac{\pi}{2}\ln 2} = 2^{-\frac{\pi}{2}}.$$

12° Se pune $f(x) := \sin 2\pi x$, $x \in [0, 1]$; $f(x) := \cos 2\pi x$, $x \in [0, 1]$.

Corolar 1. *Să se arate că* :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$$

Soluție. Rezultă din 1° pentru $p=1$ resp. $p = -\frac{1}{2}$.

Corolar 2. *Să se arate că pentru* $(\forall)\, p \in \mathbf{N}$ *avem* :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^p + 4^p + \ldots + (2n)^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 3^p + \ldots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}.$$

Soluție. Evident avem $\lim_{n\to\infty} \frac{2^p + 4^p + \ldots + (2n)^p}{n^{p+1}} = 2^p \cdot \frac{1}{p+1}$ și

$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + (2n)^p}{n^{p+1}} = 2^{p+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + (2n)^p}{(2n)^{p+1}} = 2^{p+1} \cdot \frac{1}{p+1}$.

Prin urmare $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 3^p + \ldots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^{p+1}}{p+1} - \frac{2^p}{p+1} = \frac{2^p}{p+1}$.

Corolar 3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 3^p + \ldots + (2n-1)^p}{2^p + 4^p + \ldots + (2n)^p} = 1, \quad (\forall)\, p > -1$$

Corolar 4. *Să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[1^p x] + [2^p x] + \ldots + [n^p x]}{n^{p+1}} = \frac{x}{p+1}, \quad (\forall)\, x \in \mathbf{R} \text{ și } p \in \mathbf{R}_+.$$

Soluție. Deoarece $k^p x - 1 \leqslant [k^p x] \leqslant k^p x$, $(\forall)\, k \in \mathbf{N}$, rezultă că

$$(1^p + 2^p + \ldots + n^p)\, x - n \leqslant [1^p x] + [2^p x] + \ldots + [n^p x] \leqslant$$
$$\leqslant (1^p + 2^p + \ldots + n^p)\, x,$$

deci $\lim_{n\to\infty} \frac{[1^p x] + [2^p x] + \ldots + [n^p x]}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1^p + 2^p + \ldots + n^p)\, x}{n^{p+1}} = \frac{x}{p+1}$.

Corolar 5. *Să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^p}{1 + n^{p+1}} + \frac{2^p}{2 + n^{p+1}} + \ldots + \frac{n^p}{n + n^{p+1}}\right) = \frac{1}{p+1} \quad (\forall)\, p > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Să notăm $x_n := \frac{1^p}{1+n^{p+1}} + \frac{2^p}{2+n^{p+1}} + \ldots + \frac{n^p}{n+n^{p+1}}$. Atunci

$$\frac{1}{n+n^{p+1}}(1^p+2^p+\ldots+n^p) < x_n < \frac{1}{1+n^{p+1}}(1^p+2^p+\ldots+n^p)$$

Ținem mai departe seama că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}(1^p+2^p+\ldots+n^p) = \frac{1}{p+1}, (\forall)\, p>0 \quad \text{(T. 2.3.26. Cor. 1)}$$

2.3.177. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}$

Ind. $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

2.3.178. Exercițiu. *Să se calculeze limitele:*

1° $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{n+1}\cdot\sqrt[n+2]{n+2}\ldots\sqrt[2n]{2n}\right)$;

2° $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right]$;

3° $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

4° $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\frac{2}{\sqrt{n}+2}+\ldots+\ldots+\frac{n}{\sqrt{n}+n}\right)\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Ind. 2° Se pune $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in[0,1]$ și se ține seama că $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$; 3° Se pune $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in(0,1]$; obținem limita 2; 4° Se pune $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$, $x\in[0,1]$; obținem limita $\frac{4}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2.3.179. Exercițiu. *Să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{a^k b^{n-k}} = \frac{a-b}{\ln a-\ln b}, \quad (\forall)\, a,b\in\mathbf{R}_+^*,\ a\neq b$$

Ind. Fie $f(x)=\left(\frac{a}{b}\right)^x$, $x\in\mathbf{R}_+$. Atunci avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{a^k b^{n-k}} = b\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = b\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{a-b}{\ln a-\ln b}$$

2.3.180. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\prod\limits_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{1/n}$

Ind. Fie $x_n=\frac{1}{n^4}\prod\limits_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{1/n}$. Atunci avem

$$\ln x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) \text{ deci } \lim_{n\to\infty}\ln x_n = \int_0^1\ln(1+x^2)\,dx =$$

$$= x\ln(1+x^2)-2x+2\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 \text{ etc.}$$

Scanned with OKEN Scanner

2.3.181. Exerciţiu. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(an+1)(an+2)\ldots(an+n)},\quad (a\in\mathbf{R}_+^*)$$

Ind. Punem $x_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(an+1)(an+2)\ldots(an+n)}$. Atunci

$$\ln x_n=\ln\left[\left(a+\frac{1}{n}\right)\left(a+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(a+\frac{n}{n}\right)\right]^{1/n}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(a+\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1\ln(a+x)\,dx=\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)^a-1+\ln(1+a)$$

2.3.182. Exerciţiu. *Să se calculeze*: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^p(n-k)^p$ $(p\in\mathbf{N})$.

Ind. Se calculează sumele de forma

$$s_n(p)=\sum_{k=1}^{n}k^p(n-k)^p \text{ şi se obţine } s_n(1)=\frac{n(n^2-1)}{6},$$

$$s_n(2)=\frac{n(n^4-1)}{30}, s_n(3)=\frac{n(n^2-1)(3n^4+3n^2+10)}{420}\text{ etc...}$$

sau

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^p(n-k)^p=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\left(1-\frac{k}{n}\right)^p=$$

$$=\int_0^1 x^p(1-x)^p\,dx=\frac{(p!)^2}{(2p+1)!},\ (\forall)\ p\geqslant 1\ \text{(P. 9.4.1. Exemplul 10)}.$$

2.3.183. Conjectură. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir definit astfel*: $x_1\in\mathbf{N}$, $x_{n+1}=x_n/2$ *dacă* x_n *este par şi* $x_{n+1}=3x_n+1$ *dacă* x_n *este impar. Atunci* $(\exists)\ n_0$ *cu* $x_{n_0}=1$.

Ind. Se încearcă să se raţioneze cu x_1 scris în baza 2.

2.4. Limite extreme ale unui şir de numere reale

2.4.1. Exerciţiu. *Să se calculeze limitele extreme ale şirului* $a_n:=\sin\frac{n\pi}{3}$ $(n\geqslant 1)$.

Soluţie. $(\forall)\ n\in\mathbf{N}$, el se reprezintă sub forma $6k, 6k\pm1, 6k\pm2, 6k+3$ $(k\in\mathbf{N})$. Evident avem $a_{6k}=a_{6k+3}=0$, $a_{6k+1}=a_{6k+2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $a_{6k-1}=a_{6k-2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $(a_n)_{n\geqslant 1}$, se descompune în trei subşiruri distincte, toate constante. Atunci $L(a_n)_{n\geqslant 1}$, mulţimea punctelor limită ale şirului dat, este egală cu $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, deci $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n=\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

2.4.2. Exerciţiu. *Să se determine limitele extreme ale şirului* $(x_n)_{n\geq 1}$, *unde* x_n *este cel mai mare număr prim din descompunerea în factori primi ai numărului* n.

Soluţie. Dacă $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} (p_i \neq 1, i = \overline{1, k})$, avem $x_n = \max\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Fie P mulţimea tuturor numerelor prime şi $p \in P$ fixat. Atunci $(\forall)\ n = p^{\alpha} (\alpha \in \mathbf{N})$, avem $x_n = p$, deci p apare în şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de o infinitate de ori şi deci $p \in L(x_n)_{n\geq 1}$, de unde rezultă că $P \subseteq L(x_n)_{n\geq 1}$. Cum $x_n \in P$, $(\forall)\ n \geq 1$, deducem că $L(x_n) \subseteq P$, deci $L(x_n) = P$, şi deci

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup P = \infty, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf P = 2$$

2.4.3. Exerciţiu. *Să se calculeze limitele extreme ale şirurilor definite astfel :*

$$1^\circ\ x_n = \frac{n}{n+1} \sin \frac{n\pi}{2} (n \geq 1); \quad 2^\circ\ x_n = (-1)^n \sqrt[n]{n} (n \geq 1)$$

$$3^\circ\ x_n = \begin{cases} a^n & \text{dacă } n \text{ par} \\ b^n & \text{,, } n \text{ impar} \end{cases} \quad (a, b \in \mathbf{R},\ a < b).$$

Soluţie. 1° Evident avem $x_{4k} = 0$, $x_{4k+1} = \frac{4k+1}{4k+2} \to 1$, $x_{4k+3} = -\frac{4k+3}{4k+4} \to -1$, $x_{4k+2} = 0$ şi

$$(x_n)_{n\geq 1} = (x_{4k})_{k\geq 1} \cup (x_{4k+1})_{k\geq 1} \cup (x_{4k+2})_{k\geq 1} \cup (x_{4k+3})_{k\geq 1},$$

deci (T. 2.5.7. Cor. 3) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \max\{-1, 0, 1\} = 1$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \min\{-1, 0, 1\} = -1$

2° Evident avem $x_{2k} = \sqrt[2k]{2k} \to 1$, $x_{2k-1} = -\sqrt[2k-1]{2k-1} \to -1$ şi $(x_n)_{n\geq 1} = (x_{2k})_{k\geq 1} \cup (x_{2k-1})_{k\geq 1}$, deci (T. 2.5.7. Cor. 3) :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \max\{-1, 1\} = 1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \min\{-1, 1\} = -1,$$

3° Dacă $0 < a < b < 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} b^n = 0$, deci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Dacă $a = 1 < b$, atunci $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 1$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \infty$

Dacă $a < b = 1$, atunci $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 0$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 1$.

Dacă $1 < a < b$, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

2.4.4. Exerciţiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale. Dacă*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, (x_n + y_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \text{ sau } \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n y_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n,$$

pentru orice şir $(y_n)_{n\geq 1}$ *de numere reale, atunci* $(x_n)_{n\geq 1}$ *are limită.*

Soluţie. Dacă este adevărată prima relaţie atunci pentru $y_n = -x_n$ $(\forall)\ n \geq 1$ avem :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n - \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, (x_n + y_n) = 0,$$

deci $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ şi deci (T. 2.5.4.) $(x_n)_{n\geq 1}$ are limită.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă este adevărată a doua relație, atunci pentru $y_n = -1$, $(\forall)\ n \geq 1$, avem :

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n y_n = -\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n = -(\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n)\,(-1),$$

deci $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ și deci $(x_n)_{n\geq 1}$ are limită.

2.4.5. Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir din* **R**. *Atunci $(\forall)\ x \in L(x_n)_{n\geq 1}$, există $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ un subșir monoton al șirului dat care are limita x.*

Soluție. Deoarece $x \in L(x_n)_{n\geq 1}$ există $(x_{n_s})_{s\geq 1}$ un subșir al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ care are limita x. Construim mai departe un subșir monoton $(x_{n_{s_k}})_{k\geq 1}$ al șirului $(x_{n_s})_{s\geq 1}$ care are limita x.

2.4.6. Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir din* **R**. *Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ mulțimea $L(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginită.*

Soluție. ($\Rightarrow$) Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit există $M > 0$ a.î. $-M \leq x_n \leq M$, $(\forall)\ n \geq 1$. Fie $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ un subșir al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ care are limita x. Din $|x_{n_k}| \leq M$, $(\forall)\ k \geq 1$, rezultă că $|x| \leq M$, deci $L(x_n)_{n\geq 1} \subseteq [-M, M]$ și deci $L(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginită.

($\Leftarrow$). Presupunem $L(x_n)_{n\geq 1}$ mărginită. Atunci $(\exists)\ M > 0$ a.î. $L(x_n)_{n\geq 1} \subseteq [-M, M]$. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Cf. T. 2.5.6. și T. 2.5.7. există $N \geq 1$ a.î. $-M - \varepsilon \leq x_n \leq M + \varepsilon$, $(\forall)\ n \geq N$ și deci

$$\min\{x_1, x_2, \ldots x_N, -M-\varepsilon\} \leq x_n \leq \max\{x_1, x_2, \ldots x_N, M+\varepsilon\},\ n \geq 1$$

Prin urmare $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

2.4.7. Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ două șiruri din* **R**. *Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, atunci șirurile $(x_n y_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ au aceleași puncte limită.*

Soluție. Fie $y \in L(y_n)_{n\geq 1}$ fixat. Atunci există $(y_{n_k})_{k\geq 1}$ un subșir al șirului $(y_n)_{n\geq 1}$ care are limita y, deci $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} y_{n_k} = y$ și deci $y \in L(x_n y_n)_{n\geq 1}$ de unde rezultă că $L(y_n)_{n\geq 1} \subseteq L(x_n y_n)_{n\geq 1}$.

Reciproc dacă $z \in L(x_n y_n)_{n\geq 1}$, atunci există $(x_{n_k} y_{n_k})_{k\geq 1}$ un subșir al șirului $(x_n y_n)_{n\geq 1}$ care are limita z, deci $\lim_{n\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} (x_{n_k} y_{n_k})/x_{n_k} = \frac{z}{1}$ și deci $z \in L(y_n)_{n\geq 1}$, de unde rezultă că $L(x_n y_n)_{n\geq 1} \subseteq L(y_n)_{n\geq 1}$.

2.4.8. Exercițiu. *Fie $A \subseteq$* **R** *o mulțime finită. Atunci există un șir $(x_n)_{n\geq 1}$ din* **R** *a.î. $L(x_n)_{n\geq 1} = A$.*

Soluție. Fie $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ o enumerare a mulțimii A și $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir definit astfel :

$$\underbrace{a_1, a_2, \ldots a_k}, \underbrace{a_1 + \frac{1}{2}, a_2 + \frac{1}{2}, \ldots a_k + \frac{1}{2}}, \ldots \underbrace{a_1 + \frac{1}{n}, a_2 + \frac{1}{n}, \ldots a_k + \frac{1}{n}}, \ldots$$

Atunci $\left(a_i + \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ este un subșir convergent al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ care are limita a_i, $i = \overline{1, n}$, deci $A \subseteq L(x_n)_{n\geq 1}$. Reciproc, fie $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ un subșir al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ care are limita x. El este de forma :

$$a_{i_1}, a_{i_2} + \frac{1}{2}, \ldots a_{i_n} + \frac{1}{n}, \ldots,$$

unde $a_{i_n} \in \{a_1, a_2, \ldots a_k\}$. Cum $\frac{1}{n} \to 0$, rezultă că $a_{i_n} \to x$, deci evident $x \in \{a_1, a_2, \ldots a_k\}$ și deci $L(x_n)_{n\geq 1} \subseteq A$.

Scanned with OKEN Scanner

2.4.9. Exerciţiu. *Fie* $(r_n)_{n\geq 1}$ *o enumerare a mulţimii* $\mathbf{Q}$. *Să se determine numerele* $\underline{\lim}_{n\to\infty} r_n$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} r_n$, *şi mulţimea* $L\,(r_n)_{n\geq 1}$.

Ind. Dacă $x \in \overline{\mathbf{R}}$, $(\exists)(r_{n_k})_{k\geq 1}$ un subşir al şirului $(r_n)_{n\geq 1}$ cu $r_{n_k} \to x$, deci $L(r_n)_{n\geq 1} = \overline{\mathbf{R}}$ şi deci (T.2.5.7.) $\underline{\lim}_{n\to\infty} r_n = -\infty$ şi $\overline{\lim}_{n\to\infty} r_n = +\infty$.

2.4.10. Exerciţiu. *Să se calculeze limitele extreme ale şirurilor următoare:*

$$1^\circ \quad x_n = n^{(-1)^n} (n \geq 1); \quad 2^\circ \quad x_n = n \sin \frac{n\pi}{n} \, (n \geq 1)$$

2.4.11. Exerciţiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere pozitive. Atunci avem:*

$$l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \, n \left(\frac{1 + x_{n+1}}{x_n} - 1 \right) \geq 1$$

Soluţie. Presupunem prin absurd că $l < 1$. Atunci $(\exists)\, N \geq 1$ a.î.

$$n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n} - 1\right) < 1, \ (\forall)\, n \geq N \Leftrightarrow n(1 + x_{n+1} - x_n) < x_n, \ (\forall)\, n \geq N \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n+1)x_n - n\,x_{n+1} > n, (\forall)\, n \geq N \Leftrightarrow \frac{x_n}{n} - \frac{x_{n+1}}{n+1} > \frac{1}{n+1}, (\forall)\, n \geq N$$

Sumînd de la N la $N + p$ $(p \geq 1)$ obţinem:

$$\frac{x_N}{N} > \frac{x_N}{N} - \frac{x_{N+p}}{N+p} > \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \ldots + \frac{1}{N+p} \tag{1}$$

Seria $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{N+p}$ fiind divergentă, relaţia (1) este absurdă, deci $l \geq 1$.

Observaţie. $(\forall)\, \varepsilon > 0$ există $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbf{R}_+^*$ a.î. $\overline{\lim}_{n\to\infty} n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n} - 1\right) < 1 + \varepsilon$.

2.4.12. Exerciţiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere pozitive. Atunci avem:*

$$l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n \geq e$$

Soluţie. Deoarece $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, avem (T. 2.5.9.):

$$l \geq e \Leftrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\frac{n(1+x_{n+1})}{(n+1)x_n}\right]^n \geq 1 \tag{1}$$

Presupunînd inegalitatea (1) falsă. Atunci există $N \geq 1$ a.î.

$$\left[\frac{n(1+x_{n+1})}{(n+1)x_n}\right]^n < 1, \ (\forall)\, n \geq N \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(1+x_{n+1})}{(n+1)x_n} < 1, \ (\forall)\, n \geq N \Leftrightarrow \frac{x_n}{n} - \frac{x_{n+1}}{n+1} > \frac{1}{n+1}, \ (\forall)\, n \geq N.$$

Se obţine o contradicţie, continuînd ca în Ex. 2.4.11.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n \geqslant e$

Observație. $(\forall)\ \varepsilon > 0$ există $(x_n)_{n\geqslant 1} \subseteq \mathbf{R}_+^*$ a.î. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n > e + \varepsilon$.

2.4.13. Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\leqslant 1}$ un șir ε-discret de numere reale $\varepsilon > 0$ i.e. $|x_n - x_m| \geqslant \varepsilon$ $(\forall)\ n \neq m$. Atunci $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ și $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ sînt infinite.*

Soluție. Presupunem că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ posedă un punct limită finit; să-l notăm cu x. Atunci $(\exists)\ (x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ un subșir al șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$ care are limita x, deci $(\exists)\ k_\varepsilon \geqslant 1$ a.î. $|x_{n_k} = x_{n_{k'}}| < \varepsilon$, $(\forall)\ k.\ k' \geqslant k_\varepsilon$, absurd. Rămîne că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ nu posedă puncte limită finite. Cum $x_* = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ și $x^* = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ sînt puncte limită ale șirului dat, rezultă că x_* și x^* sînt infinite.

2.4.14. Exercițiu. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir din* **R**. *Atunci oricare ar fi $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ un subșir al șirului dat, avem relațiile:*

$$1^\circ\ \ \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}} x_{n_k};\quad 2^\circ\ \ \overline{\lim_{k\to\infty}} x_{n_k} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

Soluție. Fie $L(x_n)_{n\geqslant 1}$ (resp. $L(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$) mulțimea tuturor punctelor limită ale șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$ (resp. $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$). Evident avem $L(x_{n_k})_{k\geqslant 1} \subseteq L_n(x_n)_{n\geqslant 1}$, deci (T.2.5.7):

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \inf L(x_n)_{n\geqslant 1} \leqslant \inf L(x_{n_k})_{k\geqslant 1} = \underline{\lim_{k\to\infty}} x_{n_k}$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} x_{n_k} = \sup L(x_{n_k})_{k\geqslant 1} \leqslant \sup L(x_n)_{n\geqslant 1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

Observație. Există șiruri pentru care inegalitățile din Ex. 2.4.14. sînt stricte

2.4.15. Exercițiu. *Să se construiască un șir $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de numere reale a.î. mulțimea $L(x_n)_{n\geqslant 1}$ a tuturor punctelor sale limită să fie egală cu $[0,1]$.*

Soluție. Fie $A_n = \left\{x \in [0,1];\ x = \frac{m}{2^n},\ 0 \leqslant m \leqslant 2^n\right\}$. Evident A_n are $2^n + 1$ elemente. Să arătăm că șirul

$$\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{A_1},\ \underbrace{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8}_{A_2},\ \underbrace{x_9, x_{10}, \ldots, x_{17}}_{A_3}, \ldots$$

are proprietățile din enunț.

Într-adevăr fie $x \in [0,1]$ fixat, $a_k = x - \frac{1}{2^{k+1}}$ și $b_k = x + \frac{1}{2^{k+1}}$.

Deoarece $b_k - a_k = \frac{1}{2^k}$ și diferența dintre doi termeni consecutivi ai mulțimii A_k este $\frac{1}{2^k}$, rezultă că $[a_k, b_k] \cap A_k \neq \emptyset$; fie $x_{n_k} \in [a_k, b_k] \cap A_k$ fixat. Evident avem:

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots \text{ și } |x_{n_k} - x| \leqslant b_k - a_k = \frac{1}{2^k},\ (\forall)\ k \geqslant 1,$$

deci $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Scanned with OKEN Scanner

2.4.16. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime numerabilă care nu are puncte de acumulare în $\overline{\mathbf{R}}$. Atunci există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ din $\mathbf{R}$ a.î. $L(x_n)_{n\geq 1} = A$, unde $L(x_n)_{n\geq 1}$ este mulţimea punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.*

Soluţie. Fie $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ o enumerare a lui A şi $(x_n)_{n\geq 1}$ şirul definit astfel :

$$\underbrace{a_1 + 1}, \underbrace{a_1 + \frac{1}{2}, a_2 + \frac{1}{2}}, \ldots \underbrace{a_1 + \frac{1}{n}, a_2 + \frac{1}{n}, \ldots a_n + \frac{1}{n}}, \ldots$$

Deoarece şirul $\left(a_n + \frac{1}{n+k}\right)_{k\geq 1}$ este un subşir a şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ şi converge la a_n, rezultă că $A \subseteq L(x_n)_{n\geq 1}$. Fie $x \in L(x_n)_{n\geq 1}$ fixat. Există atunci $(x'_k)_{k\geq 1}$ un subşir al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ care are limita x. Evident avem :

$$x'_k = a_{i_k} + \frac{1}{n_k}, 1 \leq i_k \leq n_k \text{ şi } n_1 < n_2 < \ldots < n_n < \ldots,$$

deci $\lim\limits_{k\to\infty} a_{i_k} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(x'_k - \frac{1}{n_k}\right) = x$. Dacă $(a_{i_k})_{k\geq 1}$ nu este staţionar, rezultă că x este punct de acumulare (în $\overline{\mathbf{R}}$) al lui A, absurd. Rămîne că $(a_{i_k})_{k\geq 1}$ este staţionar, deci $x = a_{i_k} \in A$ şi deci $L(x_n)_{n\geq 1} \subseteq A$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 3

SERII ŞI PRODUSE INFINITE DE NUMERE

3.1. Serii de numere

3.1.1. Exerciţiu. *Să se studieze natura seriilor :*

$1^\circ \sum_{n\geq 1} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$; $2^\circ \sum_{n\geq 1} \frac{\sin na}{n^2}$ $(a \in \mathbf{R})$;

$3^\circ \sum_{n\geq 1} n \sin\frac{a}{n} (a \neq 0)$; $4^\circ \sum_{n\geq 1} \sin\frac{\pi}{2n}$

Soluţie. $1^\circ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, seria este divergentă (P.3.1.4.)

$2^\circ \sum_{n\geq 1} \left|\frac{\sin na}{n^2}\right| \leqslant \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, seria este absolut convergentă (P. 3.2.2. şi T. 3.2.5. Cor. 1)

$3^\circ \lim_{n\to\infty} n \sin\frac{a}{n} = \lim_{n\to\infty} a \left(\frac{\sin\frac{a}{n}}{\frac{a}{n}}\right) = a \neq 0$, seria este divergentă (P. 3.1.4.).

4° Deoarece $\sin x > \frac{2x}{\pi}, (\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $\sum_{n\geq 1} \sin\frac{\pi}{2n} \geqslant \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ deci seria este divergentă (P. 3.2.2. şi T. 3.2.5. Cor. 1)

3.1.2. Exerciţiu. *Să se studieze natura seriilor :*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}, \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^2+n+1}, \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}}, \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n^4+n+1}},$$

$$\sum_{n\geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}; \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$$

Soluţie. Comparăm fiecare din seriile date cu seria armonică generalizată $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$. Avem :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1} \sim \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \text{(conv.)}; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^2+n+1} \sim \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{(div.)};$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}} \sim \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{(div)}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n^4+n+1}} \sim \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt[12]{n^{13}}} \text{ (conv.)};$$

$$\sum_{n\geq 1}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \sim \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ (div.)}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = \sum_{n\geq 1}\frac{2}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} \sim \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{3/2}} \text{ (conv.)}$$

3.1.3. Exerciţiu. *Să se studieze natura seriilor :*

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}; \quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}; \quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n+1}; \quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n-\ln n};$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^p}\ (p\in \mathbf{R}_+); \quad \sum_{n\geq 1}(-1)^n \sin\frac{1}{n}; \quad \sum_{n\geq 1}(-1)^n \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n}$$

Soluţie. Seriile date sînt convergente cf. T. 3.2.6. Într-adevăr şirurile $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)_{n\geq 1}$, ... $\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ sînt strict descrescătoare şi au fiecare limita 0.

3.1.4. Exerciţiu. *Să se studieze natura seriilor:*

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2n}}, \quad \sum_{n\geq 1}\operatorname{arc\,tg}^n\frac{1}{n}, \quad \sum_{n\geq 1}\frac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

Soluţie. Seriile date sînt convergente cf. T. 3.28. Într-adevăr :

$$1^\circ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2};$$

$$2^\circ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\operatorname{arc\,tg}^n\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n} = 0;$$

$$3^\circ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right) = \frac{1}{e} < 1.$$

3.1.5. Exerciţiu. *Să se studieze natura seriilor :*

$1^\circ \sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{2^n}$; $2^\circ \sum_{n\geq 1} n^2 \operatorname{arc\,sin}\frac{\pi}{2^n}$; $3^\circ \sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}$; $4^\circ \sum_{n\geq 1} n \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

$5^\circ \sum_{n\geq 1}\frac{2.7.12.\ldots(5n-3)}{5.9.13.\ldots(4n+1)}$; $6^\circ \sum_{n\geq 1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.5.8\ldots(3n-1)}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Se aplică criteriul raportului (T. 3.2.7.) :

$1^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}$ (conv.)

$2^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{\arcsin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\arcsin\frac{\pi}{2^n}}\right)=\frac{1}{2}$ (conv.)

$3^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}<1$ (conv.)

$4^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}\right)\left(\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}}\right)=\frac{1}{2}$ (conv.)

$5^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+2}{4n+5}=\frac{5}{4}$ (div.) $6^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}=\frac{3}{2}$ (div.).

3.1.6. Exerciţiu. *Să se arate că* $\sum\limits_{n\geq 1}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n^2}<\frac{\pi}{2}$

Soluție. Evident avem $x>\operatorname{arc\,tg}\ x$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}_+$ deci $\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2}$, $(\forall)\ n>1$ şi deci

$$\sum_{n\geq 1}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n^2}<\operatorname{arc\,tg}\ 1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)+\ldots<$$

$$<\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}<\frac{\pi}{2}$$

3.1.7. Exerciţiu. *Să se arate că seria* $\sum\limits_{n\geq 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ *este convergentă.*

Soluţie. Evident avem :

$$s_n=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\ln\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=$$

$$=\ln\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\cdot\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)\right].$$

Grupînd convenabil termenii produsului obţinut şi ţinînd cont că $\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k=1}\right)=1$, $(\forall)\ k\geq 2$ obţinem $s_n=\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $(\forall)\ n\geq 2$, deci $s=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)=-\ln 2$.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare seria dată este convergentă şi are suma $-\ln 2$.

3.1.8. Exerciţiu. *Să se arate că pentru orice* $p \geqslant 1$ *seria* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1^p + 2^p + \ldots n^p}$ *este convergentă şi apoi să i se calculeze suma în cazul* $p = 1,2,3$.

Ind. Avem $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, deci $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1+2+\ldots+n} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{n(n+1)} = 2$. Analog $1^2 + 2^2 + \ldots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ şi $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + 4\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$ etc.

3.1.9. Exerciţiu.

$1^\circ \sum_{n\geqslant 1} 3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n} = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin x$; $2^\circ \sum_{n\geqslant 1} 2^n \operatorname{tg} 2^n x = \operatorname{ctg} 2x - \frac{1}{x}$;

$3^\circ \sum_{n\geqslant 1} 2^n \operatorname{tg} 2^n x = 2\operatorname{ctg} 2x - \frac{1}{x}$; $4^\circ \sum_{n\geqslant 1} 2^{n-1} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{n-1}} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2^n} = \operatorname{tg} x - x$.

Soluţie. 1° Multiplicăm relaţia $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ cu 3^{n-1} şi înlocuim θ cu $\frac{x}{3^n}$; obţinem:

$$x_n := 3^{n-1}\sin\frac{x}{3^n} = \frac{1}{4}\left(3^n \sin\frac{x}{3^n} - 3^{n-1}\sin\frac{x}{3^{n-1}}\right)$$

Punem $f(n) = \frac{1}{4}3^{n-1}\sin\frac{x}{3^{n-1}}$ $(n \geqslant 1)$. Atunci (P.3.5.2. Cor. 4):

$$\sum_{n\geqslant 1} x_n = \lim_{n\to\infty} f(n) = f(1) = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin x.$$

2° Multiplicăm relaţia $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{ctg}\theta - 2\operatorname{ctg} 2\theta$ cu 2^n şi înlocuim θ cu $2^n x$; obţinem:

$$x_n := 2^n \operatorname{tg} 2^n x = 2^n \operatorname{ctg} 2^n x - 2^{n+1}\operatorname{ctg} 2^{n+1} x$$

Punem $f(n) = 2^n \operatorname{tg} 2^n x$ $(n \geqslant 1)$ şi aplicăm P. 3.5.2. Cor. 1

3° Multiplicăm relaţia $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{ctg}\theta - 2\operatorname{ctg} 2\theta$ cu $\frac{1}{2^n}$ şi înlocuim θ cu $\frac{x}{2^n}$; obţinem

$$x_n := \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{n-1}} \text{ etc.}$$

4° Multiplicăm relaţia $\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\frac{2\theta}{2} = \operatorname{tg}\theta - 2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ cu 2^{n-1} şi înlocuim θ cu $\frac{x}{2^{n-1}}$; obţinem:

$$x_n := 2^{n-1}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{n-1}}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2^n} = 2^{n-1}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{n-1}} - 2^n \operatorname{tg}\frac{x}{2^n} \text{ etc.}$$

3.1.10. Exerciţiu.

$1^\circ \sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$; $2^\circ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$; $3^\circ \sum_{n\geq 1} \frac{n^2+n-1}{(n+1)!} = 1$;

$4^\circ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} = 1$; $5^\circ \sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \infty$.

Soluţie. Aplicăm P. 3.5.2. Cor. 1.

$1^\circ \quad a_n := \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, $(\forall)\ n \geq 1$.

Punem $f(n) = \frac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$. Atunci $a_n = f(n) - f(n+1)$, deci

$$\sum_{n\geq 1} a_n = f(1) - \lim_{n\to\infty} f(n) = 1$$

$2^\circ \quad \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$; punem $f(n) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n-1}$

$3^\circ \quad a_n := \frac{n^2+n-1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$, $(\forall)\ n \geq 1$.

Punem $f(n) = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$ şi observăm că

$$a_n = f(n) - f(n+1),\ (\forall)\ n \geq 1,\ \text{deci} \sum_{n\geq 1} a_n = f(1) = 2$$

$4^\circ \quad a_n := \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $(\forall)\ n \geq 1$

Punem $f(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ şi obţinem $\sum_{n\geq 1} a_n = f(1) = 1$.

$5^\circ \quad a_n := \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$, $(\forall)\ n \geq 1$.

Punem $f(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ şi obţinem $\sum_{n\geq 1} a_n = f(1) = 1$

3.1.11. Exerciţiu.

$1^\circ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{C_{k+n}^k} = \frac{1}{k-1}$, $(\forall)\ k \in \mathbf{N}\setminus\{1\}$; $2^\circ \sum_{n\neq k} \frac{1}{n^2-k^2} = \frac{3}{4k^2}$, $(\forall)\ k \in \mathbf{N}$;

$3^\circ \sum_{n\geq 1} \frac{n+k}{n^2(n+1)^2\ldots(n+2k)^2} = \frac{1}{4k((2k))!)^2}$, $(\forall)\ k \in \mathbf{N}$.

Soluţie. $1^\circ \quad C_{k+n}^k = \frac{(k+n)\ldots(n+2)(n+1)}{k!} = \frac{(n+k)!}{k!\,n!}$,

deci

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{C_{k+n}^k} = \sum_{n\geq 1} \frac{k!\,n!}{(n+k)!} = \frac{1}{k-1} \quad \text{(P.3.5.2. Cor. 3)}$$

În particular obţinem $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{C_{n+1}^2} = 2$

Scanned with OKEN Scanner

2°. Fie $x_n = \dfrac{1}{n^2 - k^2}$ $(n \neq k)$. Atunci

$$x_n = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{n-k} - \frac{1}{n+k}\right) \quad (n \neq k),$$

deci

$$x_n = f(n) - f(n+2k) \quad (n \neq k),$$

unde

$$f(n) = \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{n-k} \quad (n \neq k)$$

Aşa dar (P. 3.5.2. Cor 1) avem :

$$\sum_{n \neq k} x_n = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 2k \\ i \neq k}} f(i) + f(3k) =$$

$$= \frac{1}{2k}\left(-\frac{1}{k-1} - \ldots - 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2k}\,\frac{1}{2k} = \frac{3}{4k^2}$$

3°. Fie $f(n) = \dfrac{1}{4k} - \dfrac{1}{n^2(n+1)^2 \ldots (n+2k-1)^2}$ $(n \geqslant 1)$,

Atunci

$$x_n := \frac{n+k}{n^2(n+1)^2 \ldots (n+2k)^2} = f(n) - f(n+1), \ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Cum $f(n) \to 0$, avem (P. 3.5.2. Cor. 1) $\sum\limits_{n \geqslant 1} x_n = f(1) = 1 \dfrac{1}{4k((2k)!)^2}$

3.1.12. Exerciţiu. *Să se studieze natura seriei*

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{a^{n-1}}{(1 + a^{n-1}b)(1 + a^n b)} \quad (a, b \in \mathbf{R}_+)$$

Soluţie. Dacă $a, b \in \mathbf{R}$ şi $a^n b \neq -1$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, $a \neq 1$ avem :

$$x_n := \frac{a^{n-1}}{(1 + a^{n-1})(1 + a^n b)} = \frac{1}{1-a}\left(\frac{a^{n-1}}{1 + a^n b} - \frac{a^n}{1 + a^n b}\right)$$

Punem $f(n) = \dfrac{1}{1-a} \cdot \dfrac{a^{n-1}}{1 + a^{n-1}b}$. Atunci $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = \begin{cases} 0, & |a| < 1, \\ \dfrac{1}{1-a} \cdot \dfrac{1}{b}, & |a| > 1 \end{cases}$, deci

(P. 3.5.2. Cor. 1) $s = \sum\limits_{n \geqslant 1} x_n = f(1) = \lim\limits_{n \to \infty} f(n)$, adică

$$s = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a} \cdot \dfrac{1}{1+b}, & |a| < 1 \\ \dfrac{1}{1-a} \cdot \dfrac{1}{1+b} - \dfrac{1}{1-a} \cdot \dfrac{1}{b}, & |a| > 1 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să observăm că $a^n b \neq -1$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, dacă $b = 1$ și $a \neq 1$
Dacă $a = 1$ și $b = -1$ seria dată este divergentă.

3.1.13. Exercițiu. *Să se calculeze suma seriilor*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n a_{n+1}};\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}};\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n + a_{n+1}}{a_n^2 a_{n+1}^2};\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n + a_{n+2}}{a_n^2 a_{n+1}^2 a_{n+2}^2},$$

știind că $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ *sînt în progresie aritmetică cu* $a_1 > 0$ *și rația* $r > 0$

Soluție. $x_n := \dfrac{1}{a_n a_{n+1}} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Punem $f(n) := \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{1}{a_n}\ (n \geqslant 1)$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{r[a_1 + (n-1)r]} = 0$,

din P. 3.5.2. Cor. 1 avem $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n = f(1) = \dfrac{1}{ra_1}$

Analog avem:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}\right);\quad \frac{a_n + a_{n+1}}{a_n^2 a_{n+1}^2} =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_{n+1}^2}\right);\quad \frac{a_n + a_{n+1}}{a_n^2 a_{n+1}^2 a_{n+2}^2} = \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{a_n^2 a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_{n+1}^2 a_{n+2}^2}\right) \text{ etc.}$$

3.1.14. Exercițiu. *Să se determine natura seriei* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}$.

Soluție. Seria $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ este divergentă și seria $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ este convergentă, deci suma lor, care coincide cu seria dată, este divergentă.

3.1.15. Exercițiu. *Să se calculeze suma seriei* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2^{n+1}}{a^{2n-1}+1}\ (a > 1)$.

Soluție. Prin inducție se stabilește relația:

$$\frac{1}{a+1} + \frac{2}{a^2+1} + \cdots + \frac{2^{n+1}}{a^{2n-1}+1} = \frac{1}{a-1} - \frac{2^n}{a^{2n}-1}$$

Evident avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{a^{2n}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^n}{a^{2n}}}{1 - a^{-2n}} = 0,$$

deoarece $0 < b := \dfrac{1}{a} < 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n b^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} nb^n = 0$

Prin urmare seria dată are suma $\dfrac{1}{a-1}$.

3.1.16. Exercițiu. *Să se arate că seria* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n - 1(-1)^n}$ *este convergentă și să se afle suma sa.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $a_n := \frac{(-1)^n}{n-(-1)^n}$ și $b_n := a_{2n-1}+a_{2n} = -\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2n(2n-1)}$ $(n \geqslant 1)$. Evident $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ și $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ este convergentă, fiind echivalentă cu seria $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$. Atunci (P.3.1.10.) seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este convergentă și are aceeași sumă cu seria $\sum_{n\geqslant 1} b_n$. Se vede însă imediat că seria $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ are suma $\ln 2$ (P.3.5.3.)

3.1.17. Exercițiu. *Să se afle natura seriei* $\sum_{n\geqslant 1} \sin \pi\sqrt{n^2+1}$.

Soluție. $a_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n)+\pi n) =$

$$= (-1)^n \sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n) = (-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

Evident șirul $b_n := \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ $(n \geqslant 1)$ este strict descrescător și convergent la 0, deci șirul $(\sin b_n)_{n\geqslant 1}$ este strict descrescător și converge la 0. Atunci seria $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n b_n$, care coincide cu seria dată, este convergentă (T. 3.2.6.).

3.1.18. Exercițiu. *Să se studieze natura seriei* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!\,a^n}{(a+a_1)(2a+a_2)\ldots(na+a_n)}$, *unde* $a>0$ *și* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *este un șir convergent de numere pozitive.*

Soluție. Fie $x_n = \frac{n!\,a^n}{(a+a_1)(2a+a_2)\ldots(na+a_n)}$ $(n \geqslant 1)$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{(n+1)a} = \frac{1}{a}\lim_{n\to\infty} a_n$$

Din T. 3.2.9. rezultă că seria dată este convergentă (resp. divergentă), dacă $\lim_{n\to\infty} a_n > a$ (resp. $< a$).

3.1.19. Exercițiu. *Să se studieze natura seriei* $\sum_{n\geqslant 1} a^{\ln n}$ $(a \in \mathbf{R}_+^*)$.

Soluție. Fie $x_n = a^{\ln n}$ $(n \geqslant 1)$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(a^{\ln\frac{n}{n+1}}-1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\ln\frac{n}{n+1}}+1}{\ln\frac{n}{n+1}} \cdot n\ln\frac{n}{n+1} = \ln a \cdot \ln e^{-1} = \ln\frac{1}{a}$$

Din T. 3.2.9. rezultă că seria dată este convergentă (resp. divergentă) dacă $\frac{1}{a} > e$ $\left(\text{resp. } \frac{1}{a} < e\right)$

3.1.20. Exercițiu. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *o serie de numere definită astfel* $a_{2n} = a_{2n+1} = a^n$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, *unde* $a>0$, $a \neq 1$. *Atunci criteriul lui Cauchy este concludent în timp ce criteriul lui D'Alembert este inconcludent.*

Soluție. Evident $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{a_{2n+1}} = \sqrt{a}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{a}$ și deci conform criteriului lui Cauchy (T. 3.1.11.) seria este convergentă, dacă $0 < a < 1$ și divergentă, dacă $a > 1$. Deoarece $a_{n+1}/a_n = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ a, & n = 2k+1 \end{cases}$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \min\limits_{n\to\infty} \{1, n\} \leqslant 1$, și $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \max\{1, a\} \geqslant 1$, deci criteriul lui D'Alembert (T. 3.2.7.) este inconcludent.

3.1.21. Exercițiu. *Există o pereche (a, b) de numere reale pozitive a.î. criteriul lui Cauchy este concludent în timp ce criteriul lui D'Alembert este inconcludent pentru seria* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *unde* $a_{2n-1} = (ab)^{n-1}$ *și* $a_{2n} = a_{2n-1} \cdot b$.

Soluție. Fie $a, b > 0$ arbitrari, atunci $\sqrt[2n]{a_{2n}} = a^{\frac{n-1}{2n}} b^{\frac{1}{2}} \to (ab)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = (ab)^{\frac{n-1}{2n-1}} \to (ab)^{\frac{1}{2}}$, deci $\sqrt[n]{a_n} \to (ab)^{\frac{1}{2}}$. Atunci dacă $(ab)^{\frac{1}{2}} < 1 \Leftrightarrow ab > 1$, din criteriul lui Cauchy (T. 3.1.11.) deducem că seria $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ este convergentă.

Pe de altă parte $\frac{a_{n+1}}{a_n} \in \{a, b\}$, deci $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \max\{a, b\}$. Atunci dacă $\max\{a, b\} < 1 \Leftrightarrow a < 1 \wedge b < 1$, din criteriul lui D'Alembert (T. 3.2.7.) deducem că seria $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ este convergentă.

Să observăm că orice pereche (a, b) de numere reale pozitive a.î. $ab < 1$ și $\max\{a, b\} = 1$, satisface condițiile din enunț.

3.1.22. Exercițiu. *Să se arate că* $\sum\limits_{p\geqslant 2} \sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^p} = 1$

Soluție. Evident seria următoare:

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

este convergentă, $(\forall)\ p \geqslant 2$, deci (T. 3.3.5.):

$$\sum_{p\geqslant 2} \sum_{p\geqslant 2} \frac{1}{n^p} = \sum_{n\geqslant 2} \sum_{p\geqslant 2} \frac{1}{n^p}$$

Cum

$$\sum_{p\geqslant 2} \frac{1}{n^p} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

și

$$\sum_{n\geqslant 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \right.$$
$$\left. + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right] = 1,$$

Scanned with OKEN Scanner

deducem că

$$\sum_{p\geqslant 2}\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^p}=1$$

3.1.23. Exerciţiu. *Un vas conţine $l\geqslant 1$ litri de alcool. Se scoate din vas un litru de alcool şi se pune în loc un litru de apă, se scoate apoi un litru de amestec şi se pune în loc un litru de apă. Operaţia se repetă din nou. După cîte operaţii în amestecul din vas se află cel mult $l'<l$ litri de alcool*

Ind. La fiecare operaţie scoatem din vas succesiv cîte: 1, $\frac{l-1}{l}$, $\left(\frac{l-1}{l}\right)^2,\ldots$ litri de alcool. Deoarece $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{l-1}{l}\right)^n=l$, pentru $\varepsilon=l'$, $(\exists)\ n_0=$ $=n_0(l')\geqslant 1$ a.î.

$$l-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{l-1}{l}\right)^k\leqslant l,\ (\forall)\ n\geqslant n_0.$$

3.1.24. Exerciţiu. *Să se studieze natura seriei* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin n}{n^p}$, $p>1$.

Ind. $\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{\sin n}{n^p}\right|\leqslant\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^p}$; seria dată este abs. conv.

3.1.25. Exerciţiu. *Să se studieze natura seriei* $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln^p n}$ $(p\in\mathbf{R})$

Ind. Convergentă, dacă $p>1$ şi divergentă, dacă $p\leqslant 1$.

3.1.26. Exerciţiu. *Să se studieze natura seriei* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n+x^n}$ $(x\in\mathbf{R}_+)$.

Ind. Dacă $0<x\leqslant 1$, atunci $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n+x^n}\sim\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$, deci divergenţă Dacă $x>1$, atunci $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n+x^n}\leqslant\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\infty}\right)^n$, deci convergenţă.

3.1.27. Exerciţiu. *Să se arate că seriile* $\sum_{n\geqslant 1}\cos\frac{n\pi}{3}$ *şi* $\sum_{n\geqslant 1}\sin\frac{n\pi}{3}$ *sînt divergente.*

Ind. Dacă a_n este termenul general, atunci $\lim_{n\to\infty}a_n$ nu există.

3.1.28. Exerciţiu. *Să se afle natura seriei* $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$, $p\in\mathbf{R}$.

Ind. Avem (T. 1.4.3. Exemplul 2) $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<\frac{1}{\sqrt{2n}}$ şi analog $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}>\frac{1}{2\sqrt{n}}$, prin urmare $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p\sim\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2^p\sqrt{n^p}}\sim\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{p/2}}$.

3.1.29. Exerciţiu. *Să se arate relaţia* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}=(1-2^{1-p})\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^p}$, $p>1$)

Ind. Seriile $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ și $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^p}$ sînt evident convergente; fie s respectiv s' suma lor. Atunci avem:

$$s=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n-1)^p}-\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n)^p}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n-1)^p}+\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n)^p}-$$

$$-2\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n)^p}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^p}-\frac{2}{2^p}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^p}=(1-2^{1-p})s'$$

3.1.30. Exerciţiu. *Să se arate inegalităţile:*

$$1^\circ\ \frac{\pi}{6}\leqslant\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{7}{4};\quad 2^\circ\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}\leqslant\frac{5}{4};\quad 3^\circ\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4}\leqslant\frac{21}{19}$$

Ind. Arătăm în prealabil inegalităţile:

$$1^\circ\ \left[\operatorname{arc\,tg}\left(1-\frac{1}{n}\right)-\operatorname{arc\,tg}\left(1+\frac{1}{n}\right]<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right.$$

$$2^\circ\ \frac{1}{n^3}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$3^\circ\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{3}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k^3}<\frac{17}{16}+\frac{1}{3}\left(\frac{5}{4}-1-\frac{1}{8}\right)$$

3.1.31. Exerciţiu. *Dacă în seria armonică* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ *eliminăm toţi termenii care conţin o cifră pară, seria rezultată este convergentă şi are suma* <7.

Soluţie. Evident avem:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots=\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{9}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{111}+\frac{1}{113}+\ldots+\frac{1}{999}\right)+\ldots<$$

$$<2+25\cdot\frac{1}{11}+125\cdot\frac{1}{111}+625\cdot\frac{1}{1111}+\ldots<$$

$$<2+\frac{25}{10}+\frac{125}{100}+\frac{625}{1000}+\ldots=2+\frac{25}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{10}}=2+5=7.$$

3.1.32. Exerciţiu. *Să se arate, raţionînd prin reducere la absurd, că seria* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ *este divergentă.*

Soluţie. Presupunem prin absurd seria $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ convergentă şi fie s suma sa.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci avem :

$$s = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \ldots \geqslant \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \ldots \geqslant \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right) = \frac{1}{2} + s,$$

deci

$s \geqslant \frac{1}{2} + s$, absurd. Rămîne că seria dată este divergentă.

3.1.33. Exerciţiu. *Să se studieze natura seriilor* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_{n+1}^p + a_n^p}$ *şi* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_{n+1}^p - a_n^p}$, *ştiind că* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *este un şir neconstant de numere pozitive ai cărui termeni sînt în progresie geometrică.*

Ind. Fie s_n(resp. σ_n) suma parţială de rang n a primei (resp. a celei de-a doua) serii, $a_1 = a$ şi q raţia progresiei. Atunci

$$s_n = \frac{q^p}{a^p(1-q^{2p})} \cdot \frac{1-q^{pn}}{q^{pn}} \text{ şi } \sigma_n = \frac{q^p}{a^p(1-q^p)} \cdot \frac{1-q^{pn}}{q^{pn}}$$

Seriile date sînt convergente (resp. divergente) dacă $q > 1$ (resp. $0 < q < 1$).

3.1.34. Exerciţiu. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *şi* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *două serii numeirce a.î. prima este convergentă şi a doua divergentă. Atunci seria* $\sum_{n\geqslant 1} (a_n + b_n)$ *este divergentă.*

Soluţie. Fie $c_n := a_n + b_n$. Dacă seria $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ ar fi convergentă, atunci seria $\sum_{n\geqslant 1} (c_n - a_n)$ i.e. seria $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ ar fi convergentă, absurd.

3.1.35. Exerciţiu. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *şi* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *două serii numerice a.î. prima este semiconvergentă şi a doua absolut convergentă. Atunci seria* $\sum_{n\geqslant 1} (a_n + b_n)$ *este semiconvergentă.*

Soluţie. Evident $\sum_{n\geqslant 1} (a_n + b_n$ este convergentă. Deoarece seria $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ este divergentă, iar seria $\sum_{n\geqslant 1} |b_n|$ este convergentă, rezultă că seria $\sum_{n\geqslant 1} (|a_n| = |b_n|)$ este divergentă, deci seria $\sum_{n\geqslant 1} ||a_n| - |b_n||$ este divergentă. Cum $||a_n| - |b_n|| \leqslant |a_n + b_n|$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, rezultă că seria $\sum_{n\geqslant 1} |a_n + b_n|$ este divergentă.

3.1.36. Exerciţiu. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *două serii convergente de numere care au suma a resp. b şi a.î.* $a_n \leqslant b_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. *Atunci* $a < b \Leftrightarrow (\exists)\ n_0 \geqslant 1$ *a.î.* $a_{n_0} < b_{n_0}$.

Soluţie. Implicaţia ($\Rightarrow$) este evidentă.

($\Leftarrow$) Fie $c_n := b_n - a_n$. Atunci $c_n \geqslant 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ şi $c_{n_0} > 0$. Deoarece seriile $\sum_{n\geqslant 1} b_n$, şi $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ sînt convergente, rezultă că seria $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ este convergentă, fie c suma sa. Cum $c_{n_0} > 0$, avem $c > 0$, Evident însă $c = b - a$, deci $b > a$.

3.1.37. Exerciţiu. *Dacă seria* $\sum_{n\geqslant 2} |x_n - x_{n-1}|$, *unde* $x_n \in \mathbf{R}$, *este convergentă, atunci* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este convergent. Reciproca nu este numaidecît adevărată.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $s_n = \sum_{k=2}^{n} |x_k - x_{k-1}|$ $(n \geqslant 2)$. Seria $\sum_{n\geqslant 2} |x_n = x_{n\geqslant 1}|$ fiind convergentă rezultă că șirul $(s_n)_{n\geqslant 2}$ este convergent deci Cauchy. Deoarece

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + (x_{n+p-1} - x_{n+p-2}) + (x_{n+1} - x_n)| \leqslant$$

$$\leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| = s_{n+p} - s_n, (\forall)\ n \geqslant 2 \wedge p \geqslant 1,$$

rezultă că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este șir Cauchy deci convergent.

Pentru partea a doua să construim un contraexemplu.

Fie $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $(n \geqslant 1)$. Atunci $x_n \to 0$ și $\sum_{n\geqslant 2} |x_n - x_{n-1}| = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n} = \infty$.

3.1.38. Exercițiu. *Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ și $(b_n)_{n\geqslant 1}$ două șiruri de numere reale nenegative a.î. $(b_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent și are limita nenulă. Atunci seriile $\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$ și $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ au aceeași natură.*

Soluție. Fie $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Evident $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î. $\frac{b}{2} \leqslant b_n \leqslant 2b$, $(\forall)$ $n \geqslant N$, deci $\frac{b}{2} a_n \leqslant a_n b_n \leqslant 2b\, a_n$, $(\forall)\ n \geqslant N$ și deci $\sum_{n\geqslant 1} a_n \sim \sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$.

Prin urmare (P. 3.2.2. Cor. 1) cele două serii au aceeași natură.

3.1.39. Exercițiu. *Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale. Dacă $s := \sum_{n\geqslant 1} a_n^2 < +\infty$, atunci $\tilde{a}_n := \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$.*

Soluție. Utilizînd inegalitatea Cauchy (P. 2.1.27.) obținem :

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{1}{n^2} \cdot n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \frac{s}{n},\ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Prin trecere la limită rezultă $\tilde{a}_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

3.1.40. Exercițiu. *Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir din $\mathbf{R}$ convergent la 0 și $x \in \mathbf{R}$ fixat. Să se studieze natura seriei $\sum_{n\geqslant 1} |x - a_n|$.*

Soluție. Fie $x \in \mathbf{R}$ un punct în care seria dată este convergentă. Atunci $|x - a_n| \to 0$, deci $a_n \to x$ și deoarece $a_n \to 0$, rezultă $x = 0$.

Așadar în orice punct $x \in \mathbf{R}^*$ seria dată este divergentă.

Dacă $x = 0$, atunci seria dată este convergentă $\Leftrightarrow$ seria $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ este convergentă.

Corolar 1. *Seria $\sum_{n\geqslant 1} \left|x - \frac{1}{n}\right|$ este divergentă, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ iar seria $\sum_{n\geqslant 1} \left|x - \frac{1}{n^2}\right|$ este convergentă $\Leftrightarrow x = 0$.*

3.1.41. Exercițiu. *Fie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ o serie numerică absolut convergentă și $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ un șir mărginit de numere. Atunci seria $\sum_{n\geqslant 1} \lambda_n a_n$ este absolut convergentă.*

Soluție. Șirul $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ fiind mărginit $(\exists)\ M > 0$ a.î. $|\lambda_n| \leqslant M$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci $\sum_{n\geqslant 1} |\lambda_n a_n| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} M\, |a_n|$. Deoarece seria $\sum_{n\geqslant 1} M\, |a_n|$ este convergentă, rezultă (P. 3.2.2.) că seria $\sum_{n\geqslant 1} \lambda_n a_n$ este convergentă.

Scanned with OKEN Scanner

Corolar 1. *Fie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *o serie numerică absolut convergentă şi* $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ *un şir numeric convergent. Atunci seria* $\sum_{n\geq 1} \lambda_n a_n$ *este absolut convergentă.*

Observaţie. Dacă seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este simplu şi neabsolut convergentă, Ex. 3.1.41. şi Corolar 1 nu sînt numai decît adevărate.

Corolar 2. *Fie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *o serie numerică absolut convergentă şi* $\sum_{n\geq 1} b_n$ *o serie numerică convergentă. Atunci* $\sum_{n\geq 1} a_n b_n$ *este convergentă.*

Corolar 3. *Fie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *o serie numerică absolut convergentă. Atunci seriile:* $\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$, $\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n a_n$, $\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)a_n$, $\sum_{n\geq 1} a_n \sin nx$ *şi* $\sum_{n\geq 1} a_n \cos nx$ $(x\in\mathbf{R})$ *sînt absolut convergente.*

3.1.42. Exerciţiu. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir strict crescător de numere pozitive care are limita* $+\infty$. *Atunci seria* $\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}$ *este divergentă.*

Soluţie. Evident $(\forall)$ $m-1>n$ avem:

$$r_{nm}=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}}>\sum_{k=1}^{m-1}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_m}=\frac{a_m-a_n}{a_m}=1-\frac{a_n}{a_m}.$$

deci $\lim_{m\to\infty} r_{nm}=1$, $(\forall)$ $n\geq 1$ şi deci (P. 3.1.4.) seria dată este divergentă.

3.1.43. Exerciţiu. *Dacă* $x_n\in\mathbf{R}^*$, $(\forall)$ $n\geq 1$, *atunci seria* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *sau seria* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{x_n}$ *este divergentă.*

Soluţie. Într-adevăr dacă ambele serii sînt convergente, atunci (P.3.1.4.) $|x_n|\to 0$ şi $\frac{1}{|x_{n-1}|}\to 0$, deci $1=|x_n|\frac{1}{x_n}\to 0$, absurd.

3.1.44. Exerciţiu. *Fie* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *o serie cu termeni nenegativi. Atunci* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *este convergentă* $\Leftrightarrow(\exists)$ $\pi:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ *bijectivă a.î. seria* $\sum_{n\geq 1} x_{\pi(n)}$ *este convergentă* $\Leftrightarrow\sum_{n\geq 1} x_n$ *este comutativ convergentă.*

Soluţie. Fie $s_n=\sum_{i=1}^{n} x_i$ şi $\sigma_n=\sum_{i=1}^{n} x_{\pi(i)}$ cu π fixată.

Evident orice termen al şirului $(s_n)_{n\geq 1}$ este majorat de un termen al şirului $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ şi reciproc. Atunci avem că seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este convergentă $\Leftrightarrow\sup_{n\geq 1} s_n<$ $<+\infty\Leftrightarrow\sup\sigma_n<\infty\Leftrightarrow$ seria $\sum_{n\geq 1} x_{\pi(n)}$ este convergentă.

Observaţie Ex. 3.1.44. nu este numaidecît adevărat pentru serii numerice cu termeni arbitrari.

Contraexemplu. Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă şi există π o permutare a lui $\mathbf{N}$ a.î. $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{\pi(n)}}{\pi(n)}$ este divergentă

3.1.45. Exerciţiu. *O serie cu termeni nenegativi* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *este convergentă* $\Leftrightarrow$ *seria* $\sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{1+x_n}$ *este convergentă.*

Soluţie. ($\Rightarrow$) $\frac{x_n}{1+x_n} \leq x_n$, $(\forall)\ n \geq 1$, deci dacă $\sum_{n\geq 1} x_n$ este convergentă rezultă că $\sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{1+x_n}$ este convergentă.

($\Leftarrow$) Dacă $\sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{1+x_n}$ este convergentă, avem $\frac{x_n}{1+x_n} \to 0$ deci $x_n \to 0$ şi deci $0 \leq x_n \leq 1$, $(\forall)\ n \geq n_0$. Atunci $\frac{x_n}{1+x_n} \geq \frac{1}{2} \cdot x_n$, $(\forall)\ n \geq n_0$, deci $\sum_{n\geq 1} x_n$ este convergentă.

3.1.46. Exerciţiu. *Fie* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *o serie convergentă cu termeni nenegativi. Atunci seriile* $\sum_{n\geq 1} \sqrt{x_n x_{n+1}}$ *şi* $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{x_n}}{n^p}\left(p > \frac{1}{2}\right)$ *sînt convergente.*

Ind. $\sqrt{x_n x_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$, $(\forall)\ x \geq 1$.

$$\frac{\sqrt{x_n}}{n^p} = \sqrt{x_n \cdot \frac{1}{n^{2p}}} \leq \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x^{2p}}\right),\ (\forall)\ n \geq 1.$$

Corolar 1. *Fie* $x_n \in \mathbf{R}$ $(n \geq 1)$ *a.î. x seria* $\sum_{n\geq 1} x_n^2$ *este convergentă. Atunci seria* $\sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{n^p}$ *este absolut convergentă* $(\forall)\ p > \frac{1}{2}$.

3.1.47. Exerciţiu. *Fie* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *o serie numerică convergentă. Atunci fiecare termen nenul* x_n *se repetă cel mult de un număr finit de ori.*

Soluţie. Să presupunem că există o infinitate de termeni nenuli ai seriei date egali între ei. Aceasta înseamnă că există $c \neq 0$ şi $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ un subşir al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ a.î. $x_{n_k} = c$, $(\forall)\ k \geq 1$. Seria dată fiind convergentă, avem $x_n \to 0$, deci $x_{n_k} \to 0$ şi deci $c = 0$, absurd.

Aşadar $(\forall)\ n \geq 1$, mulţimea termenilor x_m egali cu x_n este finită.

Corolar 1. *Fie* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *o serie numerică convergentă cu termeni nenuli. Atunci o infinitate de termeni* x_n *sînt diferiţi între ei doi cîte doi.*

Soluţie. Construim prin inducţie un subşir $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $x_n \neq x_1$, $(\forall)\ n > n_1$; $x_n \neq x_{n_1+1}$, $(\forall)\ n > n_2$ etc. Evident avem: $x_{n_k} \neq x_{n_{k'}}$, $(\forall)\ k, k' \geq 1$, $k \neq k'$.

Corolar 2. *O serie* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *ai cărei termeni* x_n *aparţin unei mulţimi finite* $A \subseteq \mathbf{R}^*$, *este divergentă.*

3.1.48. Exerciţiu. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de numere din* $\mathbf{R}^*$ *cu* $a_n + b_n \neq 0$, $(\forall)\ n \geq 1$. *Dacă seriile* $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{b_n}$ *şi* $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2$ *sînt convergente, atunci seria* $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{a_n + b_n}$ *este absolut convergentă.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $N \geqslant 1$ cu $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, $(\forall)\ n \geqslant N$. Atunci $(\forall)\ n \geqslant N$, avem

$$\frac{a_n}{b_n} - \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 \geqslant 0,\ 1 - \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 \geqslant 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{a_n}{a_n + b_n} = \left(\frac{a_n}{b_n} - \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2\right) \frac{1}{1 - \frac{a_n}{b_n}},$$

deci

$$0 \leqslant \frac{a_n}{a_n + b_n} \leqslant \left(\frac{a_n}{b_n} - \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2\right) \cdot \frac{3}{4},\ (\forall)\ n \geqslant N \tag{1}$$

Seriile $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{b_n}$ și $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2$ fiind convergente, din (1) rezultă că seria $\sum_{n\geqslant 1}^{n} \frac{a_n}{a_n + b_n}$ este convergentă.

3.1.49. Exercițiu. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *și* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *două serii absolut convergente care au suma* a *respectiv* b. *Atunci*

$$\max\{a, b\} \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \max\{a_n, b_n\};\ \min\{a, b\} \geqslant \sum_{n\geqslant 1} \min\{a_n, b_n\}$$

Ind. In inegalitatea (Ex. 2.2.11.)

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{n=1}^{n} b_i\right\} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \max\{a_i, b_i\}\ (n \geqslant 1),$$

trecem la limită ținînd seama că seria $\sum_{n\geqslant 1} \max\{a_n, b_n\}$ este absolut convergentă, seria modulelor fiind majorată de seria convergentă $\sum_{n\geqslant 1} (|a_n| + |b_n|)$.

3.1.50. Exercițiu. *Să se arate că suma seriei* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n^2}$ *este un număr irațional.*

Soluție. Seria dată fiind majorată de seria geometrică $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n}$, este convergentă; fie x suma sa. Scriind termenii seriei în baza 2, avem

$$\frac{1}{2} = 0{,}1\ (\text{baza } 2);\ \frac{1}{2^4} = 0{,}0001\ (\text{baza } 2);\ldots,$$

deci pentru x avem următoarea reprezentare

$$x = 0{,}1001000010\ldots\underbrace{0100}_{\text{locul } n^2}\ldots\ (\text{baza } 2)$$

Cum orice număr rațional admite o reprezentare zecimală periodică, deducem că x nu este rațional.

3.1.51. Exercițiu. *Să se studieze natura seriei* $\sum_{n\geqslant 1} \left[x + \frac{n-1}{n}\right]_*$.

Soluție. Vom distinge trei cazuri :

1° $x > 0$, Deoarece $\frac{n-1}{n} \to 1$, există $n_0 \geqslant 1$ a.î. $x + \frac{n-1}{n} > 1$, $(\forall)\, n \geqslant n_0$, deci $\left[x + \frac{n-1}{n}\right]_* \geqslant 1$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ și deci seria dată este divergentă.

2° $x \leqslant -1$. Atunci există $n_0 \geqslant 1$ a.î. $x + \frac{n-1}{n} < 0$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, deci $\left[x + \frac{n-1}{n}\right]_* \leqslant -1$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$ și deci seria dată este divergentă.

3° $-1 < x \leqslant 0$. Atunci există $n_0 \geqslant 1$ a.î. $0 < x + \frac{n-1}{n} < 1$, $(\forall)$ $n \geqslant n_0$, deci $\left[x + \frac{n-1}{n}\right]_* = 0$ $(\forall)\ n \geqslant n_0$ și deci seria dată este convergentă.

3.1.52. Exercițiu. *Să se arate că* $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ *seria* $\sum_{n\geqslant 1} \left[\frac{1}{2^n}(x + 2^{n-1})\right]_*$ *este convergentă, apoi să i se calculeze suma*

Soluție. Să arătăm că $\left[x + \frac{1}{2}\right]_* = [2x]_* - [x]_*$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ (1)

Fie $x \in \mathbf{R}$ fixat. Există atunci $n \in \mathbf{Z}$ și $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$ a.i. (i) $x = n + \alpha$ sau (ii) $x = n + \alpha + \frac{1}{2}$.

(i) Dacă $x = n + \alpha$, atunci $[x]_* = n$, $\left[x + \frac{1}{2}\right]_* = \left[n + \alpha + \frac{1}{2}\right]_* = n$, $[2x]_* = [2n + 2\alpha]_* = 2n$, deci $\left[x + \frac{1}{2}\right]_* = [2x]_* = [x]_*$.

ii) Dacă $x = n + \alpha + \frac{1}{2}$, atunci $[x]_* = n$, $\left[x + \frac{1}{2}\right]_* = [(n+1) + \alpha]_* = n + 1$, $[2x]_* = [(2n+1) + 2\alpha]_* = 2n + 1$, deci $\left[x + \frac{1}{2}\right]_* = [2x]_* - [x]_*$

Relația (1) este arătată. Din (1) avem

$$\left[\frac{1}{2^k}(x + 2^{k-1})\right]_* = \left[\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2}\right]_* = \left[\frac{x}{2^{k-1}}\right]_* - \left[\frac{x}{2^k}\right]_*$$

deci

$$s_n = \left([x]_* - \left[\frac{x}{2^1}\right]_*\right) + \left(\left[\frac{x}{2^1}\right]_* - \left[\frac{x}{2^2}\right]_*\right) + \ldots + \left(\left[\frac{x}{2^{n-1}}\right]_* - \left[\frac{x}{2^n}\right]_*\right) =$$

$$= [x]_* - \left[\frac{x}{2^n}\right]_*, \ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Dacă $x \geqslant 0$, există $n_0 \geqslant 1$ a.î. $0 \leqslant \frac{x}{2^n} < 1$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, deci $\left[\frac{x}{2^n}\right]_* = 0$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$ și deci $s_n = [x]$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$.

Prin urmare suma seriei, pentru $x \geqslant 0$, este $[x]_*$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $x < 0$, există $n_0 \geqslant 1$ a.î. $-1 \leqslant \frac{x}{2^n} < 0$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, deci $\left[\frac{x}{2^n}\right]_* = -1$, $\forall)\ n \geqslant n_0$ și deci $s_n = [x]_* = 1$

Prin urmare suma seriei, pentru $x < 0$, este $[x]_* - 1$.

3.1.53. Exercițiu. *Fie xOy un sistem de axe rectangulare și $(A_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de puncte definit astfel: $A_n = A_n(n, 1)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Dacă α_n este măsura în radiani a unghiului xOA_n, atunci seria $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_{n^2+n+1}$ este convergentă și are suma egală cu $\frac{\pi}{4}$.*

Soluție. Să reprezentăm grafic punctele $A_n (n \geqslant 1)$ (fig. 1)

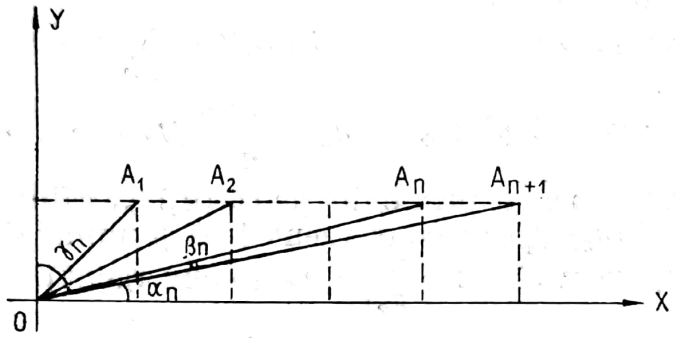


Fig. 1

Fie β_n (resp. γ_n) măsura în radiani a unghiului $A_{n+1}OA_n$ (resp. A_nOy).)

Din considerente geometrice deducem $\sum_{n\geqslant 1} \beta_n = \frac{\pi}{4}$

Cum $\operatorname{tg}(\gamma_n + \beta_n) = n + 1$, rezultă că $\frac{\operatorname{tg}\gamma_n + \operatorname{tg}\beta_n}{1 - \operatorname{tg}\gamma_n \operatorname{tg}\beta_n} = n + 1$

și deoarece $\operatorname{tg}\gamma_n = n$, avem $\frac{n + \operatorname{tg}\beta_n}{1 - n\operatorname{tg}\beta_n} = n + 1$, deci $\operatorname{tg}\beta_n = \frac{1}{n^2 + n + 1}$.

Evident $\operatorname{tg}\alpha_m = \frac{1}{m}$, $(\forall)\ m \geqslant 1$, deci $\operatorname{tg}\beta_n = \operatorname{tg}\alpha_{n^2+n+1} = \frac{1}{n^2 + n + 1}$ și cum $0 < \beta_n, \gamma_n < \frac{\pi}{4}$, rezultă $\beta_n \equiv \alpha_{n^2+n+1}$.

Prin urmare $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_{n^2+n+1} = \sum_{n\geqslant 1} \beta_n = \frac{\pi}{4}$.

Corolar 1. *Seria $\sum_{n\geqslant 1} \operatorname{arc\,ctg}(n^2 + n + 1)$ este convergentă și are suma $\frac{\pi}{4}$.*

3.1.54. Exercițiu. *Dacă seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n^p$ unde $a_n > 0$ $(\forall)\ n \geqslant 1$, este convergentă pentru un $p > 0$, atunci și seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n^{p'}$ este convergentă $(\forall)\ p' > p$.*

Soluție. Deoarece seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n^p$ este convergentă, rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n^p = 0$, deci $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ și deci există $N \geqslant 1$ a.î. $0 < a_n \leqslant 1$, $(\forall)\ n \geqslant N$.

Atunci $a_n^{p'} \leqslant a_n^p$, $(\forall)\ n \geqslant N$ și $p' > p$, adică seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n^{p'}$ este majorată de seria convergentă $\sum_{n\geqslant 1} a_n^p$ și deci este convergentă.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Afirmația reciprocă nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu. Fie $a_n = \frac{1}{\sqrt[p]{n}}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Atunci seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n^p$ este divergentă în timp ce seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n^{p'}$ este convergentă $(\forall)\ p' > p$.

Corolar 1. *O serie cu termeni pozitivi* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *este convergentă (resp. divergentă)* $\Leftrightarrow$ *seria* $\sum_{n\geqslant 1} a_n^p$ *este convergentă* $(\forall)\ 1 \leqslant p < \infty$ *(resp. divergentă* $(\forall)\ 0 < p \leqslant 1$*)*

Problemă. Există serii convergente de numere pozitive $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *a.î. seria* $\sum_{n\geqslant 1} a_n^p$ *este divergentă* $(\forall)\ 0 < p < 1$?

3.1.55. Exercițiu. *O serie cu termeni pozitivi* $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ *este convergentă* $\Leftrightarrow$ *șirul* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *definit astfel :* $a_1 = 1$ *și* $a_{n+1} = a_n + \frac{x_n}{a_n}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, *este convergent.*

Soluție. Se arată imediat prin inducție că $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este un șir crescător de numere pozitive, deci $(a_n)_{p\geqslant 1}$ este convergent dacă și numai dacă este mărginit.

($\Rightarrow$) Să presupunem că seria $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ este convergentă. Cum $a_n \geqslant a_1 = 1$, avem $0 < \frac{x_n}{a_n} \leqslant x_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci seria $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x_n}{a_n}$ este convergentă și deci șirul $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a_k}\right)_{n\geqslant 1}$ este convergent. Evident însă avem :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - 1,\ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Prin urmare șirul $(a_{n+1} - 1)_{n\geqslant 1}$, deci și șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent.

($\Leftarrow$) Să presupunem că $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent, deci există $M > 0$ a.î. $a_n \leqslant M$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Cum prin ipoteză $x_n = a_n(a_{n+1} - a_n)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, rezultă

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} a_k(a_{k+1} - a_k) \leqslant M \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = M(a_{n+1} - a_1) \leqslant M^2,$$

deci seria $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ este convergentă.

3.1.56. Exercițiu. *O serie cu termenii pozitivi* $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ *este divergentă* $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir strict crescător divergent de numere pozitive a.î.* $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1$, $(\forall) n \geqslant 1$.

Soluție. ($\Rightarrow$) Presupunem seria $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ divergentă și fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir definit astfel : $a_1 > 0$ arbitrar și $a_{n+1} = (1 + x_n)\ a_n$, $(\forall)\ n \geqslant 2$. Atunci avem :

$$a_{n+1} = (1 + x_n)(1 + x_{n-1})a_{n-1} = \ldots = (1 + x_n)(1 + x_{n-1}) \ldots (1 + x_1) \cdot a_1, (\forall)\ n \geqslant 1,$$

deci

$$a_{n+1} = (1 + x_n)\ a_n > a_n,\ (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din inegalitatea lui Bernoulli (P. 2.1.28.) deducem:

$$a_{n+1} \geqslant \left(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_1 \text{ deci } \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \infty$$

($\Leftarrow$) Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir strict crescător divergent de numere pozitive a.î. $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$. Atunci $(\forall)$ $1 \leqslant n < m$ avem

$$\sum_{i=n}^{m} x_i = \sum_{i=n}^{m} \frac{a_{i+1} - a_i}{a_i} > \frac{1}{a_{m+1}} \sum_{i=n}^{m} (a_{i+1} - a_i) = 1 - \frac{a_n}{a_{m+1}}$$

Cum $a_m \nearrow \infty$, pentru n fixat, există $m > n$ a.î. $\frac{a_n}{a_{m+1}} < \frac{1}{2}$, deci $\sum_{i=n}^{m} x_i > \frac{1}{2}$ și deci (T. 3.1.11.) seria $\sum_{i\geqslant 1} x_i$ nu este convergentă.

Observație. Seria $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ are termeni ne-negativi $\Leftrightarrow$ șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton crescător.

3.1.57. Exercițiu. *O serie cu termeni pozitivi* $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ *este convergentă* $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir strict crescător divergent de numere pozitive a.î.* $x_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$.

Soluție ($\Rightarrow$) Dacă seria $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ este convergentă și $r_n = \sum_{i\geqslant n} x_i$, atunci (P. 3.1.4.) $r_n \searrow 0$. Fie $a_n := \frac{1}{r_n}$ $(\forall)$ $n \geqslant 1$. Evident avem:

$$a_n \nearrow \infty \text{ și } \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} = r_n - r_{n+1} = x_n, \ (\forall)\ n \geqslant 1.$$

($\Leftarrow$) Dacă $0 < a_n < a_{n+1}$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$ și $a_n \to \infty$ iar $x_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, atunci avem:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}}\right) = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \to \frac{1}{a_1} \ (n \to \infty)$$

Prin urmare seria $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ este convergentă.

3.1.58. Exercițiu. *O serie* $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ *cu termeni din* (0.1) *este divergentă* $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ (a_n) *un șir strict crescător divergent de numere pozitive a.î.* $x_n = 1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$.

Soluție ($\Rightarrow$) Presupunem seria $\sum_{n\geqslant 1} x_n$, divergentă, unde $x_n \in (0, 1)$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$ și fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir definit astfel:

$a_1 > 0$ arbitrar și $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 - x_n}$, $(\forall)$ $n \geqslant 2$. Atunci avem

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 - x_n} \cdot \frac{a_{n-1}}{1 - x_{n-1}} = \ldots = \frac{1}{1 - x_n} \cdot \frac{1}{1 - x_{n-1}} \cdots \frac{1}{1 - x_1} a_1 \qquad (1)$$

Cum $\frac{1}{1-x_i} > 1 + x_i$, $(\forall)\ i \geqslant 1$, din (1) și P. 2.1.28. deducem :

$$a_{n+1} > (1 + x_n)(1 + x_{n+1}) \ldots (1 + x_1) \cdot a_1 \geqslant \left(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \to \infty \ (n \to \infty)$$

Evident avem $a_{n+1} = \frac{1}{1-x_n} a_n > a_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci $(a_n)_{n>1}$ este strict crescător și divergent.

Implicația ($\Leftarrow$) se arată la fel ca în Ex. 3.1.57.

3.1.59. Exercițiu. (Problema fracțiilor egiptene). *Să se arate că mulțimea tuturor sumelor parțiale neordonate ale seriei armonice* $\sum_{n>1} \frac{1}{n}$ *coincide cu mulțimea numerelor raționale pozitive.*

Soluția 1. Fie a/b un număr pozitiv rațional. Atunci

$$a/b = 1/b + \ldots + 1/b$$

o sumă de a termeni din seria armonică cu a-1 „dubluri".

Dezvoltăm recursiv fiecare element duplicat prin identitatea $1/n = 1/n + 1 + 1/n(n+1)$ pînă cînd toți termenii vor fi distincți.

Soluția 2. Deoarece seria armonică este divergentă, putem scade din orice număr rațional pozitiv, suficient de mulți termeni de la începutul seriei astfel încît restul să fie mai mic decît termenul imediat următor seriei. Fie a/b acest rest. Avem $\frac{1}{n} > \frac{a}{b} > \frac{1}{n+1}$ (*) pentru un anume n natural. Atunci $\frac{a}{b} - \frac{1}{n+1} = \frac{an + a - b}{nb + b}$. Din inegalitatea (*) avem că $0 < an + a - b < a$. Așadar fracția nouă va avea un numărător mai mic decît a/b. Continuînd procesul, obținem expresia dorită într-un număr finit de pași, deoarece există numai un număr finit de numărători $< a$.

Observație. $(\forall)\ 1 \neq n \in \mathbf{N} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \notin \mathbf{N}$

3.1.60. Exercițiu (Olivier) (*Fie* $\sum_{n>1} a_n$ *o serie convergentă de numere reale a.î.* $a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. *Atunci* $n \cdot a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Soluție. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Cf. T.3.1.11. $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î.

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots a_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\ n > N$$

Deoarece $a_{N+1} \geqslant a_{N+2} \geqslant \ldots \geqslant a_n$, $(\forall)\ n > N$, rezultă

$$(n - N)a_n \leqslant a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots a_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\ n > N$$

Dacă $n > 2N$, avem $\frac{n}{2} < n - N$, deci $\frac{n}{2} a_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $(\forall)\ n > N$, prin urmare $n \cdot a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Corolar 1. *Fie* $(n_k)_{k>1}$ *un șir strict crescător de numere naturale a.î. seria* $\sum_{k>1} \frac{1}{n_k}$ *este convergentă. Atunci* $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{n_k} = 0$.

Corolar 2. *Să se arate că seria* $\sum_{n>1} n^{-(n+1)/n}$ *este divergentă.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $x_n = n^{-(n+1)/n}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Se vede imediat că șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton descrescător și avem :

$$\lim_{n\to\infty} n\,x_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^{-1} = 1 \text{ etc.}$$

Observația 1. *Seria* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha_n}}$, *unde* $\alpha_n > 1$ $(\forall)$ $n \geqslant 1$, *nu este numaidecît convergentă.*

Observația 2. Dacă $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$ $(\forall)$ $n \geqslant 1$ și $\lim_{n\to\infty} nx_n = 0$, nu rezultă numaidecît că seria $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ este convergentă.

Contraexemplu. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n \ln n}$

Observația 3. Există serii convergente cu termeni pozitivi $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ a.î. $(n\,x_n)_{n\geqslant 1}$ este nemărginit, deci neconvergent.

Exemplu. Fie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$, unde $x_n = \frac{1}{n^2}$, dacă $n \neq 3^k$ și $x_n = \frac{1}{2^k}$, dacă $n = 3^k$. Atunci $\sum_{n\geqslant 1} x_n \ll \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2^n}\right)$ și $3^k \cdot x_{3^k} = \left(\frac{3}{2}\right)^k \to \infty$.

3.1.61. Exercițiu. *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1} \subseteq \mathbf{R}$ *a.î.* $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|^3 < +\infty$. *Atunci seria* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *este convergentă (resp. absolut convergentă)* $\Leftrightarrow$ *seria* $\sum_{n\geqslant 1} \sin a_n$ *este convergentă (resp. absolut convergentă).*

Soluție. Să observăm în prealabil că :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6},$$

deci funcția $\mathbf{R}^* \ni x \mapsto \frac{x - \sin x}{x^3} \in \mathbf{R}$, se prelungește prin continuitate în 0, deci $(\forall)$ $K \subseteq \mathbf{R}$ mărginită și închisă, există $M > 0$ a.î.

$$|x - \sin x| \leqslant M\,|x|^3,\ (\forall)\ x \in K \tag{1}$$

Deoarece $\sum |a_n|^3 < +\infty$, rezultă că șirul $(|a_n|^3)_{n\geqslant 1}$ este mărginit, deci $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este mărginit. Atunci din (1) rezultă că $(\exists)$ $M > 0$ cu proprietatea că

$$|\,|a_n - \sin a_n| \leqslant M\,|a_n|^3,\ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

deci

$$|\sum_{n\geqslant 1} |a_n - \sin a_n| \leqslant M \cdot \sum_{n\geqslant 1} |a_n|^3 < +\infty$$

și deci seria $\sum_{n\geqslant 1} (a_n - \sin a_n)$ este absolut convergentă, prin urmare convergentă.

De aici conchidem că seriile $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, $\sum_{n\geqslant 1} \sin a_n$ au aceeași natură etc.

3.1.62. Exercițiu. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *și* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *două serii cu termeni pozitivi. Atunci*

1° *Dacă* $0 < \underline{\lim}\, \frac{a_n}{b_n} \leqslant \overline{\lim}\, \frac{a_n}{b_n} < +\infty$, *rezultă că cele două serii converg la fel de repede;*

2° *Dacă* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ (*resp.* ∞), *rezultă că seria* $\sum_{n\geq 1}a_n$ *converge mai repede (resp. mai puțin repede) ca seria* $\sum_{n\geq 1}b_n$.

Soluția. 1° Fie $0<\alpha<\lim_{n\to\infty}\frac{a}{b}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}<\beta<\infty$. Atunci $(\exists)\ n_0\geq 1$ a.î. $\alpha\leq\frac{a_n}{b_n}\leq\beta$, $(\forall)\ n\geq n_0$, de unde avem $\alpha\leq\frac{r_n}{r'_n}\leq\beta$, $(\forall)\ n\geq n_0$ deci cele două serii converg la fel de repede.

2°. Dacă $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ (resp. ∞), atunci $(\forall)\ \varepsilon>0$ există $n_\varepsilon\geq 1$ a.î. $\frac{a_n}{b_n}\leq\varepsilon$ (resp. $\geq\varepsilon$), $(\forall)\ n\geq n_\varepsilon$, deci $\frac{r_n}{r'_n}\leq\varepsilon$ ($\geq\varepsilon$), $(\forall)\ n\geq n_\varepsilon$ și deci $\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{r'_n}=0$ (resp. ∞) adică seria $\sum_{n\geq 1}a_n$ converge mai repede (resp. mai puțin repede) ca seria $\sum_{n\geq 1}b_n$.

3.1.63. Exercițiu. *Să se arate fără criteriul lui Cauchy că orice serie absolut convergentă de numere reale este convergentă.*

Soluție. Fie seria $\sum_{n\geq 1}a_n$ cu $a_n\in\mathbf{R}$. Atunci $0\leq a_n+|a_n|\leq 2|a_n|$, $(\forall)\ n\geq 1$ deci : $\sup_{n\geq 1}\sum_{i=1}^{n}(a_i+|a_i|)\leq 2\sum_{i=1}^{n}\sup_{n\geq 1}|a_i|<\infty$ și deci (P. 3.1.9.) seria $\sum_{n\geq 1}(a_n+|a_n|)$ este convergentă. De aici deducem că seria $\sum_{n\geq 1}a_n$ este convergentă.

3.1.64. Exercițiu. *Fie* P, Q *polinoame a.î.* $Q(n)>0$ $(\forall)\ n\geq 1$ *și* grad $Q>1+$ grad P. *Atunci seria* $\sum_{n\geq 1}\frac{P(n)}{Q(n)}$ *este convergentă.*

Ind. Se compară cu seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.

3.1.65. Exercițiu. *Fie* $a_n,\ b_n\in\mathbf{K}$ $(n\geq 1)$, $p,q>0$ *a.î.* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Dacă* $\sum_{n\geq 1}|a_n|^p<+\infty$ *și* $\sum_{n\geq 1}|b_n|^q<+\infty$, *atunci seria* $\sum_{n\geq 1}a_nb_n$ *este absolut convergentă.*

Ind. Se aplică inegalitatea Hölder (P. 7.3.2.)

3.1.66. Exercițiu. *Fie* $a_n,\ b_n\in\mathbf{K}$ $(n\geq 1)$ *și* $p>0$ *a.î.* $\sum_{n\geq 1}|a_n|^p<+\infty$ *și* $\sum_{n\geq 1}|b_n|^p<+\infty$. *Atunci* $\sum_{n\geq 1}|a_n+b_n|^p<+\infty$

Ind. Ținem seamă de inegalitatea :

$$|a_n+b_n|^p\leq(|a_n|+|b_n|)^p\leq 2^p(|a_n|^p+|b_n|^p),\ (\forall)\ n\geq 1$$

3.1.67. Exercițiu. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un șir mărginit cu elemente din* $\mathbf{R}$ *a.î.* $x_{n+1}=x_n-x_n^2$ $(\forall)\ n\geq 1$. *Atunci* $\sum_{n\geq 1}x_n^2=x_1$.

Ind. Avem $x_{n+1}=x_1-\sum_{i=1}^{n}x_i^2$, $x_{n+1}\leq x_n$, $(\forall)\ n\geq 1$, deci $x=\lim_{n\to\infty}x_n$ există și evident $x=0$ etc.

Scanned with OKEN Scanner

3.1.68. Exerciţiu. *Să se arate relaţia* $\sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-1}}{1+x^{2n-1}} = \frac{1}{x-1}$, $(\forall)\ |x|>1$

Ind. Se arată relaţia $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{1+x^{2k-1}} = \frac{1}{x-1} - \frac{2^n}{x^{2n}-1}$.

Ţinem apoi seama că $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{x^n} = \lim_{n\to\infty} n(x^{-1})^n = 0$, $(\forall)\ |x^{-1}|<1$

3.1.69. Exerciţiu. *Fie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *şi* $\sum_{n\geq 1} b_n$ *două serii de numere reale nenegative. Atunci seriile* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *şi* $\sum_{n\geq 1} b_n$ *sînt convergente* $\Leftrightarrow$ *seriile* $\sum_{n\geq 1} \min\{a_n, b_n\}$ *şi* $\sum_{n\geq 1} \max\{a_n, b_n\}$ *sînt convergente.*

Ind. Ţinem seamă de inegalităţile:

$$\min\{a_n, b_n\} \leqslant a_n, b_n \leqslant \max\{a_n, b_n\} \leqslant a_n + b_n$$

3.1.70. Exerciţiu. *Fie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *şi* $\sum_{n\geq 1} b_n$ *două serii numerice absolut convergente. Atunci seria* $\sum_{n\geq 1} a_n b_n$ *este absolut convergentă.*

Ind. Se ţine seama că $|a_n b_n| \leqslant \frac{1}{2}|a_n|^2 + \frac{1}{2}|b_n|^2$ şi de faptul că $\sum_{n\geq 1} |a_n|^2 \ll \sum_{n\geq 1} |a_n| < \infty$, $\sum_{n\geq 1} |b_n|^2 \ll \sum_{n\geq 1} |b_n| < +\infty$.

3.1.71. Exerciţiu. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *o progresie aritmetică de numere reale pozitive. Atunci seria* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ *este divergentă.*

Ind. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n} \sim \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

3.1.72. Exerciţiu. *Fie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *şi* $\sum_{n\geq 1} b_n$ *două serii numerice a.î. prima este convergentă. Atunci seriile* $\sum_{n\geq 1} (a_n + b_n)$ *şi* $\sum_{n\geq 1} b_n$ *au aceeaşi natură.*

3.1.73. Exerciţiu. *Fie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *o serie convergentă cu termeni pozitivi şi* $b_n \in \mathbf{R}(n \geqslant 1)$ *a.î.* $\inf |b_n| > 0$. *Atunci seria* $\frac{a_n}{b_n}$ *este convergentă.*

Ind. Aplicăm P. 3.2.2. ţinînd cont că $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leqslant \alpha^{-1} a_n$, unde $\alpha = \inf_{n\geq 1} |b_n|$.

3.1.74. Exerciţiu

Fie $\sum_{n\geq 1} a_n$ *o serie convergentă de numere pozitive care are suma* a. *Atunci seria* $\sum_{n\geq 1} a_n^p$ *este convergentă şi are suma* $\leqslant a^p$, $(\forall)\ p \geqslant 1$.

Ind. $a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p \leqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^p$ $(\forall)\ n > 1$ (P.7.3.4.)

3.1.75. Exerciţiu. *Să se construiască două serii convergente* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *şi* $\sum_{n\geq 1} b_n$ *cu proprietăţile:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{i=1}^{n} b_i\ (\forall)\ n \geqslant 1 \text{ şi } \sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{n\geq 1} b_n$$

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Este suficient să punem :

$$a_1 = s_1,\ a_n = s_n - s_{n-1},\ (\forall)\ n > 1;\ b_1 = \sigma_1,\ b_n = \sigma_n - \sigma_{n-1},\ (\forall)\ n > 1,$$

unde $s_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ şi $\sigma_n = \dfrac{1}{n^2}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

3.1.76. Exerciţiu.

1° *Să se construiască două serii numerice divergente a.î. seria sumă este convergentă.*

2° *Să se construiască două serii numerice semi-convergente a.î. seria sumă nu este semi-convergentă.*

3° *Să se construiască două serii numerice divergente* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *şi* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *pentru care seriile* $\sum_{n\geqslant 1} \max\{a_n, b_n\}$ *şi* $\sum_{n\geqslant 1} \min\{a_n, b_n\}$ *sînt convergente (resp. divergente).*

4° *Să se construiască două serii numerice convergente* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *şi* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *pentru care seriile* $\sum_{n\geqslant 1} \max\{a_n, b_n\}$ *şi* $\sum_{n\geqslant 1} \min\{a_n, b_n\}$ *sînt divergente (resp. convergente)*

5° *Să se construiască două serii numerice divergente* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *şi* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *pentru care seria* $\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$ *este convergentă (resp. semi-convergentă).*

3.1.77. Exerciţiu. *Să se studieze natura seriei* $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n+a^n}$ $(a > -1)$

Ind. 1° $a > 1$, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n+a^n} \ll \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{a^n}$, conv.

2° $|a| < 1$, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n+a^n} \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$, div.

3.1.78. Exerciţiu. *Să se studieze natura seriei* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, *unde* $a_n = \dfrac{1}{n(1+a+\ldots+a^n)}$ *cu* $a \in \mathbf{R}_+$ *fixat.*

Ind. 1° $a > 1$, $\sum_{n\geqslant 1} a_n \ll \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{a^n}$, conv.

2° $a = 1$, $\sum_{n\geqslant 1} a_n \sim \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ conv.

3° $0 \leqslant a < 1$, $\sum_{n\geqslant 1} a_n \sim \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$, div.

3.1.79. Exerciţiu. *Să se studieze natura seriei*

$$\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3} - \frac{n}{4}\right)^n$$

Ind. $\left(\dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3} - \dfrac{n}{4}\right)^n = \left[\dfrac{1}{n^3}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{n}{4}\right]^n = \left(\dfrac{2n^3+n^2}{4n^3}\right)^n$

Aplicăm mai departe criteriul radical; obţinem convergenţă.

3.1.80. Exerciţiu. *Fie* $(P_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir de paralelograme a.î.* P_{n+1} *se obţine unind mijloacele laturilor paralelogramului* P_n. *Să se calculeze suma seriei* $\sum_{n\geqslant 1}$ aria P_n.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Se vede imediat că aria $P_{n+1} = \frac{1}{2}$ aria P_n, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci

aria P_1 + aria P_2 + ... + aria $P_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$ aria P_1.

Prin urmare

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \text{aria } P_k = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right) \text{aria } P_1 = 2 \text{ aria } P_1.$$

3.1.81. Exerciţiu. *Fie xOy un unghi de mărime $\alpha < \frac{\pi}{2}$ şi P_0 un punct situat pe ox iar P_1 piciorul perpendicularei coborîtă din P_0 pe oy. Notăm mai departe cu P_2 piciorul perpendicularei coborîtă din P_1 pe Ox etc. Să se calculeze $\sum_{n\geqslant 0} d_n$, unde $d_n = \text{dist}\,(P_n, P_{n+1})$.*

Ind. Se arată că $d_n = d_0 \cos^n \alpha$, deci

$$\sum_{n\geqslant 0} d_n = \frac{d}{1 - \cos\alpha} = OP_0 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

3.1.82. Exerciţiu. *Fie $(P_n)_{n\geqslant 1}$ un şir de poligoane regulate a.î. P_{n+1} este obţinut unind mijloacele laturilor consecutive ale lui P_n. Să se arate că există un punct şi numai unui singur comun tuturor poligoanelor.*

Ind. Se arată că dia $(P_n) \to 0$ $(n \to \infty)$

3.1.83. Exerciţiu. *Fie T_1 un tetraedru regulat în care se înscrie o sferă S_1. Mai departe înscriem în S_1 un tetraedru regulat T_2 iar în T_2 înscriem o sferă S_2 etc. Obţinem şirurile $(S_n)_{n\geqslant 1}$ şi $(T_n)_{n\geqslant 1}$. Să se calculeze $\sum_{n\geqslant 1}$ vol (S_n) şi $\sum_{n\geqslant 1}$ vol (T_n).*

Ind. Fie a_n (resp. r_n) latura (resp. raza) tetraedrului T_n (resp. sferei S_n). Atunci avem $a_{n+1}/a_n = \frac{1}{3}$, $r_n = \frac{a_n\sqrt{6}}{12}$, deci

$$\frac{\text{vol}\ (S_{n+1})}{\text{vol}(S_n)} = \frac{4\pi r_{n+1}^3}{3} : \frac{4\pi r_n^3}{3} = \left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} \text{vol}\,(S_n) = \frac{4\pi r_1^3}{3} \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{27^n} \text{ etc.}$$

3.1.84. Exerciţiu. *Se dă un disc D_1, în el se înscrie un poligon regulat P_1 cu k laturi. In P_1 se înscrie un disc D_2 iar în D_2 se înscrie un poligon regulat P_2 cu k laturi etc. Obţinem şirurile $(D_n)_{n\geqslant 1}$ şi $(P_n)_{n\geqslant 1}$. Să se calculeze $\sum_{n\geqslant 1}$ aria (D_n) şi $\sum_{n\geqslant 1}$ aria (P_n) în cazul particular cînd $k = 3, 4$ şi 6.*

3.1.85. Exerciţiu. *Fie E_1 o elipsă, în ea se înscrie un dreptunghi Δ_1 de arie maximă, în Δ_1 se înscrie o elipsă E_2 de arie maximă. Obţinem şirurile $(E_n)_{n\geqslant 1}$ şi $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$. Să se arate că $\sum_{n\geqslant 1}$ aria $(E_n) = 2$ aria (E_1) şi $\sum_{n\geqslant 1}$ aria $(\Delta_n) = 2$ aria (Δ_1)*

Ind. Dacă E_k are semiaxele a_k, b_k, atunci Δ_k are laturile $a_k\sqrt{2}$, $b_k\sqrt{2}$, iar E_{k+1} are semiaxele $\frac{a_k\sqrt{2}}{2}$, $\frac{b_k\sqrt{2}}{2}$. Prin urmare

$$\text{aria}\,(E_k)/\text{aria}\,(\Delta_k) = \frac{\pi}{2},\quad \text{aria}\,(\Delta_k)/\text{aria}\,(E_{k+1}) = \frac{4}{\pi},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$\text{aria } (E_k)/\text{aria } (E_{k+1}) = 2 \text{ și aria } \Delta_k/\text{aria } \Delta_{k+1} = 2.$$

3.1.86. Exercițiu. *Fie xoy un unghi de mărimea $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ și $(D_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de discuri tangente la laturile unghiului $x\,O\,y$ (fig. 2). Să se arate că seria $\sum_{n\geqslant 1}$ aria (D_n) este convergentă. Să se calculeze suma seriei în cazul $\alpha = \frac{\pi}{2}$.*

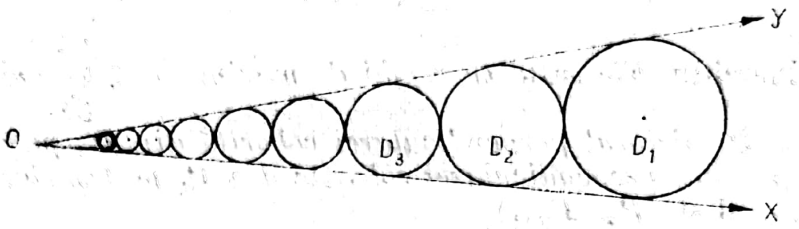


Fig. 2

3.1.87. Exercițiu. *Să se afle natura seriilor următoare* (În paranteză este indicată natura seriei și criteriul care se poate utiliza) :

1° $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a^n}{n}$ $(a \in \mathbf{R})$ (abs. conv. $-1 \leqslant a < 1$; div. $a \notin [-1, 1)$; $\sqrt{\ }$ sau L)

2° $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a^n}{n!}$ $(a \in \mathbf{R})$ $\left(\text{abs. conv.}; \sqrt{\ }, \lim_n \sqrt[n]{n!} = \lim_n \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty\right)$

3° $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{an+b}$ $(a, b > 0)$ $\left(\text{div.}; \sim \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\right)$; $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ $\left(\text{div.}; \sim \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\right)$

4° $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{an^2+bn+c}$ $(a, b, c > 0)$ $\left(\text{conv.}; \sim \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}\right)$

5° $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$ $\left(\text{div.}; \sim \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\right)$; $\sum_{n\geqslant 1} \sin \frac{1}{n^2}$ $\left(\text{conv.}; \sim \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}\right)$

6° $\sum_{n\geqslant 1} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{div.}; \sim \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n n}{2n+1}$ $\left(\text{div.}; \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}\right)$

7° $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ $\left(\text{div.}; \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \to 1\right)$; $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ $\left(\text{conv.}; \sim \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}\right)$

8° $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ $\left(\text{div.}; \sqrt[n]{n} \to 1\right)$; $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{n!}$ (conv.; suma $= 2e$)

9° $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ $\left(\text{conv.}; \sim \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}\right)$

10° $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin an}{n^\alpha}$ $(a \in (0, \pi))$ $\left(\text{conv. } \alpha > 1, \text{ div. } \alpha \leqslant 1; \sim \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}\right)$

11° $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a+n^\alpha}$ $(a > 0)$ (idem); $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ (idem)

Scanned with OKEN Scanner

12° $\sum_{n\geq 1} \operatorname{tg} \frac{a}{n^\alpha}$ $\left(|a|<\frac{\pi}{2}\right)$ (idem); $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n+n}$ $\left(\text{conv.}; \ll \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2}\right)$

13° $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin na}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos na}{n^2}$ $\left(\text{abs. conv. } (\forall)\ a\in\mathbf{R};\ \ll \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right)$

14° $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$ $\left(\text{conv. și are suma } 1-2\ln 2;\ \text{se descompune } \frac{1}{n(n+1)} \text{ în fracții simple și se aplică 3.1.13.(3°)}\right)$

15° $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$, $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ (conv.; L)

16° $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $\left(\text{conv., suma } -\frac{3}{4}\right)$

17° $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{a}{n}$ (conv.; L); $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \sin \frac{a}{n}$ (conv.; L)

18° $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n\,a}{2^n}$ $\left(\text{abs. conv.}; \ll \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}\right)$

19° $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n n!}{n^n}$ (conv.; D); $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{(2n-1)!!}$ (conv.; D)

20° $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{(\sqrt{3})^n}$ (div.; $\sqrt{\ }$); $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$ (conv.; $\sqrt{\ }$)

21° $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n}$ ($a\in\mathbf{K}$) abs. conv. $|a|<1$, div. $|a|>1$; D)

22° $\sum_{n\geq 1} n\,a^n$ ($a\in\mathbf{R}$) (abs. conv. $|a|<1$, div. $|a|\geq 1$; $\sqrt{\ }$)

23° $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n^n}$ (conv.; $\sqrt{\ }$); 24° $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^n}$ (conv.; $\sqrt{\ }$)

25° $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$ $\left(\text{conv.}; \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} \ll \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^2}\right)$

26° $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{\ln n}$ (conv; Dir.); $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}$ (conv.; L.)

27° $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{(2n-1)!}$ $\left(\text{conv. și are suma } \frac{e}{2}-1;\ \sum_{n\geq 1} \frac{n}{(2n-1)!} = \right.$

$= \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)+1}{(2n-1)!} = \frac{1}{2}\left[\sum\left(\frac{1}{(2n-2)!}+\frac{1}{(2n-1)!}\right)\right] =$

$\left. = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} = \frac{e}{2}-1\right)$

Scanned with OKEN Scanner

28° $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ $\left(\text{div.}; \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \geqslant \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right.$ și $\sqrt[n]{n} \to 1$

3.2. Produse infinite de numere

3.2.1. Exercițiu. *Să se calculeze produsul infinit*

$$\prod_{n\geqslant 1}^{n} \cos \frac{x}{2^n} \quad (x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z})$$

Soluție. Se cunoaște relația (Ap. 4.3.):

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \ldots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}}, \quad (\forall)\ n \geqslant 1,$$

Atunci $p_n = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$

deci

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x}{x} \Leftrightarrow \prod_{n\geqslant 1} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$$

Corolar 1

$$\sin x = x \prod_{n\geqslant 1} \cos \frac{x}{2^n} \quad (x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z})$$

3.2.2. Exercițiu. *Să se calculeze produsul infinit* $\prod_{n\geqslant 2} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

Soluție. Fie $p_{n-1} = \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right)$ $(n \geqslant 2)$. Atunci

$$p_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \ldots \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \ldots \frac{n + (-1)^n}{n} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n}, & (\forall)\ n \text{ par} \\ 1, & (\forall)\ n \text{ impar} \end{cases}$$

deci $\lim_{n\to\infty} p_{n-1} = 1$ și deci $\prod_{n\geqslant 2} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$

Scanned with OKEN Scanner

3.2.3. Exerciţiu *Produsele infinite* $\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ *şi* $\prod_{n>1}\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)(\alpha\in\mathbf{R})$ *sînt convergente* $\Leftrightarrow \alpha>1$.

Soluţie. Deoarece $\frac{1}{n^\alpha}>0\ (\forall)\ n\in\mathbf{N}$ şi $\alpha\in\mathbf{R}\Rightarrow \prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ este convergent $\Leftrightarrow$ seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă.

Ţinem mai departe seama că seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă $\Leftrightarrow \alpha>1$.

Corolar 1. *Produsele infinite* $\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ *şi* $\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ *sînt convergente iar produsele infinite* $\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ *şi* $\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ *sînt divergente.*

3.2.4. Exerciţiu. *Să se calculeze* produsul infinit $\prod_{n\geq 1}\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+4)}$

Soluţie. Fie $p_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)(k+3)}{k(k+4)}$, $n\geq 1$. Atunci

$$p_n=\frac{2.1}{1.5}\cdot\frac{3.5}{2.6}\cdot\frac{4.6}{3.7}\cdot\ldots\cdot\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+4)}=$$

$$=\frac{2.4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n(n+4)}=\frac{4(n+1)}{n+4},$$

deci $\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)}{n+4}=4$ şi deci produsul dat este egal cu 4.

3.2.5. Exerciţiu, *Să se calculeze produsul infinit* $\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

Soluţie. Fie $p_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$, $n\geq 2$. Atunci avem:

$$p_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k=1)(k+1)}{k^2}=\frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{2.4}{3^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=$$

$$=\frac{[1.2.3.\ldots(n-1)]\cdot[3.4\ldots n(n+1)]}{(2.3\ldots n)^2}=\frac{n+1}{2n},$$

deci $\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$ şi deci produsul dat este egal cu $\frac{1}{2}$,

3.2.6. Exerciţiu. *Să se calculeze produsul infinit* $\prod_{n\geq 0}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]$

Soluţie. Fie $p_n=\prod_{k=0}^{n}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^k}\right]$, $n\geq 1$.

Să arătăm prin inducţie relativ la n relaţia:

$$p_n=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}\right],\ (\forall)\ n\geq 1 \qquad (1)$$

Pentru $n=1$ avem evident $p_1 = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^2}\right]$.

Fie $k \geqslant 1$ un număr pentru care relația (1) are loc. Atunci

$$p_{k+1} = p_k\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k+1}}\right] = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k+1}}\right]\cdot\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k+1}}\right] = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k+2}}\right]$$

deci cf. principiului inducției complete relația (1) este arătată pentru $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}\right] = 2$, deci produsul dat este egal cu 2.

3.2.7. Exercițiu. *Să se arate că seria* $\sum\limits_{n\geqslant 1}(1-a^{\frac{1}{2^n}})$ *este convergentă* $(\forall)\ a \in \mathbf{R}_+^*$

Soluție. Notăm $a_n = a^{\frac{1}{2^n}} - 1$ $(n \geqslant 1)$. Atunci $a_n \geqslant 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ dacă $a \geqslant 1$ și $a_n \leqslant 0$ $(\forall)\ n \geqslant 1$ dacă $0 < a < 1$.

Deoarece $\prod\limits_{n\geqslant 1}(1+a_n) = \prod\limits_{n\geqslant 1} a^{\frac{1}{2^n}} = a^{\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{2^n}} = a$, avem că produsul infinit $\prod\limits_{n\geqslant 1}(1+a_n)$ este convergent, deci (T. 3.6.7.) seria $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ este convergentă și deci seria $\sum\limits_{n\geqslant 1}(1-a^{\frac{1}{2^n}})$ este convergentă.

3.2.8. Exercițiu. *Să se calculeze produsul infinit* $\prod\limits_{n\geqslant 1}\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

Ind. $\frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)[(n-1)^2+(n-1)+1]}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$,

deci

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1} = \left(\frac{1.7}{3.3}\right)\cdot\left(\frac{2.13}{4.7}\right)\cdots\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)[(n-1)^2+(n-1)+1]} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)} \to \frac{2}{3}$$

3.2.9. Exercițiu. *Să se arate că* $\prod\limits_{n\geqslant 2}\left(1-\frac{1}{n^p}\right) \geqslant \frac{p-2}{p-1}$, $(\forall)\ p > 1$

Ind. $\frac{1}{(p-1)2^{p-1}} \leqslant \sum\limits_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^p} \leqslant \frac{1}{p-1}$; $\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^p}\right) \geqslant 1-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k^p}$

3.2.10. Exercițiu. *Să se calculeze produsul infinit* $\prod\limits_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{n}}{2+\sqrt{n}}$.

Ind. Se arată prin inducție că $0 < \prod\limits_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{2+\sqrt{k}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$

3.2.11. Exercițiu. *Să se calculeze produsul infinit* $\prod\limits_{n>1}\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ind. $\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2^{k-1}}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2^k}}\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{2^k} = \frac{\operatorname{sh} x}{2^n \operatorname{sh}\frac{x}{2^n}}$

3.2.12. Exerciţiu. *Să se calculeze produsul infinit* $\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{1+2+\ldots+n}\right)$

Ind. $1-\frac{1}{1+2+\ldots+n} = 1-\frac{2}{n(n+1)} = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$,

deci

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{1+2+\ldots+k}\right) = \left(\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\right)\cdot\left(\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\right)\cdots\left(\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\right)\to\frac{1}{3}$$

3.2.13. Exerciţiu. *Să se arate că*

$$\prod_{n\geq 1}\cos 2^{n-1}x = 0,\ (\forall)\ x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$$

Ind. Utilizăm identitatea (Ap. 4.3.) : $\prod_{k=1}^{n}\cos 2^{k-1}x = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$.

3.2.14. Exerciţiu. *Să se calculeze produsul infinit* $\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Soluţie $p_n := \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)^2(k+1)}{k\cdot k^2} =$

$$= \frac{1^2\cdot 3}{2\cdot 2^2}\cdot\frac{2^2\cdot 4}{3\cdot 3^2}\cdot\frac{3^2\cdot 5}{4\cdot 3^2}\cdots\frac{(n-1)^2(n+1)}{n\cdot n+1} = \frac{n+1}{2n^2}\to 0\quad (n\to\infty)\ \text{etc.}$$

Generalizare. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir strict crescător de numere reale mai mari ca* 1 *şi* $x_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{a_k}\right)\left(1-\frac{1}{a_k^2}\right)$ $(n\geq 1)$. *Atunci* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent.*

Ind. Cum $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, rezultă că şirurile $\left(1-\frac{1}{a_n}\right)_{n\geq 1}$ şi $\left(1-\frac{1}{a_n^2}\right)_{n\geq 1}$ sînt strict descrescătoare şi aparţin intervalului (0, 1), deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător şi aparţine intervalului (0,1),deci este convergent.

CAPITOLUL 4

FUNCȚII REALE DE O VARIABILĂ REALĂ

4.1. Funcții reale de o variabilă reală. Generalități

4.1.1. Exercițiu. *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcții cu proprietatea că* $f^2 + g^2 = 1$. *Atunci există o funcție* $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ *a.î.* $f(x) = \sin h(x)$ *și* $g(x) = \cos h(x)$, $(\forall)\ x \in [a, b]$.

Soluție. Fie $h : [a, b] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ o funcție definită astfel $h(x) = \operatorname{arc\,sin} f(x)$. Atunci

$$f(x) = \sin h(x), (\forall) x \forall [a, b]$$

$$g^2(x) = 1 - \sin^2 h(x) = \cos^2 h(x),\ (\forall)\ x \in [a, b]$$

Deoarece $\cos h(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in [a, b]$, rezultă că

$$g(x) = \cos h(x),\ (\forall)\ x \in [a, b].$$

Observație. h este continuă $\Leftrightarrow f$ sau g este continuă.

4.1.2. Exercițiu.

$$|\sin nx| \leqslant n|\sin x|,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \wedge n \in \mathbf{N}.$$

Soluție. Prin inducție relativ la n. Evident $P(1)$ este adevărată. Fie $n \geqslant 1$ cu $P(n)$ adevărată. Deoarece

$$\sin(n+1)x = (\sin nx)(\cos x) + (\cos nx)(\sin x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

avem :

$$|\sin(n+1)x| \leqslant |\sin nx| \cdot |\cos x| + |\cos nx| \cdot |\sin x| \leqslant$$

$$\leqslant n|\sin x| \cdot 1 + 1|\sin x| = (n+1)|\sin x|,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Așadar $P(n+1)$ este adevărată etc.

4.1.3. Exercițiu. *Să se stabilească inegalitatea :*

$$|a \sin x + b \cos x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2},\ (\forall)\ a, b, x \in \mathbf{R}$$

Soluție. Consecință imediată a inegalității Cauchy :

$$|a \sin x + b \cos x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4.1.4. Exercițiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel :*

Scanned with OKEN Scanner

1° $f = \text{sign}$; 2° $f = |\cdot|$; 3° $f = E$; 4° $f = \sin$; 5° f *funcția lui Dirichlet*; 6° $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. *Să se determine o mulțime maximală* $A \subseteq \mathbf{R}$ *a.î. funcția* $f|_A$ *este injectivă.*

Ind. 1° $A = \{a, 0, b\}$, $a < 0 < b$; 2° $A = (\mathbf{R}_+^* \setminus C) \cup (-C)$, unde $C \subseteq \mathbf{R}_+^*$ este arbitrară; 3° $A = \bigcup_{n+\mathbf{Z}} \{a_n\}$, unde $a_n \in [n, n+1)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{Z}$; 4° $A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] + 2k\pi$, $n \in \mathbf{Z}$; $A = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; 5° $A = \{p, q\}$, $p \in Q$, $q \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$; 6° $A = \left(\left|-\frac{b}{2a}, \infty\right) \setminus B \cup C$, unde B și C sînt simetrice față de punctul $-\frac{b}{2a}$.

4.1.5. Exercițiu. *Fie* $A, B \subseteq \mathbf{R}$ *două mulțimi și* $f : A \to B$ *o funcție bijectivă. Să se arate care este relația dintre* f^{-1} *și* $(-f)^{-1}$.

Soluție. Funcția f fiind bijectivă, rezultă că $-f$ este bijectivă. Cum $-f : A \to -B$, avem:

$$(-f)^{-1} : -B \to A;\ (-f)(-f)^{-1}(-y),\ (\forall) -y \in -B,$$

deci

$$f \circ (-f)^{-1}(-y) = y, \quad (\forall)\, y \in B$$

și deci

$$(-f)^{-1}(-y) = f^{-1}(y), \quad (\forall)\, y \in B$$

4.1.6. Exercițiu. *Fie* $a, b, c \in \mathbf{R}$ *și* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel:* $f(x) = 2|x - c|$. *Atunci* f *este injectivă* $\Leftrightarrow c \notin (a, b)$.

Soluție. ($\Rightarrow$) Presupunem f injectivă și $c \in (a, b)$. Alegem $h > 0$ a.î $c - h > a$ și $c + h < b$. Atunci $c - h \neq c + h$ și $f(c - h) = f(c + h) = 2|h|$, absurd.

($\Leftarrow$) Dacă $c \leqslant a$, avem $f(x) = 2(x - c)$, $(\forall)\, x \in [a, b]$, deci f este injectivă. Rațional analog dacă $c \geqslant b$.

4.1.7. Exercițiu. *Fie* $a, b \in \mathbf{R}$ *și* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ *definită astfel* $f(x) = |x + a| + |x + b|$. *Atunci* 1° f *nu este injectivă*; 2° f *este surjectivă* $\Leftrightarrow a = b$.

Soluție. 1° Dacă $a \neq b$, atunci $-a \neq -b$ și $f(-a) = f(-b) = |a - b|$. Dacă $a = b \neq 0$, atunci $0 \neq -2a$ și $f(0) = f(-2a) = 2|a|$. Dacă $a = b = 0$, atunci $1 \neq -1$ și $f(1) = f(-1) = 1$.

Prin urmare f nu este injectivă.

2° Dacă $a \neq b$, avem $|x + a| + |x + b| \geqslant |a - b| > 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$; deci f nu este surjectivă etc.

4.1.8. Exercițiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = \frac{1}{2^{-n}}\{x\}$, *unde* $\{x\}$ *este distanța de la* x *la cel mai apropiat întreg. Atunci* $f^n = \frac{1}{2^{n-1}} f$, $(\forall) n \geqslant 1$.

Soluție. Evident avem $\{x\} = x$, dacă $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ și $f(x) \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

Atunci $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ avem:

$$(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}\{f(x)\} = \frac{1}{2} f(x) \Leftrightarrow f^2 = \frac{1}{2} f$$

Fie $n \geqslant 2$ cu proprietatea că $f^n = \frac{1}{2^{n-1}} f$. Atunci $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ avem :

$$f^{n+1}(x) = f\left(\frac{1}{2^{n-1}} f(x)\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} f(x) = \frac{1}{2^n} f(x),$$

deci $f^{n+1} = \frac{1}{2} f$. Aplicăm mai departe principiul inducției.

Corolar 1 *În același cadru avem :* $\lim\limits_{n \to \infty} f^n(x) = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

4.1.9. Exercițiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție a.î.* $f(x - y) = f(x)f(y)$, $(\forall)\, x, y \in \mathbf{R}$. *Atunci* f *este constantă.*

Soluție. Dacă $x = y$, atunci $f(0) = [f(x)]^2$, deci $f(0) = [f(0)]^2$ și deci $f(0) = 0$ sau $f(0) = 1$. Dacă $f(0) = 0$, atunci $f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, deci $f = 0$. Să presupunem $f(0) = 1$. Cum $f(-y) = f(y)$, $(\forall)\, y \in \mathbf{R}$ avem :

$$f(x + y) = f(x)f(-y) = f(x)\,f(y) = f(x - y),\ (\forall)\, x, y \in \mathbf{R}.$$

Fixăm $t \in \mathbf{R}$ și să punem mai sus $x = y = \frac{t}{2}$; obținem :

$$f(t) = f(0) = 1 \Leftrightarrow f = 1\,.$$

4.1.10. Exercițiu. *Să se determine toate funcțiile* $f : \mathbf{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbf{R}$ *care satisfac condiția* $f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 + x$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ (1)

Soluție. Fie $x \in D_f = \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ fixat și $y = 1 - \frac{1}{x}$, $z = \frac{1}{1 - x}$.

Evident $y, z \in D_f$, deci putem înlocui în relația (1) pe x cu y, respectiv cu z și obținem :

$$f\left(1 - \frac{1}{x}\right) + f\left(1 + \frac{x}{1 - x}\right) = 2 - \frac{1}{x}, \text{ respectiv } f\left(\frac{1}{1 - x}\right) + f(x) = 1 + \frac{1}{1 - x}.$$

Scăzînd prima relație din a doua avem $f(x) - f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{x} - 1$, de unde prin adunare cu relația (1) deducem :

$$2\,f(x) = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{x} + x \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x}\right)$$

4.1.11. Exercițiu. *Fie* $I = [a, b]$ *cu* $a, b \in \mathbf{R}$ *și* $f : I \to I$ *o funcție a.î.* $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$, $(\forall)\, x, y \in I$. *Atunci* $|f(x) - f(y)| = |x - y|$, $(\forall)\, x, y \in I$.

Soluție. Cum $|f(a) - f(b)| \geqslant |a - b|$ și $a \leqslant f(a)$, $f(b) \leqslant b$, rezultă că $|f(a) - f(b)| \leqslant |a - b|$, deci $|f(a) - f(b)| = |a - b|$, de unde rezultă :

$$1)\ f(a) = a \text{ și } f(b) = b \text{ sau } 2)\ f(a) = b \text{ și } f(b) = a.$$

Cazul 1) Cum $a \leqslant f(x) \leqslant b$, $(\forall)\, x \in I$ avem :

$$f(x) - a = |f(x) - a| = |f(x) - f(a)| \geqslant |x - a| = x - a,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$f(x) \geqslant x$ şi $b - f(x) = |b - f(x)| = |f(b) - f(x)| \geqslant |b - x| = b - x$,

şi deci

$f(x) \leqslant x$, $(\forall)\ x \in I$ şi prin urmare $f(x) = x$, $(\forall)\ x \in I$.

Cazul 2) $f(x) - a = |f(x) - a| = |f(x) - f(b)| \geqslant b - x$,

deci

$f(x) \geqslant a + b - x$ şi $b - f(x) = |b - f(x)| = |f(a) - f(x)| \geqslant x - a$,

şi deci

$b + a - x \geqslant f(x)$, $(\forall)\ x \in I$ şi prin urmare $f(x) = a + b - x$, $(\forall)\ x \in I$.

În ambele cazuri deducem $|f(x) - f(y)| = |x - y|$.

4.1.12. Exerciţiu. *Să se determine funcţiile nenule* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *care satisfac relaţia* :

$$xf(y) + yf(x) = (x + y) f(x) f(y),\ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R} \qquad (1)$$

Soluţie. Dacă există $x_0 \neq 0$ a.î. $f(x_0) = 0$ atunci din (1) avem $x_0 f(y) = 0$, $(\forall)\ y \in \mathbf{R}$, deci $f = 0$, absurd. Aşadar $f(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \neq 0$. Deoarece pentru $x = y \neq 0$ relaţia (1) devine $2x f(x) = 2x(f(x))^2$ adică $f(x) = (f(x))^2$, deducem că $f(x) = 1$. În 0 funcţia f poate fi definită arbitrar.

4.1.13. Exerciţiu. *Să se determine toate funcţiile* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *care au proprietăţile* :

1° $f(f(x)) = x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$; 2° *Funcţia* $x \mapsto x + f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ *este injectivă.*

Soluţie. Fie funcţia $g(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci

$$g(f(x)) = f(x) + f(f(x)) = f(x) + x = g(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

şi cum g este injectivă, rezultă că $f(x) = x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deci $f = 1_{\mathbf{R}}$.

4.1.14. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(0) = 1$ *şi* $f(x) = 0$, $(\forall)\ x \neq 0$. *Să se arate că nu există* $f_1, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *două funcţii bijective a.î.* $f = f_1 + f_2$.

Soluţie. Să presupunem că ar exista $f_1, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bijective a.î. $f = f_1 + f_2$. Atunci $f_1(0) = 1 - f_2(0)$ şi $f_1(x) = -f_2(x)$ $(\forall)\ x \neq 0$. Deoarece f_2 este surjectivă, există $x_0 \neq 0$ a.î. $f_2(x_0) = -f_1(0)$. Cum $f_1(x_0) = -f_2(x_0) = f_1(0)$ şi f_1 injectivă, rezultă că $x_0 = 0$, absurd.

4.1.15. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie arbitrară. Atunci există două funcţii surjective* $f_1, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *a.î.* $f = f_1 + f_2$.

Soluţie. Evident există o funcţie $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ surjectivă. Fie $f_1, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcţii definite astfel :

$$f_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{dacă } x > 0 \\ f(0) & ,, \quad x = 0 \\ f(x) - \varphi(-x) & ,, \quad x < 0 \end{cases}; \quad f_2(x) = \begin{cases} f_2(x) - \varphi(x), & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & ,, \quad x = 0 \\ \varphi(-x) & ,, \quad x < 0 \end{cases}$$

Atunci

$$\mathbf{R} \supseteq f_1(\mathbf{R}) \supseteq f_1(\mathbf{R}_+) = \varphi(\mathbf{R}_+) = \mathbf{R},$$

şi analog

$$\mathbf{R} \supseteq f_2(\mathbf{R}) \supseteq f_2(\mathbf{R}_-) = \varphi(\mathbf{R}_+) = \mathbf{R},$$

deci $f_1(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ şi $f_2(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ şi deci f_1 şi f_2 sînt surjective. Este clar că $f = f_1 + f_2$.

Scanned with OKEN Scanner

4.1.16. Exerciţiu. *Să se construiască o funcţie surjectivă* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *care să ia aceiaşi valoare exact de două ori.*

Soluţie. Fie $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel :

$$\varphi(x) = x^2, \ (\forall)\ x \notin \mathbf{Z}\ ; \ \varphi(-n+1) = \varphi(n) = n^2, \ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Evident φ ia aceiaşi valoare exact de două ori şi $\varphi(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_+$. Fie $\psi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ o funcţie bijectivă arbitrară şi $f = \psi \circ \varphi$. Atunci f satisface evident condiţiile din enunţ.

Observaţie. Ex. 4.1.16. rămîne adevărat dacă înlocuim mulţimea $\mathbf{R}$ printr-o mulţime infinită arbitrară.

4.1.17. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie arbitrară şi* $g : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $g(x, y) = (g_1(x), g_2(x, y))$, *unde* $g_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *este bijectivă şi* $g_2 : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *este arbitrară. Atunci mulţimea* $M = g(G_f)$ *este graficul unei funcţii* $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Soluţie. O mulţime $M \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ reprezintă graficul unei funcţii $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \Leftrightarrow$ (i) $D_M = \{x \in \mathbf{R} \mid (\exists)\ y \in \mathbf{R}$ a. î. $(x, y) \in M\} = \mathbf{R}$ şi (ii) $(\forall)\ (x, y) \wedge (x, y') \in M$ rezultă $y = y'$. În cazul nostru avem

$$M = \{(g_1(x),\ g_2(x, f(x)))\ ;\ x \in \mathbf{R}\},$$

şi deoarece g_1 este surjectivă, rezultă că $D_M = \mathbf{R}$.

Fie $(t, t') \in M$ fixat. Atunci $t = g_1(x)$ deci $x = g_1^{-1}(t)$ şi $t' = g_2(x, f(x))$ deci $t' = g_2(g_1^{-1}(t), f(g_1^{-1}(t)))$.

Prin urmare $h(t) = g_2(g_1^{-1}(t),\ fg_1^{-1}(t))$ este funcţia căutată.

4.1.18. Exerciţiu. *Fie* $f,\ g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ *două funcţii arbitrare. Atunci*

$$(\exists)\ x, y \in [0, 1]\ a.î. |f(x) + g(y) - xy| \geqslant \frac{1}{4} \qquad (1)$$

Soluţie. Să presupunem că perechile de puncte (0,1) ; (1,0) şi (0,0) nu verifică inegalitatea (1), deci

$$|f(0) + g(1)| < \frac{1}{4}; \ |f(1) + g(0)| < \frac{1}{4} \text{ şi } |f(0) + g(0)| < \frac{1}{4}.$$

Atunci

$$|f(1) + g(1)| \leqslant |f(1) + g(0)| + |-g(0) - f(0)| + |f(0) + g(1)| < \frac{3}{4},$$

deci

$$|f(1) + g(1) - 1| \geqslant 1 - |f(1) + g(1)| > 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

şi deci perechea (1, 1) de puncte verifică inegalitatea (1), absurd.

Generalizare. Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$ *n funcţii arbitrare. Atunci există*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1] \ \ a.î. \left| \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) - \prod_{i=1}^{n} x_i \right| \geqslant \frac{1}{2n}.$$

Soluţie. Prin inducţie relativ la n.

4.1.19. Exerciţiu. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ *şi* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \cos(x + a_k)$. *Dacă* $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ *şi* $f(x_1) = f(x_2) = 0$, *atunci* $x_1 - x_2 \in \pi\mathbf{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ind $f(x) = A\cos x + B\sin x$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, unde

$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \cos a_k \text{ și } B = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \sin a_k .$$

Fie cazul nebanal $(A, B) \neq (0, 0)$. Atunci :

$$f(x_1) = f(x_2) = 0 \Leftrightarrow A\cos x_1 + B\sin x_1 = 0, A\cos x_2 + B\sin x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \cos x_1 & \sin x_1 \\ \cos x_2 & \sin x_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in \pi\mathbf{Z}.$$

4.1.20. Exercițiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel :*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(x + b_i), \text{ unde } a_i,\ b_i \in \mathbf{R}.$$

Dacă $f(0) = 0$ *și* $(\exists)\, x_0 \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ *a.î.* $f(x_0) = 0$, *atunci* $f = 0$.

Ind. $f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cos b_i\right) \sin x + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \sin b_i\right) \cos x$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \sin b_i = 0\ ;\ f(x_0) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \cos b_i = 0.$$

4.1.21. Exercițiu. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *(resp.* $(b_n)_{n\geq 1}$*) o progresie aritmetică (resp. geometrică) infinită de numere. Să se determine o funcție elementară* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *a.î.* $f(a_n) = b_n$, $(\forall)\, n \geq 1$.

Ind. Avem $a_n = a + (n-1)r$ și $b_n = bq^{n-1}$, $(\forall)\, n \geq 1$. Considerăm funcția $f(x) = k\alpha^x$, $x \in \mathbf{R}$ și determinăm k și α a.î. $f(a_n) = b_n$, $(\forall)\, n \geq 1$. Obținem $\alpha = q^{\frac{1}{r}}$ și $k = bq^{-a/r}$.

4.1.22. Exercițiu. *Fie* φ_A *funcția caracteristică a mulțimii* $A \subseteq X$. *Atunci avem relațiile :*

$1^\circ\ \varphi_\emptyset = 0, \varphi_X = 1$; $2^\circ\ \varphi_A = \varphi_B \Leftrightarrow A = B$; $3^\circ\ \varphi_A \leq \varphi_B \Leftrightarrow A \subseteq B$; $4^\circ\ \varphi_A + \varphi_{\complement A} = 1$; $5^\circ\ \varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A \cdot \varphi_B$; $6^\circ\ \varphi_{A\cap B} = \varphi_A \cdot \varphi_B$; $7^\circ\ \varphi_{A/B} = \varphi_A(1 - \varphi_B)$; $8^\circ\ \varphi_{A\Delta B} = \varphi_A + \varphi_B - 2\varphi_A\varphi_B$; $9^\circ\ \varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;

$10^\circ\ \varphi_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} - \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{A_i \cap A_j} + \sum_{i,jk=1}^{n} \varphi_{A_i \cap A_j \cap A_k} - \ldots + (-1)^n \varphi_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n}$.

Ind. 6° Dacă $x \in A \cap B \Rightarrow \varphi_{A\cap B}(x) = 1$, $\varphi_A(x) = 1$ și $\varphi_B(x) = 1 \Rightarrow \Rightarrow \varphi_{A\cap B}(x) = \varphi_A(x)\varphi_B(x)$. Dacă $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ sau $x \notin B \Rightarrow \varphi_{A\cap B}(x) = 0$ și $\varphi_A(x) = 0$ sau $\varphi_B(x) = 0$ etc.

4.1.23. Exercițiu. *Fie* $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *două funcții legate prin relația* $g(x) = f(2x) + f(3x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. *Dacă* $f(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, *rezultă de aici că* $g(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$?

Ind. Răspunsul este negativ. Contraexemplu : Dacă $f\left(\frac{1}{3}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ și $f(x) = 2$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$, atunci $g\left(\frac{1}{6}\right) = 0$.

4.1.24. Exercițiu. *Să se determine funcțiile* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ *cu proprietatea că*

$$f(x)f(x+1) = f(x) - f(x+1),\ (\forall)\, x \in \mathbf{R} \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Din (1) avem $f(x) = (1 - f(x))f(x-1)$, deci $f(x) \neq 1$ și $f(x) \neq \frac{1}{2}$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$ și deci

$$f(x-1) = \frac{f(x)}{1-f(x)} \text{ și } f(x-2) = \frac{f(x-1)}{1-f(x-1)} = \frac{f(x)}{1-2f(x)}, (\forall)\, x \in \mathbf{R}.$$

Analog se arată că $f(x) \neq \frac{1}{3}$ și $f(x-3) = \frac{f(x)}{1-3f(x)}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ și în general $f(x) \neq \frac{1}{n}$ și $f(x-n) = \frac{f(x)}{1-nf(x)}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Dacă $(\exists)\ x_0 \in \mathbf{R}$ cu $f(x_0) > 0$, atunci alegem $n_0 \geqslant 1$ cu $1 - n_0 f(x_0) < 1$, deci $f(x_0 - n_0) < 0$, absurd, și deci $f = 0$.

4.1.25. Exercițiu. *Fie $a, b, A, B \in \mathbf{R}$ fixate și $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel : $f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x$. Dacă $f \geqslant 0$, atunci avem $a^2 + b^2 \leqslant 1$ și $A^2 + B^2 \leqslant 1$.*

Ind. $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ avem : $f(x+\pi) \geqslant 0$, deci $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2 - 2A\cos 2x - 2B\sin 2x \geqslant 0 \Leftrightarrow A\cos 2x + B\sin 2x \leqslant 1$.

Există $\theta \in [0, 2\pi)$ unic a.î. $\cos\theta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \sin\theta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Atunci

$$\sqrt{A^2+B^2}\ (\cos\theta\cos 2x + \sin\theta\sin 2x) \leqslant 1 \Leftrightarrow \sqrt{A^2+B^2}\ \cos(2x-\theta) \leqslant 1,$$

care pentru $x = \frac{\theta}{2}$ ne dă $\sqrt{A^2+B^2} \leqslant 1$.

Analog $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ avem : $f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2 - a\left[\cos x + \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right] - b\left[\sin x + \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right] \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{b\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 1 \text{ etc.}$$

4.1.26. Exercițiu. *Să se calculeze sumele :*

1° $\operatorname{ch}\theta + \operatorname{ch}(\theta+h) + \operatorname{ch}(\theta+2h) + \ldots + \operatorname{ch}(\theta+(n-1)h)$;

2° $\operatorname{sh}\theta + \operatorname{sh}(\theta+h) + \operatorname{sh}(\theta+2h) + \ldots + \operatorname{sh}(\theta+(n-1)h)$;

3° $\operatorname{ch}^2\theta + \operatorname{ch}^2(\theta+h) + \operatorname{ch}^2(\theta+2h) + \ldots + \operatorname{ch}^2(\theta+(n-1)h)$;

4° $\operatorname{sh}^2\theta + \operatorname{sh}^2(\theta+h) + \operatorname{sh}^2(\theta+2h) + \ldots + \operatorname{sh}^2(\theta+(n-1)h)$.

Ind. Se obțin pentru sumele 1°—4° respectiv expresiile :

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{nh}{2}}{\operatorname{sh}\frac{h}{2}}\operatorname{ch}\left(\theta + \frac{n-1}{2}h\right);\ \frac{\operatorname{sh}\frac{nh}{2}}{\operatorname{sh}\frac{h}{2}}\operatorname{sh}\left(\theta+\frac{n-1}{2}h\right);$$

$$\frac{n}{2} + \frac{\operatorname{sh} nh}{\operatorname{sh} h}\operatorname{ch}(2\theta + (n-1)h);\ -\frac{n}{2} + \frac{\operatorname{sh} nh}{\operatorname{sh} h}\operatorname{ch}(2\theta + (n-1)h).$$

Scanned with OKEN Scanner

4.2. Funcţii monotone

4.2.1. Exerciţiu. *Fie* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x)=3x$, *dacă* $x\geqslant 0$ *şi* $f(x)=2x$, *dacă* $x<0$. *Atunci* f *este strict crescătoare şi avem* $f^{-1}(y)=\frac{1}{3}y$, *dacă* $y\geqslant 0$ *şi* $f^{-1}(y)=\frac{1}{2}y$, *dacă* $y<0$.

Soluţie. Fie $x_1, x_2\in\mathbf{R}$, $x_1<x_2$, fixaţi. Dacă $x_1\geqslant 0$, avem $f(x_1)=3x_1<3x_2=f(x_2)$. Dacă $x_2\leqslant 0$, avem $f(x_1)=2x_1<2x_2=f(x_2)$. În fine, dacă $x_1<0<x_2$, avem $f(x_1)=2x_1<0<3x_2=f(x_2)$. Aşadar în toate cazurile avem $f(x_1)<f(x_2)$, prin urmare f este strict crescătoare etc.

4.2.2. Exerciţiu. *Fie* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x)=x+\alpha$, *dacă* $x\leqslant 0$ *şi* $f(x)=x+\beta$, *dacă* $x>0$. *Atunci* f *este strict crescătoare* $\Leftrightarrow \alpha\leqslant\beta$.

Soluţie. ($\Rightarrow$) f fiind strict crescătoare, avem $f(x)<f(y)$, $(\forall)\ x<0<y$, deci $x+\alpha<y+\beta$, $(\forall)\ x<0<y$.

Fie $x_n<0$, $x_n\to 0$ şi $y_n>0$, $y_n\to 0$. Atunci $x_n+\alpha<y_n+\beta$, $(\forall)\ n\geqslant 1$ de unde prin trecere la limită, $n\to\infty$, obţinem $\alpha\leqslant\beta$.

4.2.3. Exerciţiu. *Fie* $a\geqslant 0$ *şi* $f:I=(a,\infty)\to\mathbf{R}$ *o funcţie a.î. funcţia* $x\mapsto\frac{1}{x}f(x)$, $x\in I$ *este monoton descrescătoare. Atunci:*

$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y),\ (\forall)\ x,y\in I.$$

Soluţie. Fie x, y fixaţi. Atunci din ipoteză avem:

$$\frac{f(x+y)}{x+y}\leqslant\frac{f(x)}{x};\frac{f(x+y)}{x+y}\leqslant\frac{f(y)}{y},$$

deci

$$f(x+y)=\frac{f(x+y)}{x+y}\cdot(x+y)\leqslant\frac{f(x)}{x}x+\frac{f(y)}{y}y=f(x)+f(y)$$

4.2.4. Exerciţiu. *Fie* $f, g: I=[a,b]\to[a,b]$ *două funcţii cu proprietăţile:* 1° f *strict crescătoare;* 2° g *strict descrescătoare;* 3° $g<f$. *Atunci* $f\circ g>g\circ f$.

Soluţie. Deoarece f este strict crescătoare şi $g(x)\geqslant a$, $(\forall)\ x\in I$, avem $f(g(x))\geqslant f(a)$, $(\forall)\ x\in I$. De asemenea g strict descrescătoare şi $f(x)\geqslant a$, $(\forall)x\in I$, implică $g(f(x))\leqslant g(a)$, $(\forall)\ x\in I$. Cum $g(a)<f(a)$, rezultă că $g(f(x))<f(a)\leqslant f(g(x))$, $(\forall)\ x\in I$, adică $g\circ f<f\circ g$.

Observaţie. Compunerea a două funcţii nu este o operaţie comutativă.

4.2.5. Exerciţiu. *Fie* $A\subseteq\mathbf{R}$ *o mulţime şi* $f:A\to A$ *o* λ*-contracţie. Atunci funcţia* $g:=1_A+f$ (*resp.* 1_A-f) *este strict crescătoare iar funcţia* $g^{-1}:g(A)\to A$ *este* μ*-lipschitziană cu* $\mu=\frac{1}{1-\lambda}$.

Soluţie. Fie $x_1, x_2\in A$, $x_1<x_2$ fixaţi. Atunci

$$g(x_2)-g(x_1)=(x_2-x_1)-(f(x_1)-f(x_2))$$

şi

$$f(x_1)-f(x_2)\leqslant|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\lambda|x_1-x_2|<x_2-x_1,$$

deci $g(x_2)-g(x_1)>0$ şi deci g este strict crescătoare.

Mai departe avem:

$$g(x_2)-g(x_1)\geqslant(x_2-x_1)-|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant(1-\lambda)(x_2-x_1),$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$x_2 - x_1 \leqslant \frac{1}{1-\lambda}(g(x_2) - g(x_2)) \qquad (1)$$

Fixăm $y_1, y_2 \in g(A)$, $y_1 < y_2$. Atunci $g^{-1}(y_1) < g^{-1}(y_2)$, deci cf. (1)

$$0 < g^{-1}(y_2) - g^{-1}(y_1) \leqslant \frac{1}{1-\lambda}(y_2 - y_1) \text{ etc.}$$

4.2.6. Exerciţiu. *Să se construiască* $f : [0,1] \to [0,1]$ *o funcţie bijectivă a.î.* f *nu este monotonă pe nici un subinterval propriu* $J \subseteq [0,1]$.

Soluţie. Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o funcţie definită astfel : $f(x) = x$. dacă $x \in [0,1] \cap Q$ şi $f(x) = 1 - x$, dacă $x \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}$.

Se vede imediat că f este bijectivă. Dacă $J = [a,b] \subseteq [0,1]$ este fixat şi $b \leqslant \frac{1}{2}$, atunci există $x_1, x_2, x_3 \in J$ a.î. $x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2}$, cu x_1, x_3 raţionali şi x_2 iraţionali. Evident avem :

$$f(x_1) = x_1 < x_3 = f(x_3) < \frac{1}{2} \text{ şi } f(x_2) = 1 - x_2 > \frac{1}{2},$$

deci $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ şi deci f nu este monotonă pe J.

Analog se raţionează dacă $a \geqslant \frac{1}{2}$.

4.2.7. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *o funcţie cu proprietatea că* $f(n+1) > ff(n)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$. *Atunci* $f(n) = n$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$.

Ind. $f(n+1) > ff(n) \geqslant 1$, $(\forall)\, n \geqslant 1 \Rightarrow f(n) \geqslant 2$, $(\forall)\, n \geqslant 2$

$f(n+1) > ff(n) \geqslant 2$, $(\forall)\, n \geqslant 2 \Rightarrow f(n) \geqslant 3$, $(\forall)\, n \geqslant 3$

. . . . . .

$f(n+1) > ff(n) \geqslant k-1$, $(\forall)\, n \geqslant k-1 \Rightarrow f(n) \geqslant k$, $(\forall)\, n \geqslant k$

. . . . . .

Atunci

$$f(n+1) > ff(n) \geqslant f(n),\ (\forall)\, n \geqslant 1 \Rightarrow f(n+1) > f(n),\ (\forall)\, n \geqslant 1,$$

deci

$$f(n+p) > f(n+p-1) > \ldots > f(n+1) > f(n),\ (\forall)\, n, p \geqslant 1,$$

adică f este strict crescătoare şi deci din ipoteză rezultă că $n+1 > f(n)$, $(\forall)\, n \geqslant 1$, încît $n \geqslant f(n)$, $(\forall)\, n \geqslant 1$ etc.

4.2.8. Exerciţiu. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime şi* $f, g : A \to \mathbf{R}$ *două funcţii monotone şi de acelaşi sens (resp. de sens contrar) ambele ne-negative sau ne-pozitive (resp. una ne-negativă şi una ne-pozitivă). Atunci funcţia* fg *este monotonă.*

Soluţie. Distingem următoarele cazuri :

1° f şi g monoton crescătoare $\begin{cases} f \geqslant 0,\ g \geqslant 0 \\ f \leqslant 0,\ g \leqslant 0 \end{cases}$

2° f şi g monoton descrescătoare $\begin{cases} f \geqslant 0,\ g \geqslant 0 \\ f \leqslant 0,\ g \leqslant 0 \end{cases}$

3° f monoton crescătoate şi g monoton descrescătoare $\begin{cases} f \geqslant 0,\ g \leqslant 0 \\ f \leqslant 0,\ g \geqslant 0 \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm, spre exemplu, ultimul caz.

Fie $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ fixați. Atunci $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ și $g(x_1) \geqslant g(x_2)$. Cum $-g(x_1) \geqslant 0$, $-g(x_2) \geqslant 0$ și $-g(x_1) \leqslant -g(x_2)$, avem $-f(x_1)\, g(x_1) \leqslant -f(x_2)\, g(x_2)$, deci $f(x_1)\, g(x_1) \geqslant f(x_2)\, g(x_2)$ și deci fg este monoton descrescătoare.

4.2.9. Exercițiu *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ o funcție monotonă. Atunci*

$$\min\left\{\frac{f(a)}{f(b)}, \frac{f(b)}{f(a)}\right\} \leqslant \frac{f(x)}{f(y)} \leqslant \max\left\{\frac{f(a)}{f(b)}, \frac{f(b)}{f(a)}\right\}, (\forall)\ x, y \in [a, b].$$

Este adevărată și afirmația reciprocă ?

4.2.10. Exercițiu. *Fie $A, B, C \subseteq \mathbf{R}$ trei mulțimi și $f : A \to B$, $g : B \to C$ două funcții monotone (resp. strict monotone) și de același sens. Atunci funcția $g \circ f$ este monoton crescătoare (resp. strict crescătoare).*

Ind. Presupunem f și g monoton descrescătoare și fie $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, fixați. Atunci $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, deci $g(f(x_1)) \leqslant g(f(x_2))$ etc.

4.2.11. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = ax^2 + bx + x$, dacă $x \geqslant 0$ și $f(x) = d$, dacă $x < 0$. Să se determine a, b, c, d în $\mathbf{R}$ a.î. f să fie strict monotonă.*

Ind. Dacă $a \neq 0$, atunci avem : f strict crescătoare $\Leftrightarrow a > 0$ și $d \leqslant \frac{b}{2a}$.

4.3. Funcții cu proprietatea Darboux

4.3.1. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea Darboux. Atunci f este constantă $\Leftrightarrow$ sin $\circ f$ este constantă.*

Soluție. ($\Leftarrow$) Presupunem că sin $\circ f = c$ și fie $\alpha = \arcsin c$. Atunci $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, avem $f(x) = (-1)^k c + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), deci $f(\mathbf{R}) \subseteq \{(-1)^k \alpha + k\pi ; k \in \mathbf{Z}\}$(1) Cum $f(\mathbf{R})$ este un interval (P.4.3.2.), din (1) rezultă că $f(\mathbf{R})$ este un interval degenerat, prin urmare f este constantă.

4.3.2. Exercițiu. *Să se construiască două funcții care au proprietatea Darboux a căror sumă nu are această proprietate.*

Soluție. Fie $f_1, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții definite astfel :

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x > 0, \\ 1, & x \leqslant 0 \end{cases} ; \quad f_2(x) = \begin{cases} -\sin\frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

Evident funcțiile f_1, f_2 au proprietatea Darboux, în timp ce funcția $(f_1 + f_2)(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x \leqslant 0 \end{cases}$, nu are această proprietate.

Observație. Orice funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se poate scrie ca suma a două funcții $f_1, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care au proprietatea Darboux (W. Sierpinski).

4.3.3. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea Darboux care nu se anulează în nici un punct. Atunci f păstrează un semn constant pe I.*

Soluție. Să presupunem că există $a, b \in I$ a.î. $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$. Atunci $\gamma = 0 \in [f(a), f(b)]$, deci există $c \in [a, b]$ a.î. $f(c) = \gamma$, absurd, deoarece $f(x) \neq 0$, $(\forall)$ $x \in I$.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare $f(I) \subseteq \mathbf{R}_+$ sau $f(I) \subseteq \mathbf{R}_-$.

4.3.4. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea Darboux, $m = \inf f(I)$ şi $M = \sup f(I)$. Atunci $(m, M) \subseteq f(\dot{I})$.*

Soluţie. Fie $m < \gamma < M$ fixat. Din definiţia marginii inferioare (resp. superioare) există x_1 (resp. x_2) în I a.î. $f(x_1) < \gamma$ (resp. $f(x_2) > \gamma$). Deoarece $f(x_1) < \gamma < f(x_2)$ şi f are proprietatea lui Darboux, există $x_0 \in (x_1, x_2)$ a.î. $f(x_0) = \gamma$.

Evident $x_0 \in \dot{I}$, deci $\gamma = f(x_0) \in f(\dot{I})$ şi deci $(m, M) \subseteq f(\dot{I})$.

4.3.5. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie monotonă a.î. $f(I)$ este un interval. Atunci f are proprietatea Darboux.*

Soluţie. Să presupunem f monoton crescătoare; fie $a, b \in I$ cu $a < b$ şi $\gamma \in (f(a), f(b))$.

Deoarece $f(a), f(b) \in J = f(I)$ şi J interval rezultă că $[f(a), f(b)] \subseteq J$, deci $\gamma \in J$ şi deci există $c \in I$ a.î. $f(c) = \gamma$.

Dacă $c < a$ (resp. $c > b$), atunci $\gamma = f(c) \leqslant f(a)$ (resp. $\gamma = f(c) \geqslant f(b)$), deci $\gamma \notin (f(a), f(b))$, absurd. Rămîne că $c \in [a, b]$ şi f are proprietatea Darboux.

4.3.6. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea Darboux. Atunci* $(\forall)\ x_1, x_2, \ldots x_n \in I$, $(\forall)\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}_+^*$ *cu* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$, *rezultă că* $(\exists)\ \xi \in [\alpha, \beta]$, *unde* $\alpha := \min_i x_i$ *şi* $\beta := \max_i x_i$, *a.î.* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = f(\xi)$.

Soluţie. I fiind interval, rezultă (P.2.2.13.), $[\alpha, \beta] \subseteq I$; fie $J := f([\alpha, \beta])$. Atunci (P. 4.3.2.) J este interval şi $y_i := f(x_i) \in J$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$, deci (P. 2.2.13.) $y := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \in J$ şi deci $(\exists)\ \xi \in [\alpha, \beta]$ cu $f(\xi) = y$ etc.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea Darboux. Atunci* $(\forall)\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, $(\exists)\ \xi \in [\min_i x_i, \max_i x_i]$ *a.î.* $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = f(\xi)$.

4.3.7. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea Darboux. Dacă* $(\exists)\ k > 0$ *a.î.* $|f(x) - f(z)| \geqslant k\,|x - z|$, $(\forall)\ x, z \in \mathbf{R}$, *atunci f este bijectivă.*

Soluţie. Dacă $x, z \in \mathbf{R}$ şi $f(x) = f(z)$, rezultă evident că $x = z$, deci f este injectivă şi deci (P.4.3.3.) f este strict monotonă. Presupunem f strict crescătoare. Din P.4.3.2. deducem că $J = f(\mathbf{R})$ este un interval. Să arătăm că $J = \mathbf{R}$, deci f este surjectivă. Dacă J posedă un majorant M (resp. un minorant m), atunci

$$f(0) \leqslant f(x) \leqslant M\ (\forall),\ x \in \mathbf{R}_+ \text{ (resp. } m \leqslant f(x) \leqslant f(0)\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_-).$$

Ambele situaţii conduc la o contradicţie. Spre exemplu, în prima situaţie rezultă că

$$|x| = |x - 0| \leqslant k^{-1}|f(x) - f(0)| \leqslant 2k^{-1} \max\{M, |f(0)|\},\ (\forall)\ \ x \in \mathbf{R},$$

absurd. Rămîne că f este surjectivă.

Observaţie. Din T.5.5.19 rezultă că f este omeomorfă.

4.3.8. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to [-1, 1]$ o funcţie cu proprietatea Darboux a.î. $f((-\infty, -n)] = f([n, \infty)) = [-1, 1]$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ şi fie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie*

Scanned with OKEN Scanner

definită astfel $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, *dacă* $x \in \mathbf{R}^*$ *și* $g(0) = \alpha \in \mathbf{R}$. *Atunci* g *are proprietatea Darboux* $\Leftrightarrow |\alpha| \leqslant 1$.

Soluție. ($\Rightarrow$) Evident avem $g(\mathbf{R}^*) = f(\mathbf{R}^*)$, deci

$$g(\mathbf{R}) = g(\mathbf{R}^*) \cup \{g(0)\} = f(\mathbf{R}^*) \cup \{\alpha\} = [-1, 1] \cup \{\alpha\}$$

Cum g are proprietatea Darboux, rezultă (P.4.3.2.) că $[-1, 1] \cup \{\alpha\}$ este un interval, deci $\alpha \in [-1, 1]$.

($\Leftarrow$) Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval fixat. Distingem următoarele cazuri:

1° $I \subseteq \mathbf{R}_+^*$. Atunci $J := \left\{\frac{1}{x}\ ;\ x \in I\right\}$ este un interval și avem $g(I) = f(J)$ și $f(J)$ este un interval (P.4.3.2.), deci $g(I)$ este un interval.

2° $0 \in I \subseteq \mathbf{R}_+$ și $I \neq \{0\}$. Atunci $(\exists)\ n_0 \geqslant 1$ cu $\left[0, \frac{1}{n_0}\right] \subseteq I$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, deci

$$g(I) = \{\alpha\} \cup f([n_0, \infty)) = \{\alpha\} \cup [-1, 1] = [-1, 1]$$

3° Dacă $I \subseteq \mathbf{R}_-^*$ (resp. $0 \in I \subseteq \mathbf{R}_-$ și $I \neq \{0\}$), raționăm ca în 1° (resp. 2°)

4° Dacă $0 \in \mathring{I}$, aplicăm 2° și 3° pentru $I \cap \mathbf{R}_+$ și $I \cap \mathbf{R}_-$ respectiv.

Așadar întotdeauna $g(I)$ este un interval, deci (P.4.3.2.) g are proprietatea Darboux.

4.3.9. Exercițiu. *Orice funcție* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *se poate reprezenta ca suma (resp. produsul) a două funcții care nu au proprietatea Darboux.*

Soluție. 1° Dacă f nu are P. D., atunci funcțiile $f_i = \frac{1}{2} f\ (i = \overline{1, 2})$ nu au P.D. și $f_1 + f_2 = f$.

Dacă $f = k$ (constantă) și $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție arbitrară, fără P. D., atunci $f_2 = f - f_1$ nu are P. D. și $f_1 + f_2 = f$.

Dacă f este neconstantă și are P. D., atunci $f(\mathbf{R})$ este un interval care nu se reduce la un punct. Fie $y \in \mathring{f(\mathbf{R})}$ fixat. Înlocuind f cu $f - y$, putem presupune că $y = 0$. Fie $A = \{x \in \mathbf{R}; f(x) \neq 0\}$, $f_1 := \mathbf{1} + (2f - \mathbf{1})\, \varphi_A$ și $f_2 := f - f_1$, unde $\varphi_A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este funcția caracteristică a mulțimii A. Atunci $f_1 + f_2 = f$ și $f_i\ (i = 1, 2)$ nu are P. D., deoarece $\mathbf{R}_- \cap f_i(\mathbf{R}) \neq \emptyset$, $\mathbf{R}_+ \cap f_i(\mathbf{R}) \neq \emptyset$ și $0 \notin f_i(\mathbf{R})$.

2° Dacă $f = 0$, atunci funcțiile $f_1 := \varphi_{\mathbf{R}_+}$ și $f_2 := \mathbf{1} - f_1$ nu au P.D. și $f_1 \cdot f_2 = f$.

Dacă $f \neq 0$ fie $a \in \mathbf{R}$ cu $f(a) \neq 0$ și $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel:

$$f_1(x) = \begin{cases} -\ \operatorname{sign} f(a), & x = a \\ \operatorname{sign} f(a), & x = a + 1 \text{ sau } x \in f^{-1}(0) \\ \operatorname{sign} f(x), & x \notin \{a, a + 1\} \cup f^{-1}(0). \end{cases}$$

Atunci funcțiile f_1 și $f_2 = f - f_1$ nu au P.D. și $f_1 f_2 = f$.

Scanned with OKEN Scanner

4.4. Funcții pare. Funcții impare

4.4.1. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval simetric în raport cu x_0 și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci f este pară (res. impară) în raport cu $x_0 \Leftrightarrow f(2x_0 - x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in I \Leftrightarrow f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$, $(\forall)\ 0 < x < \frac{1}{2}|I|$, dacă I este deschis și $(\forall)\ 0 < x \leqslant \frac{1}{2}|I|$, dacă I este închis.*

Soluție. Evidentă.

4.4.2. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție pară în raport cu fiecare punct $x_0 \in \mathbf{R}$. Atunci f este constantă.*

Soluție. Fie $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$, două puncte fixe și $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Atunci

$$f(x_1) = f\left(x_0 - \frac{x_2 - x_1}{2}\right) = f\left(x_0 + \frac{x_2 - x_1}{2}\right) = f(x_2),$$

deci f este constantă.

4.4.3. Exercițiu. *Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ fixate nu toate nule și $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel : $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x + a_i) \pm \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$. Atunci f este pară (resp. impară) $\Leftrightarrow$ n este par (resp. impar).*

Soluție. Este suficient să observăm că $f(-x) = (-1)^n f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, apoi că $f \neq 0$, deoarece $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

4.4.4. Exercițiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime simetrică și $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții. Atunci : 1° Dacă f și g sînt pare (resp. impare), rezultă $f + g$ pară (resp. impară) iar fg este întotdeauna pară ; 2° Dacă f pară și g impară, rezultă fg impară ; 3° Dacă f pară și g impară, suma $f + g$ poate fi oricum.*

Soluție. 1° $(fg)(-x) = f(-x)\, g(-x) = (-f(x))\,(-g)(x)) =$

$$= (fg)(x),\ (\forall)\ x \in A \quad \text{etc.}$$

4.5. Funcții periodice

4.5.1. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție defiinită astfel $f(x) = \cos x + \cos x\sqrt{2}$. Atunci f nu este periodică.*

Soluție. Presupunem f periodică și fie $T > 0$ a.î.

$$f(x + T) = f(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(x + T) + \cos(x + T)\sqrt{2} = \cos x + \cos x\sqrt{2},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Pentru $x = 0$ obținem :

$$\cos T + \cos T\sqrt{2} = 2 \Leftrightarrow \cos T = 1 \wedge \cos T\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T \in 2\pi\mathbf{Z} \wedge T\sqrt{2} \in 2\pi\mathbf{Z} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{T\sqrt{2}}{T} \in \mathbf{Z}, \text{ absurd.}$$

4.5.2. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = [x] \sin x$. Atunci f nu este periodică.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Presupunem f periodică, deci $(\exists)\ T > 0$ a.î.

$$[x] \sin x = [x + T] \sin (x + T),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \qquad (1)$$

$\in \pi \mathbf{N}$. Atunci $T = n\pi$ cu $n \in \mathbf{N}$, deci pentru $x = \frac{\pi}{2}$, din (1) obținem :

$$1 = \left[\frac{\pi}{2} + n\pi\right] \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n \left[\frac{\pi}{2} + n\pi\right],$$

absurd.

2° $T \in \mathbf{R}_+^* \setminus \pi\mathbf{N}$. Atunci pentru $x = 2\pi$, din (1) obținem :

$$0 = [2\pi + T] \sin T \Leftrightarrow T \in \pi\,\mathbf{N},\ \text{absurd.}$$

Prin urmare funcția f nu este periodică.

4.5.3. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție care admite drept periodă orice număr irațional. Atunci f este constantă.*

Soluție. Fie $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ fixat și $\lambda = f(x_0)$. Dacă $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, avem $f(x + x_0) = f(x_0)$ și $f(x + x_0) = f(x)$, deoarece x și x_0 sînt perioade pentru f, cf. ipotezei. Atunci $f(x) = f(x_0) = \lambda$. Dacă $x \in \mathbf{Q}$, atunci $x + \sqrt{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, deci $f(x) = f(x + \sqrt{2}) = \lambda$ și deci $f = \lambda$.

4.5.4. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție periodică de perioadă T. Atunci este lipschitziană $\Leftrightarrow f|_{[0,T]}$ este lipschitziană.*

Soluție. ($\Leftarrow$) Presupunem $f_{[0,T]}$ λ-lipschitziană și fie $x, y \in \mathbf{R}$ fixați. Dacă $x, y \in [0, T]$, avem $|f(x) - f(y)| \leqslant \lambda\ |x - y|$. Dacă $|x - y| \leqslant T$, $(\exists)\ n \in \mathbf{Z}$ a.î. $x, y \in [nT, (n + 1)\,T]$, deci $x - nT \in [0, T]$ și $y - nT \in [0, T]$ și deci

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - nT) - f(y - nT)| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda\ |(x - nT) - (y - nT)| = \lambda\ |x - y|.$$

În fine, dacă $|x - y| > T$, $(\exists)\ n, m \in \mathbf{Z}$ a.î. $x,\ y + mT \in [nT, (n + 1)T]$, deci

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(y + mT)| \leqslant \lambda\ |x - (y + mT)| \leqslant \lambda |x - y| \text{ etc.}$$

4.5.5. Exercițiu. *Fie $f : (a, \infty) \to \mathbf{R}$ o funcție periodică și T o perioadă a lui f. Atunci $f = 0 \Leftrightarrow f$ se anulează pe un interval de lungime T.*

Soluție. Să presupunem că există un interval $[c, d]$ inclus în (a, ∞), de lungime T a.î. f se anulează pe $[c, d]$.

Să fixăm $x > a$. Atunci există $n \in \mathbf{Z}$ a.î. $c \leqslant x - nT \leqslant d$, deci $f(x) = f(x - nT) = 0$ și deci $f = 0$.

4.5.6. Exercițiu. *Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții periodice. Dacă f posedă o perioadă T și g o perioadă T_1 a.î. $T/T_1 \in \mathbf{Q}$, atunci $f \pm g, fg, f/g$ (cînd este definită) sînt funcții periodice.*

Soluție. Dacă $T/T_1 \in \mathbf{Q}$, cum $T, T_1 > 0$, există $r = p/q$ cu $p, q \in \mathbf{N}$ a.î. $r = p/q$ și $T/T_1 = r$, adică $pT_1 = qT$.

Evident qT este perioadă pentru f și pT_1 perioadă pentru g, deci f, g posedă perioade egale. Atunci evident $f \pm g, fg, f/g$ sînt periodice.

Corolar 1. *Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții periodice cu perioade raționale. Atunci $f + g$, fg și f/g (cînd este definită) sînt periodice.*

Observație. Dacă $T/T_1 \notin \mathbf{Q}$, atunci Ex. 4.5.6. nu este numaidecît adevărat.

Contraexemplu : $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$; $g(x) = \sin x\sqrt{2}$, $x \in \mathbf{R}$.

4.5.7. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție periodică și monotonă. Atunci f este constantă.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Deoarece f este periodică $(\exists)\ T>0$ a.î. $f(x+T)=f(x)$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$. Să presupunem că f este monoton crescătoare. Atunci $f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(T)$, $(\forall)\ x\in[0,\ T]$. Cum $f(0)=f(T)$, deducem că $f(x)=f(0)$, $(\forall)\ x\in[0,\ T]$, adică funcția f este constantă pe $[0,\ T]$ și deci pe $\mathbf{R}$.

4.5.8. Exercițiu. *Fie* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\setminus\{1\}$ *o funcție cu proprietatea că există* $a\neq 0$ a.î. $f(x+a)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$. *Atunci* f *este periodică.*

Soluție. Dacă ar exista $x_0\in\mathbf{R}$ a.î. $f(x_0)=0$, atunci $f(x_0+a)=1$, absurd. Deci $f(x)\neq 0$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$. Evident avem:

$$f(x+2a)=\frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=\left[1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right]:\left[1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right]=-\frac{1}{f(x)},$$

deci

$$f(x+4a)=f((x+2a)+2a)=-\frac{1}{f(x+2a)}=f(x),\ (\forall)\ x\in\mathbf{R}.$$

Prin urmare $T=4a$ este o perioadă a lui f, deci f este periodică.

4.5.9. Exercițiu. *Fie* $f:\mathbf{R}\to[-1,\ 1]$ *o funcție cu proprietatea că există* $a\neq 0$ *a.î.* $f(x+a)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$. *Atunci* f *este periodică.*

Soluție. Din relația dată avem $f(x)\geqslant\dfrac{1}{2}$, deci $f(x)\in\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$. Să arătăm că $2a$ este o perioadă pentru f. Într-adevăr avem:

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2}=$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}-\frac{1}{4}-\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}-f(x)+[f(x)]^2}=$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+[f(x)]^2}=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{2f(x)-1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}+\frac{2f(x)-1}{2}=$$

$$=f(x),\ (\forall)\ x\in\mathbf{R}.$$

4.5.10. Exercițiu. *Fie* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x)=\sin x+\cos\lambda x$. *Dacă* f *este periodică atunci* $\lambda\in\mathbf{Q}$.

Soluție. Fie $T>0$ a.î. $f(x+T)=f(x)$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$. De aici avem $f(T)=f(-T)=f(0)$, adică $\sin T+\cos\lambda T=-\sin T+\cos\lambda T=1$, deci $\sin T=0$ și $\cos\lambda T=1$ și deci $T\in\{k\pi;\ k\in\mathbf{Z}\}$ și $\lambda T\in\left\{\dfrac{\pi}{2}\diamond 2k\pi;\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

Așadar $\dfrac{1}{\pi}T$ și $\dfrac{2}{\pi}\lambda T\in\mathbf{Z}$, deci $0\neq\dfrac{T}{\pi}\in\mathbf{Q}$ și $\lambda\dfrac{T}{\pi}\in\mathbf{Q}$, prin urmare $\lambda\in\mathbf{Q}$.

4.5.11. Exercițiu. *Fie* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcție cu proprietatea că există* λ *și* T *în* $\mathbf{R}$ *a.î.*

$$f(x+T)=\lambda f(x),\ (\forall)\ x\in\mathbf{R}\qquad(1)$$

Atunci există un număr $c>0$ *și* $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcție periodică de perioadă* T *a.î.* $f(x)=c^x\varphi(x)$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Considerăm funcția $\varphi(x) = \frac{f(x)}{c^x}$, $x \in \mathbf{R}$, unde c este un parametru real pozitiv. Să determinăm c, ținînd seama de condiția (1), a.î. φ să fie periodică și T o perioadă a sa. Evident avem :

$$\varphi(x + T) = \frac{f(x + T)}{c^x + T} = \frac{\lambda}{c^T} \frac{f(x)}{c^x} = \frac{\lambda}{c^T} \varphi(x), \ (\forall) \ x \in \mathbf{R}.$$

Deci dacă $\frac{\lambda}{c^T} = 1 \Leftrightarrow c = \sqrt[T]{\lambda}$, atunci φ satisface condițiile cerute.

4.5.12. Exercițiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție arbitrară și* $g(x) = f(ax + b)$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, *unde* $a > 0$. *Atunci* :

1° f *este periodică* $\Leftrightarrow$ g *este periodică* ;

2° f *are perioada minimă* $T \Leftrightarrow g$ *are perioada minimă* $\frac{1}{a} T$.

Ind. 1° Implicația $(\Rightarrow)$ este evidentă. Pentru implicația $(\Leftarrow)$ observăm că $f(y) = g\left(\frac{1}{a} y - \frac{b}{a}\right)$, $(\forall)$ $y \in \mathbf{R}$ și facem același raționament schimbînd rolul lui g cu f.

4.5.13. Exercițiu. *Să se arate că funcția* $f(x) = \sin x^2$, $x \in \mathbf{R}$, *nu este periodică.*

Ind. Dacă f este periodică $(\exists)$ $T > 0$ a.î. $\frac{(x + T)^2 \pm x^2}{\pi} \in \mathbf{Z}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$.

Punem mai departe $x = 0$ și $x = \pi - \frac{T}{2}$ etc.

4.5.14. Exercițiu. *Fie* $f : (a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție arbitrară. Atunci există* $\tilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție periodică de perioadă* $0 < T \leqslant b - a$, *a.î.* $\tilde{f}|_{[a,b]} = f$.

Soluție. Fie $y \in \mathbf{R}$ fixat. Atunci există $x \in (a, b]$ și $n \in \mathbf{Z}$ unic determinați a.î. $y = x + nl$, unde $l = b - a$. Punem $\tilde{f}(y) = f(x)$; funcția $\tilde{f}$ astfel definită este periodică de perioadă l și prelungește pe f.

4.5.15. Exercițiu. *Să se arate că funcția* $f(x) = \text{sign trig } x$, $x \in D_{\text{trig}}$ *este periodică, apoi să se reprezinte grafic.*

Ind. Avem spre exemplu (fig. 3) $f(x) = \text{sign sin } x$

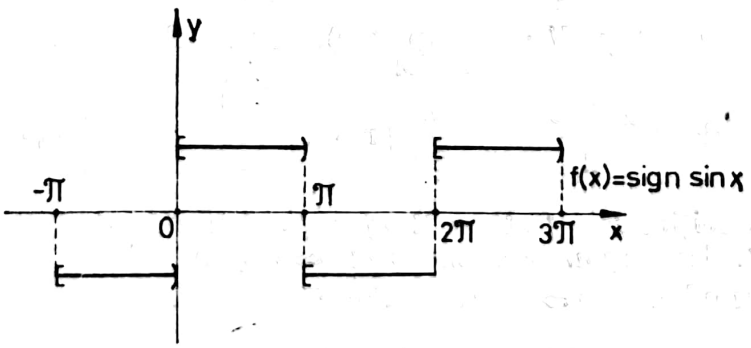


Fig. 3

4.6. Funcţii mărginite. Extreme

4.6.1. Exerciţiu. *Să se determine extremele funcţiei* $f(x) = \dfrac{1+x^4}{(1+x^2)^2}$, $x \in \mathbf{R}$.

Soluţie. Oricare număr real x se reprezintă unic sub forma $x = \operatorname{tg}\theta$ cu $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci $f(x)$ se scrie

$$f(\operatorname{tg}\theta) = \frac{1+\operatorname{tg}^4\theta}{(1+\operatorname{tg}^2\theta)^2} = \frac{(1+\operatorname{tg}^2\theta)^2 - 2\operatorname{tg}^2\theta}{(1+\operatorname{tg}^2\theta)^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin 2,\ \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

deci

$$\max_{x\in\mathbf{R}} f(x) = \max_{|\theta|<\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg}\theta) = \max_{|\theta|<\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\min_{|\theta|<\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta = 1 = f(0) \text{ etc.}$$

4.6.2. Exerciţiu. *Fie* A *mulţimea* $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ 2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 3\}$ *şi* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4$. *Să se determine* $\max f(A)$ *şi* $\min f(A)$.

Soluţie. Fie $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Atunci avem :

$$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^4(\cos^4\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta) =$$

$$= r^4(1 - \cos^2\theta\sin^2\theta) = \frac{r^4}{4}(4 - \sin 2\theta),\ 2 \leqslant r^2 \leqslant 3,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

dec

$$\max f(A) = \max\{F(r,\theta);\ 2 \leqslant r^2 \leqslant 3,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\} = 9 = F(\sqrt{3},0) = f(\sqrt{3},0)$$

şi analog $\min f(A) = 3 = F\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = f(1,1)$.

4.6.3. Exerciţiu. *Să se determine extremele funcţiei reale*

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ x \in [\alpha,\gamma]\ (a \neq 0)$$

Ind. Dacă $a > 0$ şi $M := \sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$, atunci $M = f(\alpha)$ (resp. $M = f(\beta)$),

$$\text{dacă } \frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant -\frac{b}{2a}\left(\text{resp. } \frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant -\frac{b}{2a}\right).$$

4.6.4. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *unde* $a, b, c \in \mathbf{R}$. *Atunci* f *are extreme locale* $\Leftrightarrow a \neq 0$.

Soluţie. Implicaţia ($\Rightarrow$) este evidentă.

($\Leftarrow$) Avem $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$, (A) $x \in \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Atunci $f(x_0) > (\text{resp. } <) f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R} \setminus \{x_0\}$, dacă $a < 0$ (resp. $a > 0$).

Prin urmare $x_0 = -\frac{b}{2a}$ este punct de maxim (resp. minim) local dacă $a < 0$ (resp. $a > 0$).

Observație. Funcția f este monotonă pe $(-\infty, x_0)$ și pe (x, ∞).

4.6.5. Exercițiu. *Să se determine punctele de maxim și de minim ale funcției* : $f(x) = a \cos x + b \sin x$, $x \in \mathbf{R}$, *unde* $a^2 + b^2 \neq 0$.

Soluție. Scriem f sub forma :

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right).$$

Evident există $\theta \in [0, 2\pi)$ unic determinat a.î.

$$\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ și } \cos \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Atunci

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \theta \cos x + \cos \theta \sin x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin (\theta + x),$$

deci

$$M = \sup_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \sqrt{a^2 + b^2},\ m = \inf_{x \in \mathbf{R}} f(x) = -\sqrt{a^2 + b^2},$$

și deci

$$x_1 \text{ punct de maxim} \Leftrightarrow \sin (x_1 + \theta) = 1 \Leftrightarrow x_1 = -\theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi;$$

$$x_0 \text{ punct de minim} \Leftrightarrow \sin (x_1 + \theta) = -1 \Leftrightarrow x_1 = -\theta + \frac{3\pi}{2} + 2k\pi.$$

4.6.6. Exercițiu. *Fie* $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel:* $f(x) = a \cos x + b \sin x$ (a, b *parametrii reali*). *Să se determine* a *și* b *a.î.* $\max_{x \in [0, 2\pi]} [f(x)]^2 = 2\,|ab|$.

Soluție. (i) Dacă $a = b = 0$, atunci $f = 0$ și $\max_{x \in [0, 2\pi]} [f(x)]^2 = 0$.

(ii) Dacă $a^2 + b^2 \neq 0$, există $\theta \in [0, \pi]$ a.î.

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ și } \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Atunci

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \cos (\theta - x),\ (\forall) x \in [0, 2\pi].$$

Evident avem

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} [f^2(x)] = a^2 + b^2,\ (\forall) a, b \in \mathbf{R}.$$

Rămîne deci să determinăm numerele reale a și b a.î.

$$a^2 + b^2 = 2\,|ab| \Leftrightarrow (|a| - |b|)^2 = 0 \Leftrightarrow |a| = |b|.$$

Scanned with OKEN Scanner

4.6.7. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime şi $f : A \to \mathbf{R}$ o funcţie. Atunci f este mărginită $\Leftrightarrow$ $(\forall)$ $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir cu elemente din A, rezultă că şirul $(f(a_n))_{n\geq 1}$ este mărginit.*

Soluţie. Implicaţia $(\Rightarrow)$ este evidentă.

$(\Leftarrow)$ Presupunem că f nu este mărginită, adică mulţimea $f(A)$ nu este mărginită. Atunci $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}$ există $y_n \in f(A)$ a.î. $|y_n| \geq n$. Fie $a_n \in A$ a.î. $f(a_n) = y_n$, $(\forall)$ $n \geq 1$. Evident $(f(a_n))_{n\geq 1}$ nu este mărginită, absurd. Rămîne că f este mărginită.

4.6.8. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie periodică de perioadă T. Atunci f este mărginită $\Leftrightarrow$ există $J \subseteq \mathbf{R}$ un interval închis de lungime $\geq T$ a.î. $f|_J$ este mărginită.*

Soluţie. Implicaţia $(\Rightarrow)$ este evidentă.

$(\Leftarrow)$ Funcţia $f|_J$ fiind mărginită, există $\lambda \in \mathbf{R}_+$, a.î. $|f(x)| \leq \lambda$, $(\forall)$ $x \in J$. Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ fixat. Atunci există $n \in \mathbf{Z}$ a.î. $x_0 \in nT + J$, deci există $n \in \mathbf{Z}$ şi $y \in J$ a.î. $x_0 = nT + y$. Deoarece T este o perioadă pentru f avem :

$$|f(x_0)| = |f(nT + y)| = |f(y)| \leq \lambda \Rightarrow |f(x_0)| \leq \lambda,$$

şi deci f este mărginită.

4.6.9. Exerciţiu. *Să se construiască o funcţie $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că f nu este mărginită pe nici un interval $J \subseteq [0,1]$ cu $\mathring{J} \neq \emptyset$.*

Soluţie. Considerăm funcţia :

$$f(x) = \begin{cases} q, & (\forall)\ x \in [0,1] \cap \mathbf{Q},\ x = p/q \text{ şi } (p,\ q) = 1 \\ 0, & (\forall)\ x \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Să arătăm că funcţia f satisface condiţiile din enunţ.

Într-adevăr fie $J \subseteq [0,1]$ un interval cu $\mathring{J} \neq \emptyset$. Evident există în J un şir de fracţii raţionale ireductibile $\left(\frac{r_n}{q_n}\right)_{n\geq 1}$ a.î. $q_n \neq q_m$, $(\forall)$ $n \neq m$. Deoarece $\{q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots\}$ este o mulţime infinită de numere naturale, ea este nemărginită. Atunci avem :

$$\sup_{x\in J} f(x) \geq \sup_{n\geq 1} f\left(\frac{r_n}{q_n}\right) = \sup_{n\geq 1} q_n = +\infty,$$

deci f este nemărginită pe J.

4.6.10. Exerciţiu. *Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcţii a.î. $0 \neq |f| \leq 1$ şi $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,g(x)$, $(\forall)$ $x, y \in \mathbf{R}$. Atunci $|g| \leq 1$.*

Soluţie. Fie $M = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$. Prin ipoteză avem $0 < M \leq 1$.

Din definiţia marginii superioare, pentru $(\forall)$ $n \geq 1$, există $x_n \in \mathbf{R}$ a.î. $|f(x_n)| \geq M - \frac{1}{n}$. Deoarece $M > 0$, există $n_0 \geq 1$ a.î. $M - \frac{1}{n} > 0$, $(\forall)$ $n \geq n_0$. Prin urmare $(\forall)$ $y \in \mathbf{R}$ şi $n \geq n_0$, avem :

$$2M \geq |f(x_n + y)| + |f(x_n - y)| \geq |f(x_n + y) + f(x_n - y)| = 2|f(x_n)|\,|g(y)|,$$

deci

$$|g(y)| \leq \frac{M}{|f(x_n)|} \leq \frac{M}{M - \frac{1}{n}},\ (\forall)\ n \geq n_0.$$

Trecînd cu n la limită către ∞, deducem $|g(y)| \leq 1$, deci $|g| \leq 1$.

Scanned with OKEN Scanner

4.6.11. Exerciţiu. *Fie* $I = [0,1]$ *şi* $f : I \times I \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x, y) = (x - y)^2$, $(\forall)$ $(x, y) \in I \times I$. *Atunci* :

$$\max_{y \in I} \min_{x \in I} f(x, y) < \min_{x \in I} \max_{y \in I} f(x, y)$$

Soluţie. Pe de-o parte avem :

$$\min_{x \in I} f(x, y) = \min_{x \in I} (x - y)^2 = 0, \ (\forall)\ y \in I,$$

deci $\max_{y \in I} \min_{x \in I} f(x, y) = 0$. Pe de altă parte avem :

$$\max_{y \in I} f(x, y) = \begin{cases} (1 - x)^2, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ x^2, & \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

deci (fig. 4) $\min_{x \in I} \max_{y \in I} f(x, y) = \dfrac{1}{4}$.

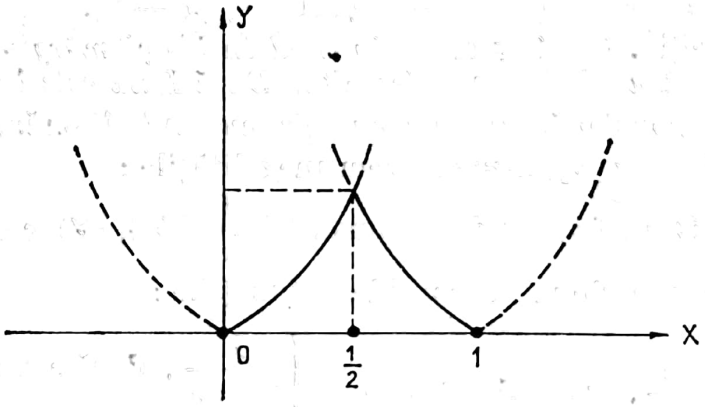


Fig. 4

Corolar 1. *Operaţiile* max *şi* min *nu comută între ele.*

4.6.12. Exerciţiu. *Fie* A *şi* B *două mulţimi şi* $f : A \times B \to \mathbf{R}$ *o funcţie. Atunci* $\inf_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y)$ *şi* $\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} f(x, y)$ *sînt cuprinse între* $\inf_{x \in A} \inf_{y \in B} f(x,y)$ *şi* $\sup_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y)$.

Soluţie. Evident avem :

$$\inf_{y \in B} f(x, y) \leqslant \sup_{y \in B} f(x, y), \ (\forall)\ x \in A,$$

deci

$$\inf_{x \in A} \inf_{y \in B} f(x, y) \leqslant \inf_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y) \leqslant \sup_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y)$$

şi

$$\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} f(x, y) \leqslant \sup_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y).$$

4.6.13. Exerciţiu. *Fie* $(A_i)_{i \in I}$ *o familie de mulţimi,* $A := \bigcup_i A_i$ *şi* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcţie. Atunci* : 1° $\sup f(A) = \sup_i \sup f(A_i)$; 2° $\inf f(A) = \inf_i \inf f(A_i)$.

Scanned with OKEN Scanner

Ind. $1^\circ\ x \in A \Rightarrow (\exists)\ i_0 \in I$ a.î. $x \in A_{i_0} \Rightarrow f(x) \leqslant \sup f(A_{i_0}) \leqslant \sup_i \sup f(A_i) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sup_{x \in A} f(x) \leqslant \sup_i \sup f(A_i).$$

$$\sup f(A_i) \leqslant \sup f(A) \Rightarrow \sup_i \sup f(A_i) \leqslant \sup f(A), \text{ etc.}$$

4.6.14. Exerciţiu. *Fie A o mulţime şi $f : A \to \mathbf{R}$ o funcţie. Dacă A sau $f(A)$ este o mulţime finită, atunci f este mărginită şi îşi atinge marginile.*

Ind. Dacă A este finită $\Rightarrow f(A)$ finită. Atunci $\inf f(A)$ şi $\sup f(A) \in f(A)$.

4.6.15. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime şi $d(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Atunci avem*

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant |x - y|,\ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}.$$

Soluţie. $d(x, A) \leqslant |x - a| \leqslant |x - y| + |y - a|$, $(\forall)\ a \in A$,

deci

$$d(x, A) - \inf_{a \in A} |y - a| \leqslant |x - y| \Leftrightarrow d(x, A) - d(y, A) \leqslant |x - y| \qquad (1)$$

Analog

$$d(y, A) - d(x, A) \leqslant |y - x| = |x - y| \qquad (2)$$

Din (1) $\wedge$ (2) rezultă că $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant |x - y|$.

4.6.16. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval închis şi mărginit şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie monotonă. Atunci f este mărginită. Dacă I nu este închis şi mărginit sau dacă f nu este monotonă, atunci f nu este numaidecît mărginită.*

Ind. Dacă $I = [a, b]$, atunci avem inegalităţile :

$$\min\{f(a), f(b)\} \leqslant f(x) \leqslant \max\{f(a), f(b)\},\ (\forall)\ x \in I.$$

Pentru partea a doua se consideră funcţiile :

$$f(x) = \frac{1}{x},\ x \in (0,1] \text{ şi } g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & \text{dacă } x \in [0,1) \\ 0 & ,, \quad x = 1 \end{cases}$$

4.7. Funcţii liniare

4.7.1. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie subaditivă şi nenegativă. Atunci funcţia $g = \dfrac{f}{1 + f}$ este subadditivă.*

Soluţie. Fie $x, y \in \mathbf{R}$ fixaţi. Atunci avem $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$, deci (P. 4.2.2.) funcţia $\varphi(t) = \dfrac{t}{1 + |t|}$, $t \in \mathbf{R}$, fiind strict crescătoare, rez ultă

$$g(x + y) = \varphi(f(x + y)) \leqslant \varphi(f(x) + f(y)) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x) + f(y)}$$

şi deci (P.4.2.2. Cor. 1) :

$$g(x + y) \leqslant \frac{f(x)}{1 + f(x)} + \frac{f(y)}{1 + f(y)} = g(x) + g(y)$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare g este subaditivă.

4.7.2. Exerciţiu. *Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$ trei numere cu proprietatea că*

$$|ax^2 + bx + c| \leqslant 1, \ (\forall)\ |x| \leqslant 1 \tag{1}$$

Atunci

$$|cx^2 + bx + a| \leqslant 2, \ (\forall)\ |x| \leqslant 1$$

Soluţie. Înlocuind în (1) pe x cu $1, 0$ şi -1 obţinem :

$$|a + b + c| \leqslant 1, \ |c| \leqslant 1, \ |a - b + c| \leqslant 1 \tag{2}$$

Funcţia $f(x) = bx + a + c$, $x \in [-1, 1]$, fiind afină, rezultă

$$|f(x)| \leqslant \max\{|f(1)|, |f(-1)|\}, \ (\forall)\ |x| \leqslant 1,$$

deci cf. (2) avem :

$$|bx + a + c| \leqslant 1, \ (\forall)\ |x| \leqslant 1$$

Atunci

$$|cx^2 + bx + a| = |c(x^2 - 1) + bx + a + c| \leqslant |c| \cdot |x^2 - 1| +$$
$$+ |bx + a + c| \leqslant 1 \cdot 1 + 1 = 2, \ (\forall)\ |x| \leqslant 1.$$

4.7.3. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie liniară şi mărginită. Atunci $f = 0$.*

Soluţie. Funcţia f fiind mărginită există $M > 0$ a.î.

$$|f(x)| \leqslant M, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Fixăm $x_0 \in \mathbf{R}$. Atunci $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ avem $|f(nx_0)| \leqslant M$, deci $|f(x_0)| \leqslant \frac{1}{n} M$ şi deci $0 \leqslant |f(x_0)| \leqslant M \cdot \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, adică $f(x_0) = 0$. Cum $x_0 \in \mathbf{R}$ a fost arbitrar, deducem că $f = 0$.

4.7.4. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie subadditivă a.î. $f(-x) \leqslant f(x)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Atunci $f \geqslant 0$ şi $|f(x) - f(y)| \leqslant f(x - y)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$.*

Soluţie. Evident avem $f(x) = f(-(-x)) \leqslant f(-x) \leqslant f(x)$, deci

$$f(x) = f(-x), \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Cum $f(0) = f(0 + 0) \leqslant f(0) + f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) \geqslant 0$.
Deoarece $0 \leqslant f(0) = f(x - x) \leqslant f(x) + f(-x) = 2f(x) \Rightarrow f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.
Atunci

$$f(x) \leqslant f(x - y + y) \leqslant f(x - y) + f(y), \ (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

deci

$$f(x) - f(y) \leqslant f(x - y), \ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R} \tag{1}$$

Analog obţinem $f(y) - f(x) \leqslant f(x - y)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$ (2)
Din (1) şi (2) deducem $|f(x) - f(y)| \leqslant f(x - y)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$.

4.7.5. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie subadditivă şi $\lambda \in \mathbf{R}$. Atunci funcţia $f + \lambda$ este subadditivă $\Leftrightarrow \lambda \geqslant 0$.*

Ind. ($\Rightarrow$) Fie $g = f + \lambda$ şi să fixăm $x, y \in \mathbf{R}$. Atunci

$$g(x + y) \leqslant g(x) + g(y),$$

deci

$$f(x + y) + \lambda \leqslant (f(x) + \lambda) + (f(y) + \lambda),$$

de unde rezultă $0 \leqslant \lambda$.

Scanned with OKEN Scanner

4.7.6. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie aditivă (resp. subaditivă). Atunci* $(\forall)$ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ *avem* $f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = (resp.\ \leqslant) \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.

Ind. Prin inducţie relativ la n.

Corolar 1

$[x_1 + x_2 + \ldots + x_n] \geqslant [x_1] + [x_2] + \ldots + [x_n]$, $(\forall)$ $x_i \in \mathbf{R}_+$

4.7.7. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie multiplicativă (resp. submulti plicativă). Atunci* $(\forall)$ $x_1, x_2 \ldots, x_n \in \mathbf{R}$, *avem* $f\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = (resp.\ \leqslant) \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$.

Ind. Prin inducţie relativ la n.

Corolar 1

1° $\operatorname{sign}(x_1 x_2 \ldots x_n) = (\operatorname{sign} x_1)(\operatorname{sign} x_2) \ldots (\operatorname{sign} x_n)$, $(\forall)$ $x_i \in \mathbf{R}$;

2° $[x_1 x_2 \ldots x_n] \geqslant [x_1] \cdot [x_2] \ldots [x_n]$, $(\forall)$ $x_i \in \mathbf{R}_+$.

4.8. Funcţii cu punct fix

4.8.1. Exerciţiu. *Fie* A *o mulţime şi* $f, g : A \to A$ *două funcţii cu proprietatea* $f \circ g = g \circ f$. *Dacă* f *are un punct fix unic* x_0, *atunci* $g(x_0) = x_0$.

Soluţie. Din ipoteză avem $f(x_0) = x_0$ şi $fg(x_0) = gf(x_0)$ deci $f(g(x_0)) = g(x_0)$ şi deci $g(x_0)$ este punct fix pentru f. Cum f are un singur punct fix, pe x_0, concludem că $g(x_0) = x_0$

Corolar 1. *Fie* A *o mulţime şi* $f : A \to A$ *o funcţie cu proprietatea că există* $n \in \mathbf{N}$ *a.î.* f^n *are un punct fix unic* x_0. *Atunci* x_0 *este punct fix şi pentru* f.

4.8.2. Exerciţiu. *Să se arate că există o funcţie* $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ *a.î.* $(f \circ f)(n) = n$, $(\forall)$ $n \in \mathbf{Z}$ *şi* f *nu are puncte fixe.*

Soluţie. Fie $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definită astfel $f(n) = n + 1$, dacă n este par şi $f(n) = n - 1$, dacă n este impar. Evident $f(n) \neq n$, $(\forall)$ $n \in \mathbf{Z}$, deci f nu are puncte fixe.

Dacă $n = 2k$, atunci $f(n) = 2k + 1$ şi $(f \circ f)(n) = f(2k + 1) = 2k = n$. Analog $(f \circ f)(n) = n$, dacă $n = 2k - 1$.

Observaţie. Afirmaţia rămîne adevărată dacă înlocuim $\mathbf{Z}$ cu o mulţime infinită arbitrară ([39]).

4.8.3. Exerciţiu. *Fie funcţia* $f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & (\forall)\ x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, *unde* $0 < \alpha < 2$

Dacă $1 < \alpha < 2$ *(resp.* $0 < \alpha \leqslant 1$*), atunci* f *are un punct fix (resp. o infinitate de puncte fixe).*

Soluţie. 1) $1 < \alpha < 2$. Deoarece $f(-x) = -f(x)$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, este suficient să considerăm f pe $\mathbf{R}_+$.

Cum $-1 \leqslant \sin \frac{1}{x} \leqslant 1$, rezultă că $-x^\alpha \leqslant x^\alpha \sin \frac{1}{x} \leqslant x^\alpha$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+^*$, deci $-x \leqslant x^\alpha \sin \frac{1}{x} < x$, $(\forall)$ $x \in (0, 1)$. Dacă $x > 1$, atunci avem $\sin \frac{1}{x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{x^{\alpha-1}}$. Prin urmare $f(x) \neq x$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$ şi cum $f(1) \neq 1$,

Scanned with OKEN Scanner

deducem că f are un singur punct fix, $x = 0$.

$$2)\ \alpha = 1;\ f(x) = x \Leftrightarrow \sin\frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

deci f are o infinitate de puncte fixe în $\mathbf{R}_+$ ca și în $\mathbf{R}_-$.

3) $0 < \alpha < 1$. Să observăm că graficul funcțiilor $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$ și $x \to x^{1-\alpha}$, $x \in \mathbf{R}$, se intersectează într-o infinitate de puncte, deci f are o infinitate de puncte fixe.

4.9. Funcții polinomiale

4.9.1. Exercițiu. *Să se determine o funcție polinomială neinjectivă* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *cu proprietatea că* $f|_{\mathbf{Q}}$ *este injectivă.*

Soluție. Fie $f(x) = x^2 - x\sqrt{2}$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci $f|_{\mathbf{Q}}$ este injectivă : fie $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$ cu $f(r_1) = f(r_2)$, deci $r_1^2 - r_1\sqrt{2} = r_2^2 - r_2\sqrt{2}$ și deci $(r_1 - r_2)(r_1 + r_2 - \sqrt{2}) = 0$; cum $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$, avem $r_1 + r_2 - \sqrt{2} \neq 0$, încît $r_1 - r_2 = 0$, prin urmare $f|_{\mathbf{Q}}$ este injectivă. Evident $f(0) = f(\sqrt{2})$, deci f nu este injectivă.

4.9.2. Exercițiu. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție mărginită și* $n \in \mathbf{N}$. *Atunci există* $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ *două polinoame de grad* n *a.î.*

$$P(x) \leqslant f(x) \leqslant Q(x),\ (\forall)\ x \in [a, b].$$

Soluție. Fie $I := [a, b]$, $m := \inf_{x \in I} f(x)$, $M := \sup_{x \in I} f(x)$, $m_1 := \inf_{x \in I} x^n$ și $M_1 := \sup_{x \in I} x^n$. Fie mai departe $h \leqslant m - M_1$, $k \geqslant M - m_1$, $P = X^n + h$ și $Q = X^n + k$. Atunci $(\forall)\ x \in I$, avem :

$$P(x) \leqslant M_1 + h \leqslant m \leqslant f(x) \leqslant M \leqslant m_1 + k \leqslant Q(x).$$

4.9.3. Exercițiu. *Fie* $P \in \mathbf{R}[X]$ *un polinom care are toate rădăcinile reale a.î.* $P(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. *Atunci există* $Q \in \mathbf{R}[X]$ *a.î.* $P(x) = (Q(x))^2$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Soluție. Fie x_0 o rădăcină a lui P. Atunci $P(x) = (x - x_0)^\alpha P_1(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, unde $P_1 \in \mathbf{R}[X]$ și $P_1(x_0) \neq 0$. Dacă α este impar, atunci P are semne diferite într-un interval care nu conține alte rădăcini ale lui P decît pe x_0, absurd, deoarece $P(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Așadar toate rădăcinile lui P au ordinul de multiplicitate par, deci

$$P(x) = c\prod_{i=1}^{k}(x - x_i)^{\alpha_i} = (\sqrt{c}\prod_{i=1}^{k}(x - x_i)^{\frac{\alpha_i}{2}})^2,\ x \in \mathbf{R}$$

4.9.4. Exercițiu. *Fie* $P \in \mathbf{R}[X]$ *un polinom cu proprietatea că* $P(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. *Atunci există* $P_1, P_2 \in \mathbf{R}[X]$ *a.î.* $P(x) = P_1^2(x) + P_2^2(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Soluție. P are numai rădăcini complexe $z_k = \alpha_k + i\beta_k$ și $\bar{z}_k = \alpha_k - i\beta_k$ $(k = \overline{1, n})$ și coeficientul dominant $c_0 > 0$. Dacă punem

$$Q(x) := \prod_{k=1}^{n}(x - z_k) = Q_1(x) + iQ_2(x);\ R(x) := \prod_{k=1}^{n}(x - \bar{z}_k) = R_1(x) + iR_2(x),$$

unde $Q_1, Q_2, R_1, R_2 \in \mathbf{R}[X]$, atunci

$$Q = \bar{R} = R_1 - iR_2 \Leftrightarrow Q_1 = R_1 \wedge Q_2 = -R_2$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$P(x) = c_0 Q(x) R(x) = c_0 Q_1^2(x) + c_0 Q_2^2(x), \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Punem $P_1 = \sqrt{c_0} Q_1$ și $P_2 = \sqrt{c_0} Q_2$.

4.9.5. Exercițiu. *Fie P un polinom cu coeficienți întregi și a,b,c trei numere întregi diferite între ele. Atunci nu pot avea loc simultan relațiile :*

$$P(a) = b, \ P(b) = c, \ P(c) = a \tag{1}$$

Soluție. Presupunem prin absurd că (1) are loc și fie $\alpha \in \mathbf{Z}$ fixat. Atunci

$$P(x) - P(\alpha) = (x - \alpha) Q(x), \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R} \tag{2}$$

unde $Q = Q_\alpha \in \mathbf{Z}[X]$. Punem în (2) $x = a$ și $\alpha = b$, apoi ținem seama de (1); obținem :

$$b - c = P(a) - P(b) = (a - b) Q_b(a)$$

Analog

$$c - a = P(b) - P(c) = (b - c) Q_c(a), \ a - b = P(c) - P(a) = (c - a) Q_a(c)$$

Cum $Q_b(a), Q_c(b), Q_a(c) \in \mathbf{Z}$ rezultă că

$$b - c \mid a - b, \ c - a \mid b - c, \ a - b \mid c - a,$$

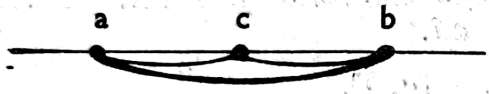


Fig. 5

deci

$$|a - b| \leqslant |b - c| \leqslant |c - a| \leqslant |a - b|$$

și deci

$$a - b = b - c = c - a,$$

ceea ce este absurd. Așadar (1) nu are loc.

4.9.6. Exercițiu. *Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ un polinom. Dacă ecuația $P(x) = x$ nu are rădăcini reale, atunci $(\forall)\ n \geqslant 1$ ecuația $\underbrace{P \circ P \circ \ldots \circ P}_{n}(x) = x$ nu are rădăcini reale.*

Soluție. Aplicăm Ex. 4.8.1. Cor. 1. pentru funcția polinomială asociată lui P.

4.9.7. Exercițiu. *Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ un polinom. Să se reprezinte grafic funcția $f(x) = \operatorname{sign} P(x)$, $x \in \mathbf{R}$.*

Ind. Dacă P are rădăcini reale distincte $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, atunci

$$f(x) = \varepsilon \operatorname{sign}\left(\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)\right) = \varepsilon \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(x - x_i) \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

Pentru n par, f are graficul din fig. 6.

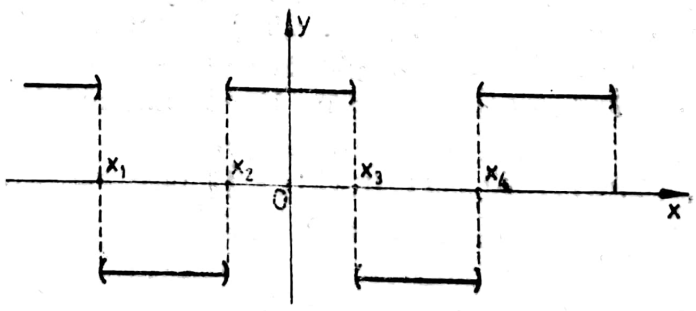


Fig. 6

Scanned with OKEN Scanner

Se consideră mai departe cazul cînd P are rădăcinile reale, unele multiple apoi cazul cînd P are și rădăcini imaginare.

4.9.8. Exercițiu. *Să se determine funcțiile* $f\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *care au proprietatea că* $f \circ P = P \circ f$ *pentru orice funcție polinomială* P *de grad* 1.

Ind. Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ cu grad $P = 1 \Rightarrow P = aX + b\ (a \neq 0)$.

Relația $f \circ P = P \circ f$, $(\forall)\ P \in \mathbf{R}\ [X]$, grad $P = 1$, devine:

$$f(ax + b) = af(x) + b,\ (\forall)\ a, b, x \in \mathbf{R} \text{ și } a \neq 0.$$

Din $f(0) = af(0)$, $(\forall)\ a \neq 0$, avem $f(0) = 0$, deci $f(b) = b$, $(\forall)\ b \in \mathbf{R}$.

4.9.9. Exercițiu. *Fie* P, Q *două polinoame cu coeficienți reali și* grad $Q \geqslant 1$. *Atunci* $P = 0 \Leftrightarrow P \circ Q = 0$.

Ind. Presupunem $P \circ Q = 0$ și $P \neq 0$. Atunci grad $(P \circ Q) =$ (grad P) $\times$ $\times$(grad Q) $\geqslant 1$, absurd. Rămîne că $P = 0$.

4.9.10. Exercițiu. *Fie* P *un polinom cu coeficienți întregi. Dacă există* $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{Z}$ *diferiți între ei a.î.* $P(x_i) = 2$, $(\forall)\ i = \overline{1,4}$, *atunci* $P(x_i) \notin \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{Z}$.

Soluție. Dacă $Q := P - 2$, atunci $Q(x_i) = 0$, $(\forall)\ i = \overline{1,4}$, deci

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)\,R(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \qquad (1)$$

Cum polinoamele Q și $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$ au coeficienții întregi, ultimul avînd coeficientul dominant 1, rezultă că R are coeficienții întregi. Dacă există $x_0 \in \mathbf{Z}$ cu $P(x_0) \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, atunci $Q(x_0) \in \{-1, 1, 3, 5, 7\}$. Însă din (1) avem că $Q(x_0)$ este produsul a cinci întregi, dintre care patru sînt diferiți între ei. Or numerele $-1, 1, 3, 5, 7$ nu au această proprietate, absurd.

4.9.11. Exercițiu. *Să se arate că funcția rațională* $x \overset{f}{\mapsto} \dfrac{ax + b}{cx + d}$ *sau este constantă* $(ad - bc = 0)$ *sau nu are extreme locale* $(ad - bc \neq 0)$.

Soluție (i) Dacă $ad - bc = 0$, atunci $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = \lambda$, deci $f(x) = \dfrac{\lambda(cx + d)}{cx + d} = \lambda$ și deci f constantă.

(ii) Dacă $ad - bc \neq 0$, atunci $f(x) = \dfrac{a}{c} + \dfrac{1}{c}\dfrac{bc - ad}{cx + d}$, deci f este de forma $f(x) = \alpha + \beta\dfrac{1}{x + \gamma}$. Cum evident funcția $x \mapsto \dfrac{1}{x + \gamma}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{\gamma\}$ nu are extreme locale, deducem că f nu are extreme locale.

4.9.12. Exercițiu. *Fie* P *un polinom în care fiecare coeficient este egal cu* 0 *sau* 1 *și* $P(0) \neq 0$. *Atunci* P *nu are nici o rădăcini în intervalul* $(-r, r)$ *unde* $r = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Soluție. Evident avem relația:

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,\ (\forall)\ |x| < 1.$$

Cum $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, unde $a_i = 0$ sau 1 și $P(0) \neq 0$, avem că $a_0 = 1$, deci

$$\frac{1}{1 - x} - 2P(x) = -1 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + x^{n+1} + \ldots,\ (\forall)\ |x| < 1,$$

unde b_i este egal cu 1 sau -1. Atunci

$$\left|\frac{1}{1-x} - 2P(x) + 1\right| \leqslant |x| + |x|^2 + |x|^3 + \ldots = \frac{|x|}{1-|x|},$$

deci

$$|2P(x)| \geqslant \left|1 + \frac{1}{1-x}\right| - \left|1 + \frac{1}{1-x} - 2P(x)\right| \geqslant 1 + \frac{1}{1+|x|} - \frac{|x|}{1-|x|} =$$

$$= \frac{2(1-|x|-|x|^2)}{1-|x|^2}, \quad (\forall)\ |x| < 1.$$

Deoarece $\frac{1-|x|-|x|^2}{1-|x|^2} > 0$, $(\forall)\ |x| < \frac{1}{2}$ $(\sqrt{5} = 1)$, conchidem că P nu are rădăcini în intervalul $(-r, r)$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 5

NOȚIUNI DE TOPOLOGIE PE R

5.1. Mulțimi închise, deschise și conexe

5.1.1. Exercițiu. *Fie* $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots\right\}$. *Să se determine mulțimile* A', A'^s, A'^d, $\bar{A}$, $\mathring{A}$, $'A$ *și* $\mathrm{Fr}(A)$.

Soluție. Să arătăm că $A' = A'^d = \{0\}$. Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)\ n_0 \geqslant 1$ cu $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, deci $\frac{1}{n_0} \in A \cap (V_\varepsilon(0) \setminus \{0\})$ și deci $A \cap (V_\varepsilon(0) \setminus \{0\}) \neq 0$, încît $0 \in A'$. Fie acum $x_0 \in \mathbf{R}^*$ fixat. Dacă $x_0 \in A$, deci $x_0 = \frac{1}{n_0}$ cu $n_0 \in \mathbf{N}$, rezultă că $A \cap V_\varepsilon(x_0) \setminus \{x\} = \emptyset$ pentru $\varepsilon = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0 + 1}$, deci $x_0 \notin A'$. Dacă $x_0 \notin A$, avem $\frac{1}{n_0 + 1} < x_0 < \frac{1}{n_0}$ cu $n_0 \in \mathbf{N}$ sau $x_0 < 0$. În ambele cazuri $(\exists)\ \varepsilon > 0$ cu $A \cap V_\varepsilon(x_0) = \emptyset$, deci $x_0 \notin A'$. Așadar $x_0 \notin A'$, prin urmare $A' = \{0\}$.

Din raționamentul făcut rezultă $A'^s = \emptyset$ și $A'^d = \{0\}$. Apoi $\bar{A} = A \cup A' = A \cup \{0\}$.

Mai departe, dacă $x_0 = \frac{1}{n} \in A$ și $\varepsilon = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, avem $A \cap V_\varepsilon(x_0) = \{0\}$, deci $x_0 \in {}'A$ și deci ${}'A = A$. Este clar că $(\forall)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ avem $V \not\subseteq A$, deoarece V conține și numere iraționale, deci $x_0 \notin \mathring{A}$ și deci $\mathring{A} = \emptyset$.

$$\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{\complement A} = \bar{A} \cap \complement \mathring{A} = \bar{A} \cap \complement \emptyset = \bar{A} \cap \mathbf{R} = \bar{A}$$

5.1.2. Exercițiu. *Fie* $A := (0, 1) \cap \mathbf{Q}$. *Să se determine mulțimile* A', A'^s, A'^d, $\bar{A}$, $'A$ *și* $\mathrm{Fr}(A)$.

Soluție $A' = [0, 1]$. Într-adevăr $(\forall)\ x_0 \in [0, 1]$ și $\varepsilon > 0$, rezutltă că $I := (x_0 - \varepsilon,\ x_0) \cap (0, 1) \neq \emptyset$ sau $J := (x_0, x_0 + \varepsilon) \cap (0, 1) \neq \emptyset$, deci I sau J este un interval deschis și deci conține cel puțin un număr rațional. Atunci $I \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset$ sau $J \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset$, deci $(A \cap V_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$, unde $V_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$, încît $x_0 \in A'$ și deci $[0, 1] \subseteq A'$.

Reciproc, dacă $x_0 \in A'$ și $x_0 \in [0, 1]$, avem spre exemplu $x_0 < 0$, deci $[0, 1] \cap V_\varepsilon(x_0) = \emptyset$, pentru $0 < \varepsilon < |x_0|$. Rezultă că $A \cap V_\varepsilon(x_0) = \emptyset$, deci $x_0 \notin A'$, absurd. Rămîne că $x_0 \in [0, 1]$, deci $A' \subseteq [0, 1]$, prin urmare $A' = [0, 1]$.

$$\bar{A} = A \cup A' = ((0, 1) \cap \mathbf{Q}) \cup [0, 1] = [0, 1]$$

Scanned with OKEN Scanner

$\mathring{A} = \emptyset$. Presupunem $\mathring{A} \neq \emptyset$ şi fie $x_0 \in \mathring{A}$ fixat. Atunci $(\exists)\ \varepsilon > 0$ cu $x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A \subseteq \mathbf{Q}$ (1). Cum intervalul deschis $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ conţine şi numere iraţionale, relaţia (1) este absurdă. Rămîne $\mathring{A} = \emptyset$

$$\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{\complement A} = \bar{A} \cap \complement \mathring{A} = \bar{A} \cap \complement \emptyset = \bar{A} \cap \mathbf{R} = \emptyset$$

$'A = \emptyset$, astfel $(\exists)\ x_0 \in A$ şi $\varepsilon > 0$ a.î. $A \cap V_\varepsilon(x_0) = \{x_0\}$, absurd, deoarece $(\emptyset = A \cap V_\varepsilon^+(x_0) \neq \{x_0\}$ sau $\emptyset \neq A \cap V_\varepsilon^-\{x_0\} \neq \{0\}$.

Acelaşi raţionament arată că $A'^s = (0, 1]$ şi $A'^d = [0, 1)$, deci $A'^b = (0, 1)$.

5.1.3. Exerciţiu. *Fie* $A := (0, 1) \setminus \mathbf{Q}$. *Să se determine mulţimile* A', A'^s, A'^d, $\bar{A}$, $\mathring{A}$, $'A$ *şi* $\mathrm{Fr}(A)$.

Ind. Raţionînd că în Ex. 5.1.2. obţinem :

$$A' = \bar{A} = \mathrm{Fr}(A) = [0, 1],\ A'^s = (0, 1],\ A'^d = [0, 1),\ \mathring{A} = \emptyset,\ 'A = A.$$

5.1.4. Exerciţiu. *Fie* $A = \mathbf{Q}$ *sau* $A = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. *Să se determine mulţimile* A', A'^s, A'^d, $\bar{A}$, $\mathring{A}$, $'A$ *şi* $\mathrm{Fr}(A)$.

Ind. Raţionînd că în Ex. 5.1.2. obţinem :

$$A' = A'^s = A'^d = \bar{A} = \mathrm{Fr}(A) = \mathbf{R};\ \mathring{A} = 'A = \emptyset.$$

5.1.5. Exerciţiu. *Fie* $A \subseteq [0, 1]$ *o mulţime deschisă care conţine toate numerele raţionale sau iraţionale din* $(0, 1)$. *Atunci* $\mathrm{Fr}(A) = [0, 1] \setminus A$.

Ind. $(0, 1) \cap \mathbf{Q} \subseteq A \subseteq [0, 1]$, deci $[0, 1] \subseteq \overline{(0, 1) \cap \mathbf{Q}} \subseteq \bar{A} \subseteq [0, 1]$ şi deci $\bar{A} = [0, 1]$. Atunci $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = [0, 1] \setminus A$.

5.1.6. Exerciţiu. *Fie* $A = \{x \in \mathbf{R};\ x = (-1)^n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbf{N}\}$. *Să se determine mulţimile* A', A'^s, A'^d, $\bar{A}$, $\mathring{A}$, $'A$, *şi* $\mathrm{Fr}(A)$.

Soluţie. Avem $A = B \cup C$, unde $B = \left\{x \in \mathbf{R};\ x = \frac{1}{2n},\ n \in \mathbf{N}\right\}$ şi $C = \left\{x \in \mathbf{R};\ x = -1 + \frac{1}{2n-1},\ n \in \mathbf{N}\right\}$. Cum evident $B' = \{1\}$ şi $C' = \{-1\}$, rezultă că $A' = B' \cup C' = \{-1, 1\}$, deci $\bar{A} = A \cup \{-1, 1\}$. De asemenea avem $B'^s = C'^s = \emptyset$, $B'^d = \{1\}$, $C'^d = \{-1\}$, deci $A'^s = \emptyset$ şi $A'^d = \{-1, 1\}$. Este clar că $'A = \mathring{A} = \emptyset$, deci $\overline{\complement A} = \complement \mathring{A} = \mathbf{R}$ şi deci $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{\complement A} = \bar{A}$.

5.1.7. Exerciţiu. *Fie* $A := \left\{x \in \mathbf{R};\ x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m},\ n, m \in \mathbf{N}\right\}$. *Să se determine mulţimea* A'.

Soluţie. Fie $A_n := \left\{x \in \mathbf{R};\ x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m},\ m \in \mathbf{N}\right\}$. Evident avem :

$A_n' = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, deci $\left\{\frac{1}{n}\right\} = A_n' \subseteq A$; $(\forall)\ n \geqslant 1$. Cum $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \in A$ şi $\frac{1}{2n} \to 0$, avem $0 \in A'$. Aşadar $B := \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} \subseteq A'$. Fie acum $x \in A'$ fixat. Atunci $(\exists)\ x_k \in A$, $x_k \to x$; evident putem presupune $x_k \neq x_{k'} (k \neq k')$. Avem $x_k = y_k + z_k$, unde $y_k, z_k \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$. Considerînd subşiruri, putem presupune că $(y_k)_{k \geqslant 1}$ şi $(z_k)_{k \geqslant 1}$ sînt convergente şi notăm cu y respectiv z

Scanned with OKEN Scanner

limitele lor. Dacă $y \neq 0$, se vede imediat că $(y_k)_{k\geqslant 1}$ este staționar și deoarece $(x_k)_{k\geqslant 1}$ nu este staționar, rezultă că $(z_k)_{k\geqslant 1}$ nu este staționar, deci $z_k \to 0$ și deci $x = y + 0 \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} \subseteq B$. Raționament analog dacă $z \neq 0$. Dacă $y = z = 0$, rezultă $x = 0 \in B$. Prin urmare $x \in B$, deci $A' \subseteq B$.

Generalizare. $A = \left\{x \in \mathbf{R};\ x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{p},\ n, m, p \in \mathbf{N}\right\}$.

5.1.8. Exercițiu. *Să se arate că mulțimea* $A := \bigcup_{n\geqslant 1}\left\{\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots \frac{2^n-1}{2^n}\right\}$ *este densă în* $[0, 1]$.

Soluție. Punem $A_n := \left\{\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}\right\}$ $(n \geqslant 1)$ și fie $x \in (0, 1)$ fixat. Împărțim intervalul $[0, 1]$ la jumătate; cel puțin una din cele două părți, să o notăm cu I_1, conține pe x. Împărțim apoi I_1 la jumătate; cel puțin una din cele două părți să o notăm cu I_2 conține pe x. Continuăm prin inducție și obținem un șir descendent de intervale închise și mărginite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ cu proprietățile: $x \in I_n$ și $|I_n| = \frac{1}{2^n}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Fie $I_n := [a_n, b_n]$ $(n \geqslant 1)$. Este clar că $a_n, b_n \in A_n \subseteq A$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ și avem (T.2.3.21. (3°)) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$.

5.1.9. Exercițiu. *Să se construiască două mulțimi* $A, B \subseteq \mathbf{R}$ *cu proprietățile:*

$$1^\circ\ \mathring{A} \cup \mathring{B} \neq \mathring{A \cup B};\quad 2^\circ\ \bar{A} \cap \bar{B} \neq \overline{A \cap B}$$

Soluție. Fie $A = (0, 1) \cap \mathbf{Q}$ și $B = (0, 1) \setminus \mathbf{Q}$. Atunci $\mathring{A} = \mathring{B} = \emptyset$, $\mathring{A \cup B} = \mathring{(0, 1)} = (0, 1)$; $\bar{A} = \bar{B} = [0, 1]$, $A \cap B = \emptyset$, deci $\overline{A \cap B} = \emptyset$. Așadar A și B satisfac proprietățile din enunț.

5.1.10. Exercițiu. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime. Atunci avem* $\mathbf{R} = \mathring{A} \cup \mathring{\mathbf{C}A} \cup \mathrm{Fr}(A)$. (1)

Soluție. Relația (1) este echivalentă cu $\mathbf{R} \setminus \mathrm{Fr}(A) = \mathring{A} \cup \mathring{\mathbf{C}A}$. Or avem $x \in \mathbf{R} \setminus \mathrm{Fr}(A) \Leftrightarrow x \notin \mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \cap \mathbf{C}A \Leftrightarrow (x \notin \bar{A}) \vee (x \notin \mathbf{C}A) \Leftrightarrow (x \in \mathbf{C}\bar{A} = \mathring{\mathbf{C}A}) \vee$ $\vee\ (x \in \mathbf{C}\mathbf{C}\bar{A} = \mathring{A}) \Leftrightarrow x \in \mathring{\mathbf{C}A} \cup \mathring{A}$. Așadar $\mathbf{R} \setminus \mathrm{Fr}(A) = \mathring{A} \cup \mathring{\mathbf{C}A}$.

5.1.11. Exercițiu. *Fie* $D \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime deschisă nevidă. Atunci* $\sup D$ *și* $\inf D$ *nu aparțin lui* D.

Soluție. Fie $b = \sup D$; avem $b \in \mathbf{R}$ sau $b = +\infty$.

Dacă $b \in \mathbf{R}$ și $b \in D$, există $\varepsilon > 0$ cu $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subseteq D$, deci $b = \sup D \geqslant b + \varepsilon$, absurd, deci $b \notin D$. Dacă $b = +\infty$, atunci $b \notin \mathbf{R}$, deci $b \notin D$. Rămîne că $\sup D \notin D$.

5.1.12. Exercițiu. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime mărginită cu proprietatea că* A' *se reduce la un punct* x_0. *Atunci există* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ *o enumerare a lui* A *a.î.* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Soluție. Deoarece $A' = \{x_0\}$, rezultă că mulțimile $A_0 := \{x \in A;\ |x - x_0| \geqslant 1\}$, $A_n := \left\{x \in A;\ \frac{1}{n+1} \leqslant |x - x_0| < \frac{1}{n}\right\}$ $(n \geqslant 1)$ sînt finite. Evident $A_n \cap A_m = \emptyset$, $(\forall)\ n \neq m$, deci avem:

$$A \setminus \{x_0\} = \{a_1^0, a_2^0, \ldots, a_{k_0}^0;\ a_1^1; a_2^1, \ldots, a_{k_1}^1; \ldots\},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\{a_1^n, a_2^n, \ldots a_{k_n}^n\}$ este o enumerare a lui A_n. Deoarece $A_n \subseteq V_{\frac{1}{n}}(x_0)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, rezultă că şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ obţinut mai sus converge la x_0.

Observaţie. Dacă A nu este mărginită, Ex. 5.1.12. nu este adevărat,

5.1.13. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime şi $x_0 \in \mathbf{R}$ un punct. Atunci*

$$x_0 \in \bar{A} \Leftrightarrow d(x_0, A) := \inf_{x\in A} |x_0 - x| = 0$$

Soluţie $(\Rightarrow)$ $x_0 \in \bar{A} \Leftrightarrow (\exists)\ x_n \in A$, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty) \Leftrightarrow (\exists)\ x_n \in A$, $|x_n - x_0| \to 0$ $(n \to \infty)$. Cum $d(x_0, A) \leqslant d(x_0, x_n)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, rezultă că $d(x_0, A) = 0$.

$(\Leftarrow)$ Dacă $d(x_0, A) = 0$, atunci $(\exists)\ x_n \in A$ a.î. $|x_0 - x_n| \to 0 \Leftrightarrow x_0 \in \bar{A}$.

5.1.14. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime cel mult numerabilă. Atunci $(\mathbf{R} \setminus A)' = \mathbf{R}$.*

Soluţie. Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ fixat. Dacă x_0 nu este punct de acumulare al mulţimii $\mathbf{R} \setminus A$, atunci există $\varepsilon > 0$ a.î. mulţimea $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (\mathbf{R} \setminus A)$ este vidă sau se reduce la punctul x_0, deci $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A \cup \{x_0\}$. Mulţimea A fiind numerabilă rezultă că $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ este numerabilă, absurd. Rămîne că $x_0 \in (\mathbf{R} \setminus A)'$, deci $(\mathbf{R} \setminus A)' = \mathbf{R}$.

5.1.15. Exerciţiu. *Să se construiască o mulţime $A \subseteq \mathbf{R}$ cu proprietatea că $A' \neq \emptyset$, $A'' \neq \emptyset, \ldots, A^{(n-1)} \neq \emptyset$ şi $A^{(n)} = \emptyset$ pentru un anumit n natural.*

Soluţie. Fie $A := \left\{x \in \mathbf{R};\ x = \dfrac{n}{mn+1},\ m, n \in \mathbf{N}\right\}$. Deoarece avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{mn+1} = \dfrac{1}{m}$ şi $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{1}{m+1} = 0$, rezultă că $A' = \left\{0, 1, \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{m}, \ldots\right\}$, deci $A'' = \{0\}$ şi $A''' = \emptyset$.

5.1.16. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime. Atunci :*

1° *$x_0 \in A'^s \Leftrightarrow (\exists)\ (x_n)_{n\geqslant 1}$ un şir din $A \setminus \{x_0\}$ a.î. $x_n \nearrow x_0$;*

2° *$x_0 \in A'^d \Leftrightarrow (\exists)\ (x_n)_{n\geqslant 1}$ un şir din $A \setminus \{x_0\}$ a.î. $x_n \searrow x_0$;*

3° *$x \in A' \Leftrightarrow (\exists)\ (x_n)_{n\geqslant 1}$ un şir monoton din $A \setminus \{x_0\}$ care are limita x_0.*

Soluţie 1° $(\Rightarrow)$ Deoarece $x_0 \in A'^s$, există (T.5.1.8. Cor. 2) $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un şir din A, $x_n < x_0$, $(\forall)$, $n \geqslant 1$, a.î. $x_n \to x$. Din P.2.3.20. rezultă că există $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ un subşir al şirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$ a.î. $x_{n_k} \nearrow x_0$.

Implicaţia $(\Leftarrow)$ rezultă din T.5.1.8.

2° se arată la fel cu 1° iar 3° rezultă din 1° şi 2°.

5.1.17. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime. Să punem $A^{(1)} = A'$ şi $A^{(n)} = (A^{(n-1)})'$, $(\forall)\ n \geqslant 2$. Atunci $A^{(n)}$ este o mulţime închisă, $(\forall)\ n \geqslant 1$.*

Soluţie. Am văzut (P.5.1.7) că $(M')' \subseteq M'$, $(\forall)\ M \subseteq \mathbf{R}$, deci $(A^{(n)})' = (A^{(n-1)})'' \subseteq (A^{(n-1)})' = A^{(n)}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ şi deci (P.5.1.15 (3°)) $A^{(n)}$ este închisă.

5.1.18. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime arbitrară şi $D \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime deschisă. Atunci avem relaţiile :*

$$1°\ (A \setminus D)' \subseteq A' \setminus D ; \quad 2°\ \overline{A \setminus D} \subseteq \bar{A} \setminus D.$$

Soluţie. 1° $(A \setminus D)' = (A \cap \complement D)' \subseteq A' \cap (\complement D)'$.

Cum D este deschisă, rezultă că $\complement D$ este închisă (P.5.1.23.), deci (P.5.1.15.). $(\complement D)' \subseteq \complement D$ şi deci $(A \setminus D)' \subseteq A' \cap \complement D = A' \setminus D$.

2° se arată la fel ca 1°.

Observaţie. Dacă D nu este deschisă relaţiile 1° şi 2° nu sînt numaidecît adevărate.

Contraexemplu. Considerăm A şi D cu $A = (0, 1)$ şi $D = \mathbf{Q}$.

Scanned with OKEN Scanner

5.1.19. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime arbitrară şi $D \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime deschisă. Atunci avem relaţiile:*

$$1^\circ\ \bar{A} \cap D \subseteq \overline{A \cap D};\quad 2^\circ\ A' \cap D \subseteq (A \cap D)'$$

Soluţie. 1° Fie $x \in \bar{A} \cap D$ fixat. Atunci $(\forall)\ V \in \mathcal{V}(x)$, avem $D \cap V \in \mathcal{V}(x)$, deci cum $x \in \bar{A}$, rezultă $A \cap (D \cap V) \neq \emptyset$ şi deci $(A \cap D) \cap V \neq \emptyset$, prin urmare $x \in \overline{A \cap D}$.

2° se arată la fel ca 1°.

Observaţie. Dacă D nu este deschisă, relaţiile 1° şi 2° nu sînt numaidecît adevărate

Contraexemplu. $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} = \overline{\mathbf{Q}} \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \not\subseteq \overline{\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})} = \emptyset$.

5.1.20. Exerciţiu. *O mulţime $A \subseteq \mathbf{R}$ formată numai cu numere raţionale sau numai cu numere iraţionale, nu este deschisă.*

Soluţie. Să presupunem că există o mulţime $A \subseteq \mathbf{R}$, deschisă, cu $A \subseteq \mathbf{Q}$ şi fie $x_0 \in A$ fixat. Atunci x_0 este punct interior lui A, deci există $\varepsilon > 0$ a.î. $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$. În intervalul $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ se află cel puţin un număr iraţional α. Cum $A \subseteq \mathbf{Q}$, avem că $\alpha \in \mathbf{Q}$, absurd.

Prin urmare A nu este deschisă.

5.1.21. Exerciţiu. *Să se construiască un şir $(A_n)_{n \geq 1}$ de mulţimi deschise (resp. închise) din $\mathbf{R}$ pentru care mulţimea $A = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n$ (resp. $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$) nu este deschisă (resp. închisă).*

Soluţie. 1° Fie $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $(n \geq 1)$. Atunci A_n este deschisă, $(\forall)\ n \geq 1$ şi $A = \bigcap_{n \geq 1} A_n = \{0\}$, deci mulţimea A nu este deschisă.

2° Fie $A_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ $(n \geq 1)$. Atunci A_n este închisă, $(\forall)\ n \geq 1$ şi $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n = (0, 1]$, deci mulţimea A nu este închisă.

5.1.22. Exerciţiu. *Fie $(r_n)_{n \geq 1}$ o enumerare a mulţimii $(0,1) \cap \mathbf{Q}$ şi $(I_n)_{n \geq 1}$ un şir de intervale deschise din $\mathbf{R}$ cu $I_n \ni r_n$, $(\forall)\ n \geq 1$. Atunci mulţimea $(0,1) \setminus \bigcup_{n \geq 1} I_n$ poate fi infinită.*

Soluţie. Fie $a_n := \frac{1}{n}\sqrt{2}$ $(n \geq 1)$ şi $A := \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Evident $(\forall)$ $0 < a < b$, mulţimea $(a, b) \cap A$ este finită şi $(\forall)\ n \geq 1$, avem $r_n \notin A$, deci există $\varepsilon_n > 0$ a.î. $(r_n - \varepsilon_n, r_n + \varepsilon_n) \cap A = \emptyset$. Punem mai departe $I_n := (r_n - \varepsilon_n, r_n + \varepsilon_n)$ $(n \geq 1)$ Atunci $(0,1) \setminus \bigcup_{n \geq 1} I_n \supseteq A$ şi A este infinită etc.

Observaţie. Dacă intervalele I_n $(n \geq 1)$ din Ex. 5.1.22. au aceeaşi lungime, atunci $\bigcup_{n \geq 1} I_n \supseteq [0,1]$.

5.1.23. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime deschisă (resp. închisă). Atunci $(\exists)$ $(A_n)_{n \geq 1}$ un şir de mulţimi închise (resp. deschise) a.î. $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ (resp. $A = \bigcap_{n \geq 1} A_n$).*

Soluţie. 1° A fiind deschisă, $(\exists)$ $(D_i)_{i \in I}$ o familie cel mult numerabilă de intervale deschise nevide cu $A = \bigcup_i D_i$ (T.5.1.26.) Însă, evident, fiecare $D_i (i \in I)$ se poate scrie ca reuniune a unui şir $(J_n^i)_{n \geq 1}$ de intervale închise. Atunci (P.1.4.13). familia $(J_n^i)_{(n,i) \in \mathbf{N} \times I}$ este numerabilă, deci un şir şi reuniunea ei este egală cu A.

Scanned with OKEN Scanner

2° Dacă A este închisă, avem $\mathbf{R}\setminus A$ deschisă, deci $(\exists)\,(B_n)_{n\geq 1}$ un șir de mulțimi închise cu $\mathbf{R}\setminus A = \bigcup_{n\geq 1} B_n$. Punem $A_n := \complement B_n$ $(n\geq 1)$; atunci fiecare $A_n\,(n\geq 1)$ este mulțime deschisă și avem $A = \complement(\bigcup_{n\geq 1} B_n) = \bigcap_{n\geq 1}(\complement B_n) = \bigcap_{n\geq 1} A_n$.

5.1.24. Exercițiu. *Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi conexe din $\mathbf{R}$ a.î. $A_i\cap A_j\neq \emptyset$, $(\forall)\,i,j\in I$. Atunci $\bigcup_i A_i$ este o mulțime conexă.*

Soluție. Fie $x, y\in A := \bigcup_i A_i$, $x<y$, fixați. Atunci $(\exists)\,i,j\in I$ cu $x\in A_i$ și $y\in A_j$. Cum A_i, A_j sînt conexe, deci (T.5.1.3.) intervale și $A_i\cap A_j\neq\emptyset$, rezultă imediat că $A_i\cup A_j$ este un interval.

Atunci $[x,y]\subseteq A_i\cup A_j\subseteq A$, deci (P.2.2.13) A este interval și deci (T.5.1.30.) A este mulțime conexă.

5.1.25. Exercițiu. *Utilizînd proprietatea lui Cantor a mulțimii* $\mathbf{R}$ (T.2.3.20. (4°)), *să se arate că orice interval $I\subseteq\mathbf{R}$ este o mulțime conexă* (vezi și T.5.1.30).

Soluție. Presupunem I neconex și fie $A, B\subseteq I$ două mulțimi nevide a.î. $I = A\cup B$ și $A\cap\bar{B} = \bar{A}\cap B = \emptyset$. Fixăm $a\in A$ și $b\in B$ și să presupunem că $a<b$. Dacă $c := \frac{1}{2}(a+b)$, atunci $[a,c]$ sau $[c,b]$ intersectează pe A și pe B. Așadar există un interval închis $I_1\subseteq I_0 := [a,b]$ cu proprietățile: $|I_1| = \frac{1}{2}|I_0|$, $I_1\cap A\neq\emptyset$ și $I_1\cap B\neq\emptyset$.

Prin inducție construim un șir $(I_n)_{n\geq 1}$ de intervale închise incluse în $\mathbf{I}$ cu proprietățile:

$$|I_n| = \frac{1}{2}|I_{n-1}|,\ I_n\cap A\neq\emptyset,\ I_n\cap B\neq\emptyset,\ (\forall)\ n\geq 1$$

Din T.2.3.20. (4°) rezultă că $\bigcap_{n\geq 1} I_n$ se reduce la un punct, să-l notăm cu x_0. Se vede imedaiat că $x_0\in\bar{A}\cap\bar{B}$, deci $x_0\notin A$, deoarece $A\cap\bar{B}=\emptyset$ și analog $x_0\notin B$, deci $x_0\notin A\cup B = I$, absurd.

Rămîne că I este o mulțime conexă.

5.2. Mulțimi compacte

5.2.1. Exercițiu. *Să se arate plecînd de la definiție că mulțimea* $\mathbf{N}$ *a numerelor naturale nu este compactă.*

Soluție. Fie $D_n = (n-1, n+1)$ $(n\geq 1)$. Evident $(D_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este o familie de mulțimi deschise în $\mathbf{R}$ care acoperă pe $\mathbf{N}$. Cum orice mulțime D_n are comun cu $\mathbf{N}$ un singur punct, punctul n, orice subfamilie finită a familiei $(D_n)_{n\in\mathbf{N}}$ acoperă numai o submulțime finită a lui $\mathbf{N}$, deci nu poate acoperi pe $\mathbf{N}$ care este infinită.

Prin urmare $\mathbf{N}$ nu este compactă.

5.2.2. Exercițiu. *Să se arate plecînd de la definiție că mulțimile* $(0,1)\cap\mathbf{Q}$, $(0,1)\setminus\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ *și* $\mathbf{R}$ *nu sînt compacte.*

Soluție. Fie $D_n := \left(\frac{1}{n}, 1\right)$ $(n\in\mathbf{N})$. Evident $(D_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este o familie deschisă care acoperă pe $A := (0,1)\cap\mathbf{Q}$. Presupunem că există $n_1, n_2, \ldots, n_k\in\mathbf{N}$ a.î. $\bigcup_{i=1}^{k} D_{n_i}\supseteq A$. Dacă presupunem că $n_1<n_2<\ldots<n_k$, atunci $D_{n_1}\subset D_{n_2}\subset\ldots$ $\ldots\subset D_{n_k}$, deci $D_{n_k}\supseteq A$. Or avem $\frac{1}{1+n_k}\in A\setminus D_{n_k}$, absurd. Așadar familia

deschisă $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care acoperă pe A, nu posedă o subfamilie finită care să acopere pe A, prin urmare A nu este compactă etc.

5.2.3. Exerciţiu. *Orice mulţime compactă discretă $A\subseteq\mathbf{R}$ este finită.*

Soluţie. Presupunem A infinită. Din T.5.2.10. rezultă că există cel puţin un punct x_0 în mulţimea $A\cap A'$. Atunci x_0 este un punct neizolat din A, absurd. Rămîne că A este finită (v. dem. P.5.2.2.).

5.2.4. Exerciţiu. *Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de intervale compacte din $\mathbf{R}$ cu proprietatea că $A_i\cap A_j\neq 0$, $(\forall)\ i,j\in I$. Atunci $\bigcap_i A_i\neq\emptyset$.*

Soluţie. Fie $A_i=[a_i,b_i]\ (i\in I)$. Atunci $a_i\leqslant b_j$, $(\forall)\ i,j\in I$ (1). Într-adevăr, dacă $b_j<a_i$, avem $a_j\leqslant b_j<a_i\leqslant b_i$, deci $[a_j,b_j]\cap[a_i,b_i]\neq\emptyset$, absurd. Din (1) rezultă (T.2.3.21. (4°)) că $(\exists)\ c\in\mathbf{R}$ a.î. $a_i\leqslant c\leqslant b_j$, $(\forall)\ i,j\in I$, deci $c\in\bigcap_i A_i$.

Corolar 1. *Fie $A=(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ o familie de n intervale arbitrare din $\mathbf{R}$ cu proprietatea că $A_i\cap A_j\neq 0$, $(\forall)\ i,j\in\overline{1,n}$. Atunci $\bigcap_i A_i\neq\emptyset$.*

Soluţie. Fie A_1 (resp. A_2) familia intervalelor minorate (resp. majorate) din A şi a (resp. b) cel mai mic (resp. mare) capăt al intervalelor din A_1 (resp. A_2). Punem $B_i:=A_i\cap[a,b]\ (i=\overline{1,n})$. Atunci (Ex. 5.2.4.) $\bigcap_i B_i\neq 0$ şi $\bigcap_i A_i\supseteq B_i$ etc.

Observaţia 1. Dacă în Ex. 5.2.4. intervalele $A_i\ (i\in I)$ sînt arbitrare, atunci $\bigcap_i A_i$ nu este numaidecît nevidă.

Contraexemplu. Dacă $A_n=[n,\infty]\ (n\geqslant 1)$, atunci $\bigcap_{n\geqslant 1}A_n=\emptyset$.

Observaţia 2. Ex. 5.2.4. este un caz particular al T. Helly. Fie $A=(A_i)_{i=\overline{1,k}}$ o familie finită de mulţimi convexe din $\mathbf{R}^n$ $(n+1)$-centrată i.e. oricare $n+1$ mulţimi din familie au cel puţin un punct comun. Atunci $\bigcap_{i=1}^{k}A_i\neq\emptyset$.

5.2.5. Exerciţiu. *Fie $A\subseteq\mathbf{R}$ o mulţime compactă. Atunci $(\exists)\ a,b\in A$ a.î.* dia $(A)=|a-b|$.

Soluţie. Evident $(\exists)\ a_n,b_n\in A\ (n\geqslant 1)$ cu $|a_n-b_n|\to$ dia (A). Mulţimea A fiind compactă, şirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$, posedă un subşir convergent $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ către un punct $a\in A$. La fel şirul $(b_{n_k})_{k\geqslant 1}$ posedă un subşir convergent $(b_{n_{k_s}})_{s\geqslant 1}$ către un punct $b\in A$. Evident avem :

$$|a-b|=\lim_{s\to\infty}|a_{n_{k_s}}-b_{n_{k_s}}|=\lim_{n\to\infty}|a_n-b_n|=\text{dia}\,(A).$$

5.2.6. Exericiţiu. *Fie $A\subseteq\mathbf{R}$ o mulţime compactă infinită. Atunci $(\exists)\ x_0\in A$ a.i. mulţimea $A\setminus\{x_0\}$ nu este compactă.*

Soluţie. Mulţimea A fiind compactă şi infinită, rezultă (T. 5.1.9.) că $A\cap A'\neq\emptyset$, fie $x_0\in A\cap A'$ fixat. Cum $A\setminus\{x_0\}$ nu este închisă (P. 5.1.15.), rezultă (T. 5.2.6.) că $A\setminus\{x_0\}$ nu este compactă.

Observaţie. Fie mulţimile compacte $A:=[0,1]$ şi $B:=\left\{0,1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}$. Atunci $(\forall)\ x_0\in A$ rezultă că $A\setminus\{x_0\}$ nu este compactă, în timp ce $B\setminus\{x_0\}$ este compactă, $(\forall)\ x_0=\frac{1}{n}\ (n\geqslant 1)$, şi nu este compactă pentru $x_0=0$.

Scanned with OKEN Scanner

5.2.7. Exercițiu. *Să se arate, plecînd de la definiție, că reuniunea unui număr finit de mulțimi compacte din* $\mathbf{R}$ *este compactă.*

Soluție. Considerăm cazul a două mulțimi compacte A_1, A_2. Fie $A := A_1 \cup A_2$ și $\mathcal{A}$ o familie de mulțimi deschise în $\mathbf{R}$, care acoperă A. Atunci $\mathcal{A}$ acoperă $A_i (i = \overline{1,2})$, deci $(\exists)\ \mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}$ finită și care acoperă A_i. Evident $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ este o subfamilie finită a lui $\mathcal{A}$ care acoperă A, prin urmare A este compactă.

5.2.8. Exercițiu. *Fie* $(A_n)_{n\geq 1}$, *un șir descendent de mulțimi compacte din* $\mathbf{R}$ *și* $D \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime deschisă a.î.* $D \supseteq \bigcap_{n\geq 1} A_n$. *Atunci* $(\exists)\ n \geq 1$ *a.î* $D \supseteq A_n$.

Soluție. Presupunem că $A_n \not\subseteq D, (\forall)\ n \geq 1$ și fie $C = \mathbf{R} \setminus D$. Atunci C este închisă și avem $C \cap A_n \neq \emptyset, (\forall)\ n \geq 1$, deci $(C \cap A_n)_{n\geq 1}$ este un șir descendent de mulțimi compacte nevide, deci (T. 5.2.5. Cor.2) $\bigcap_{n\geq 1} (C \cap A) \neq \emptyset$ și deci $C \cap A \neq \emptyset$, unde $A = \bigcap_{n\geq 1} A_n$. Cum $A \subseteq D = \mathbf{R} \setminus C$, avem $A \cap C = \emptyset$, absurd, etc.

5.2.9. Exercițiu. *Să se demonstreze teorema Borel-Lebegue cu ajutorul proprietății lui Cesaro a lui* $\mathbf{R}$.

Soluție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ mărginită și închisă și $(D_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi deschise care acoperă A. Considerăm familia

$$\mathcal{A} := \{(p, q);\ p, q \in \mathbf{Q},\ p < q,\ (\exists)\ i \in I,\ (p, q) \subseteq D_i\}$$

Evident $\mathcal{A}$ este numerabilă și acoperă A; fie $\{J_1, J_2, J_3, \ldots\}$ o enumerare a lui $\mathcal{A}$. Înlocuind J_n cu $\bigcup_{k=1}^{n} J_k$, putem presupune $J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq \ldots$. Să arătăm că $(\exists)\ n \geq 1$ cu $J_n \supseteq A$. Astfel $(\forall)\ n \geq 1$, $(\exists)\ a_n \in A \setminus J_n$; obținem astfel un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ cu elemente din A, deci (T. 5.2.9.) $(\exists)\ (a_{n_k})_{k\geq 1}$ convergent către un punct $a \in A$. Fie $n_0 \geq 1$ cu $J_{n_0} \ni a$, deci $(\exists)\ k_0 \geq 1$ cu $a_{n_k} \in J_{n_0}, (\forall)\ k \geq k_0$, de unde rezultă că $a_{n_k} \in J_{n_k}$ pentru k suficient de mare, absurd. Așadar $(\exists)\ n_0 \geq 1$ cu $A \subseteq J_{n_0}$. Evident însă $(\exists)\ i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ a.î. $\bigcup_{k=1}^{n} D_{i_k} \subseteq J_{n_0}$ etc.

5.2.10. Exercițiu *Fie* $A, B \subseteq \mathbf{R}$ *două mulțimi cu* A *compactă și* B *închisă (resp. compactă). Atunci* $A \pm B$ *și* $A \cdot B$ *sînt închise (resp. compacte).*

Soluție. 1° Presupunem A compactă, B închisă și fie $x_n = a_n + b_n \in A + B$ cu $x_n \to x \in \bar{\mathbf{R}}$. Mulțimea A fiind compactă $(\exists)\ (a_{n_k})_{n\geq 1}$ un subșir al șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, convergent către un punct $a \in A$. Atunci $B \ni b_{n_k} = x_{n_k} - a_{n_k} \to x - a$, deci $x - a \in \bar{B} = B$ și deci $x \in a + B \subseteq A + B$, prin urmare (P. 5.1.14) $A + B$ este închisă.

2° Presupunem A, B compacte și fie $x_n = a_n + b_n \ni A + B$ $(n \geq 1)$ fixat. Mulțimea A fiind compactă, $(\exists)(a_{n_k})_{k\geq 1}$ un subșir al șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, convergent către un punct $a \in A$. Analog $(\exists)(b_{n_{k_s}})_{s\geq 1}$ un subșir al șirului $(b_{n_k})_{k\geq 1}$, convergent către un punct $b \in B$. Atunci $(x_{n_{k_s}})_{s\geq 1}$ converge la $a + b \in A + B$, deci $A + B$ este compactă (T. 5.2.9.)

5.2.11. Exercițiu. *Să se arate, utilizînd teorema lui Baire* (T. 5.2.12.) *că mulțimea* $\mathbf{R}$ *este nenumerabilă.*

Soluție. Presupunem $\mathbf{R}$ numerabilă și fie $\{x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots\}$ o enumerare a lui $\mathbf{R}$. Punem $A_n := \{x_n\}$ $(n \geq 1)$. Evident A_n este închisă și are interiorul vid, deci (T. 5.2.12.) $\mathbf{R} = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ are interiorul vid, absurd, etc.

Scanned with OKEN Scanner

5.2.12. Exerciţiu. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir nestaţionar convergent la* 0 *şi* A *mulţimea elementelor de forma* ma_n *cu* $n \in \mathbf{N}$ *şi* $m \in \mathbf{Z}$. *Atunci* A *este densă în* $\mathbf{R}$.

Soluţie. Deoarece $(a_n)_{n\geq 1}$ este nestaţionar, putem presupune, considerînd un subşir al său, că $a_n \neq 0$, $(\forall)\ n \geq 1$. Fie $(r_k)_{n\geq 1}$ un şir din $\mathbf{R}_+$ care are limita 0 şi fie $V_k = (x - r_k, x + r_k)$, $k \geq 1$. Deoarece $a_n \to 0$, există $n_1 \geq 1$ cu $|a_{n_1}| < r_1$, deci există $m_1 \in \mathbf{Z}$ cu $m_1 a_{n_1} \in V_1$. În acest mod construim recursiv două şiruri $(n_k)_{k\geq 1}$ din $\mathbf{N}$ şi $(m_k)_{k\geq 1}$ din $\mathbf{Z}$ cu $m_k a_{n_k} \in V_k$, $(\forall)\ k \geq 1$. Fie $x_k := m_k a_{n_k}$, $k \geq 1$. Atunci $x_k \in V_k$, $(\forall)\ k \geq 1$, deci $|x_k - x| \leq r_k$, $(\forall)\ k \geq 1$ şi cum $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$, rezultă că $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$, prin urmare, A este densă în $\mathbf{R}$.

5.2.13. Exerciţiu. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime. Atunci condiţiile* 1°—3° *sînt echivalente*

1° A *este mărginită*;

2° *Orice submulţime numerabilă a lui* A *este mărginită*;

3° $(\forall)\ (x_n)_{n\geq 1}$ *un şir cu elemente din* A, *avem* $\frac{1}{n} x_n \to 0$.

Soluţie. 1°⇒2° evident.

2° ⇒ 3°. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir cu elemente din A. Atunci mulţimea $B = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \{x_n\}$ din A este cel mult numerabilă, deci cf. 2° este mărginită şi deci $(\exists)\ M > 0$ a.î. $|x_n| \leq M$, $(\forall)\ n \geq 1$. Atunci $(\forall)\ \varepsilon > 0$, avem $\left|\frac{1}{n} x_n\right| \leq \frac{M}{n} \leq \varepsilon$ dacă $n \geq n_\varepsilon \geq \frac{M}{\varepsilon}$ şi deci $\frac{1}{n} x_n \to 0$.

3°⇒2°. Presupunem că A nu este mărginită. Atunci, $(\forall)\ n \geq 1$ există $x_n \in A$ a.î. $|x_n| \geq n$. Aşa dar există $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir din A a.î. $\left|\frac{1}{n} x_n\right| \geq 1$ $(\forall)\ n \geq 1$, ceea ce contrazice condiţia 3° că $\frac{1}{n} x_n \to 0$.

Prin urmare A este mărginită.

Observaţie. Afirmaţia este adevărată, dacă înlocuim $\mathbf{R}$ cu un spaţiu normat.

5.2.14. Exerciţiu. *Fie* $A = (0,1) \cap \mathbf{Q}$ *şi pentru fiecare fracţie ireductibilă* $\frac{p}{q}$ *din* A *fie* $I\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{4q^2}, \frac{p}{q} + \frac{1}{4q^2}\right)$. *Atunci familia de intervale* $\left(I\left(\frac{p}{q}\right)\right)_{\frac{p}{q}\in A}$ *nu acoperă pe* $(0,1)$.

Soluţie. $(\forall)\ p, q \in \mathbf{N}$ avem $q - 2p^2 \in \mathbf{Z}$, deci $\sqrt{2}$ fiind iraţional, rezultă că $|q^2 - 2p^2| \geq 1$. Atunci

$$\left|\frac{1}{2} - \left(\frac{p}{q}\right)^2\right| \geq \frac{1}{2q^2},$$

deci

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{p}{q}\right| \cdot \left|\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{2q^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{2q^2}, \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{p}{q}} > \frac{1}{2q^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4q^2},$$

de unde deducem că $\frac{1}{\sqrt{2}} \notin I\left(\frac{p}{q}\right)$, deși $\frac{1}{\sqrt{2}} \in (0,1)$.

5.2.15. Exercițiu. *Fie x un număr irațional. Să se arate că mulțimea $A=\{mx+n;\ m,n\in\mathbf{Z}\}$ este densă în $\mathbf{R}$.*

Soluție. Pentru a arăta că A este densă în $\mathbf{R}$ este suficient să arătăm că pentru orice interval deschis și mărginit $I\subseteq\mathbf{R}^*$, avem $I\cap A\neq\emptyset$. Evident însă există $n\in\mathbf{Z}$ a.î. $\frac{1}{n}I\subseteq(0,1)$ și avem $I\cap A\neq\emptyset\Leftrightarrow\left(\frac{1}{n}I\right)\cap A\neq\emptyset$, deci putem presupune că $I\subseteq(0,1)$. Fie pentru început $I=(0,\varepsilon)$ cu $0<\varepsilon<1$ și să arătăm că $I\cap A\neq\emptyset$ (1)

Într-adevăr fie $r\in\mathbf{N}$ a.î. $\frac{1}{r}<\varepsilon$ și să considerăm numerele $((x))$, $((2x))$,... ...$((rx))$, care sînt distincte două cîte două, deoarece x este irațional; $((\cdot))$ este funcția parte zecimală. Evident $(\exists)\ p,q\in\{1,2,\dots r,r+1\}$ a.î.

$$0<((px))-((qx))\leqslant\frac{1}{r}<\varepsilon$$

Cum

$$((px))-((qx))=[qx]-[px]+(p-q),$$

relația (1) este arătată.

Fie acum $I=(c,d)$ cu $0<c<d<1$ și să arătăm că $I\cap A\neq\emptyset$ (2)

Într-adevăr $0<d-c<1$ deci cf (1) există $a\in A$ a.î. $0<a<d-c$. Dacă h este primul număr natural cu $ha>c$ atunci evident $ha<d$ deci $c<ha<d$. Cum $ha\in A$ avem că $I\cap A\neq\emptyset$.

Relația (2) este arătată deci exercițiul este complet rezolvat.

Corolar 1. *Fie $x,y\in\mathbf{R}$ două numere incomensurabile i.e. $x/y\notin\mathbf{Q}$. Atunci mulțimea $B=\{mx+ny;\ m,n\in\mathbf{Z}\}$ este densă în $\mathbf{R}$*

Soluție. Fie $A=\left\{m\left(\frac{x}{y}\right)+n;\ m,n\in\mathbf{Z}\right\}$. Atunci $\bar{A}=\mathbf{R}$ și $B=yA$, deci $\bar{B}=\mathbf{R}$.

Corolar 2. *Să se determine mulțimea punctelor limită ale șirului* (trig. $n)_{n\geqslant1}$.

Soluție. π fiind irațional, 2π este irațional, deci (Ex. 5.2.15.) mulțimea $A=\{2\pi n+m;\ n,m\in\mathbf{Z}\}$ este densă în $\mathbf{R}$. Fie $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\cap\mathbf{Q}$ fixat și $x_n\in A$ cu $x_n\to x$. Avem $x_n=2\pi q_n+r_n$, unde $q_n,r_n\in\mathbf{Z}$, deci sin fiind continuă, rezultă că $\sin x=\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin r_n$. Elementul x fiind rațional, se vede imediat că șirul $(r_n)_{n\geqslant1}$ este nemărginit, deci putem presupune că $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\infty$. Atunci $\sin x\in L(\sin n)_{n\geqslant1}$, deci $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\cap\mathbf{Q}\right)\subseteq L(\sin n_n)_{n\geqslant1}$ și deci

Scanned with OKEN Scanner

$$\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)\subseteq\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\cap\mathbf{Q}\right)\subseteq\overline{L(\sin n)_{n\geqslant 1}}=L(\sin n)_{n\geqslant 1},$$

de unde deducem

$$[-1,1]\subseteq L(\sin n)_{n\geqslant 1}\subseteq[-1,1]\Leftrightarrow L(\sin n)_{n\geqslant 1}=[-1,1].$$

Analog avem $L(\cos n)_{n\geqslant 1}=[-1,1]$ și $L(\operatorname{tg} n)_{n\geqslant 1}=L(\operatorname{ctg} n)_{n\geqslant 1}=\overline{\mathbf{R}}$

5.3. Limită și limită laterală a unei funcții într-un punct

5.3.1. Exercițiu. *Să se calculeze* $1^\circ\ \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$; $2^\circ\ \lim\limits_{x\to\infty} e^{-[x]}$.

Soluție. 1° Fie $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $x\in\mathbf{R}^*$. Atunci $|f(x)|\leqslant|x|$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}^*$, deci (P. 5.3.13. Cor.1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

2° Fie $g(x)=e^{-[x]}$, $x\in\mathbf{R}$. Atunci cum $0\leqslant e^{-[x]}\leqslant e^{1-x}$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$ și $\lim\limits_{x\to\infty} e^{1-x}=0$, rezultă (P. 5.3.13. Cor.1) că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

5.3.2. Exercițiu. *Funcțiile trigonometrice nu au limită în punctele de la infinit.*

Soluție. Să considerăm cazul funcției sin. Evident $-\infty,+\infty\in\mathbf{R}'[\overline{\mathbf{R}}]$, deci are sens să calculăm limita funcției sin în punctele $+\infty$ și $-\infty$.

Fie $x_n=2n\pi$ și $x_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi(n\geqslant 1)$. Atunci $x_n\to\infty$ și $\sin x_n\to 0$ în timp ce $x'_n\to\infty$ și $\sin x'_n\to 1$, deci sin nu are limită la ∞.

5.3.3. Exercițiu. *Funcțiile* $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, $x\in\mathbf{R}^*$ *și* $g(x)=\frac{1}{x}\sin x$, $x\in\mathbf{R}^*$, *nu au limite laterale în* 0.

Soluție. Fie $x_n=\frac{1}{2n\pi}$ și $x'_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ $(n\geqslant 1)$. Atunci $x_n\searrow 0$ și $f(x_n)\to 0$ în timp ce $x'_n\searrow 0$ și $f(x'_n)\to 1$, deci $f(0+)$ nu există etc.

De asemenea avem $g(x_n)\to 0$ și $g(x'_n)\to\infty$, deci $g(0+)$ nu există.

Analog se arată că $f(0-)$ și $g(0-)$ nu există.

Să observăm că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ apoi că $|g(x)|\leqslant\left|\frac{1}{x}\right|$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}^*$, deci (P. 5.3.13. Cor.1) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$. Să mai observăm că f este mărginită în timp ce g nu este mărginită pe $V\setminus\{0\}$, $(\forall)\ V$ o vecinătate a lui 0.

5.3.4. Exercițiu. *Fie* $f:\mathbf{R}^*\to[-1,1]$ *o funcție definită astfel* $f(x)=\cos\frac{1}{x}$. *Dacă* $\lambda\in[-1,1]$, *atunci există* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir din* $\mathbf{R}$ *convergent a.î.* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lambda$.

Soluție. Funcția $\cos : \mathbf{R} \to [-1, 1]$ este surjectivă, deci pentru $(\forall)\ \lambda \in [-1, 1]$ există $a \in \mathbf{R}$ a.î. $\cos a = \lambda$. Să punem $x_n = \dfrac{1}{a + 2n\pi}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Atunci $x_n \to 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \lambda$.

5.3.5. Exercițiu. *Să se determine* λ *a.î. funcția* $f(x) = \lambda \ln(x + 2)$, *dacă* $x > 0$ *și* $f(x) = [x]$, *dacă* $x < 0$, *să aibă limită în punctul* 0.

Soluție. Să calculăm limitele laterale în 0. Evident avem $f(0+) = \lambda \ln 2$, $f(0-) = -1$. Deci (T. 5.4.5.) f are limită în $0 \Leftrightarrow f(0+) = f(0-) \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{1}{\ln 2}$.

5.3.6. Exercițiu. *Să se determine* $a, b \in \mathbf{R}$ *a.î. funcția* $f(x) = \sin x$ *dacă* $x \geqslant 0$ *și* $f(x) = ax + b$, *dacă* $x < 0$, *să aibă limită în punctul* 0.

Soluție. Evident $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow 0} (ax + b) = b$ și $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} \sin x = 0$, deci (T.5.4.5.) f are limită în $0 \Leftrightarrow f(0-) = f(0+) \Leftrightarrow b = 0$.

5.3.7. Exercițiu. *Să se arate că funcția* $x \mapsto \operatorname{sign}\left(x \sin \dfrac{1}{x}\right)$, $x \in \mathbf{R}^*$ *nu are limite laterale în* 0.

Soluție. Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $(y_n)_{n\geqslant 1}$, $(z_n)_{n\geqslant 1}$ trei șiruri de numere pozitive convergente la 0 definite astfel:

$$\frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi;\quad \frac{1}{y_n} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi;\quad \frac{1}{z_n} = 2n\pi,\ (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Atunci evident $f(x_n) = 1$, $f(y_n) = -1$, $g(z_n) = 0$; prin urmare $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)$ nu există. Analog pentru limita la stînga.

5.3.8. Exercițiu. *Să se calculeze, fără a folosi regula lui l'Hospital,*

$$\lim_{x\nearrow \frac{\pi}{\alpha}} \frac{\sin x}{\sqrt{\pi - \alpha x}},\ \textit{unde}\ \alpha \in \mathbf{R}_+^*.$$

Soluție. Facem substituția $\dfrac{\pi}{\alpha} - x = t$; atunci $x \nearrow \dfrac{\pi}{\alpha} \Leftrightarrow t \searrow 0$ și limita dată se scrie:

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{\sin(\pi - \alpha t)}{\sqrt{\alpha t}} = \lim_{t\searrow 0} \frac{\sin \alpha t}{\alpha t} \cdot \frac{\alpha t}{\sqrt{\alpha t}} = 1 \cdot 0 = 0.$$

5.3.9. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\nearrow 1} \dfrac{\sin(\lambda \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}$, *unde* $\lambda \in \mathbf{R}$.

Soluție. Evident avem $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ (fig. 7).

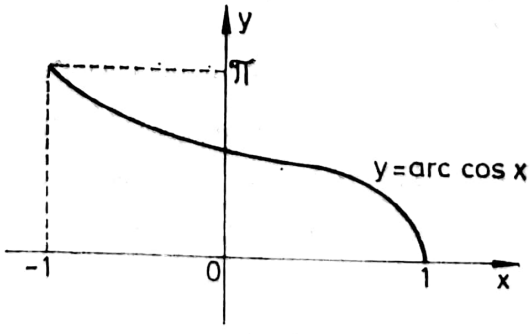


Fig. 7

Scanned with OKEN Scanner

Să notăm $y(x) = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$. Atunci $x = \cos y$, $y \in [0, 1]$ şi avem $x \nearrow 1 \Leftrightarrow y \searrow 0$. Prin urmare

$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{\sin(\lambda \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{y \searrow 0} \frac{\sin \lambda y}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \lim_{y \searrow 0} \frac{\sin \lambda y}{\sin y} = \lambda.$$

5.3.10. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim_{x \to \infty} x \arcsin \frac{x + 2}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}$.

Soluţie. Avem o nedeterminare de forma $0 \cdot \infty$.

Limita dată are sens, deoarece $x^4 - x^2 - 1 > 0$ şi $\frac{|x + 2|}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}} \leqslant 1$, pentru x suficient de mare. Cum $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, rezultă că $\lim_{t \to 0} \frac{\arcsin t}{t} = 1$.

Să notăm $y(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}$, $x \geqslant c$ cu c convenabil. Evident $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$, deci $\lim_{x \to \infty} \frac{\arcsin y(x)}{y(x)} = 1$. Atunci

$$\lim_{x \to \infty} x \arcsin \frac{x + 2}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}} = \lim_{x \to \infty} xy(x) \frac{\arcsin y(x)}{y(x)} = 1,$$

deoarece $\lim_{x \to \infty} \frac{x(x + 2)}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}} = 1$.

5.3.11. Exerciţiu. *Să se arate că* $\lim_{x \to \infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \ln(x + k) = 0$

Soluţie. Evident avem :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \ln(x + k) = \ln \frac{x^{C_n^0} \cdot (x + 2)^{C_n^2} \cdot (x + 4)^{C_n^4} \ldots}{(x + 1)^{C_n^1} (x + 3)^{C_n^3} \ldots}$$

Deoarece $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$, gradul celor două polinoame de la numitor şi numărător este acelaşi, deci

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{C_n^1} (x + 2)^{C_n^2} \cdot (x + 4)^{C_n^4} \ldots}{(x + 1)^{C_n^1} (x + 3)^{C_n^3} \ldots} = 1,$$

şi deci limita dată este egală cu $\ln 1$, adică cu 0.

Corolar 1. *Fie* $P \in \mathbf{R}[X]$ *un polinom de grad* $\geqslant 1$. *Atunci*

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \ln|P(x) + k| = 0$$

5.3.12. Exerciţiu. *Fie funcţia* $f(x) = x \left[\frac{1}{x}\right]$, $x \in \mathbf{R}^*$. *Atunci* $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Soluția 1. Dacă $\frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n}$, atunci $n \leqslant \frac{1}{x} < n+1$, deci $\left[\frac{1}{x}\right] = n$ și deci $\frac{n}{n+1} < x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant 1$.

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Evident există $n_\varepsilon \geqslant 1$ astfel încît $\frac{n}{n+1} \geqslant 1-\varepsilon$, $(\forall)\, n \geqslant n_\varepsilon$, deci $1-\varepsilon \leqslant x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant 1$, $(\forall)\, 0 < x < \frac{1}{n_\varepsilon}$ și deci $f(0+) = 1$.

Analog avem $1 \leqslant x\left[\frac{1}{x}\right] < \frac{n+1}{n}$, $(\forall) -\frac{1}{n} < x \leqslant -\frac{1}{n+1}$, deci ca mai sus $f(0-) = 1$ și prin urmare $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Soluția 2. Dacă $x \neq 0$, avem $\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \left[\frac{1}{x}\right] + 1$, deci

$$x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant 1 < x\left[\frac{1}{x}\right] + x,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^* \Leftrightarrow 1 - x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant 1,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*$$

$$x\left[\frac{1}{x}\right] \geqslant 1 > x\left[\frac{1}{x}\right] + x,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}_-^* \Leftrightarrow 1 \leqslant x\left[\frac{1}{x}\right] < 1 - x,\ (\forall)\, x \in \mathbf{R}_-^*$$

Trecem mai departe la limită cu x către 0.

Corolar 1.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{[x]}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{[x]}{x} = 1$$

Soluție. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{[x]}{x} = \lim\limits_{t\searrow 0} t\left[\frac{1}{t}\right] = 1$ etc.

Corolar 2. *Fie funcția* $f(x) = x^p[x^{-q}]$, $x \in \mathbf{R}_+^*$, *unde* $p, q \in \mathbf{R}_+^*$ *sînt fixați. Atunci* $f(0+)$ *există și este egală cu* 1, *dacă* $p = q$; 0, *dacă* $p > q$; $+\infty$, *dacă* $p < q$.

Soluție. Ținem seama că $\lim\limits_{x\to 0} x^q[x^{-q}] = 1$, $(\forall)\, q \in \mathbf{R}_+^*$ și

$$x^p[x^{-q}] = x^{p-q}(x^q[x^{-q}]),\ (\forall)\, p, q \in \mathbf{R}_+^*$$

Corolar 3.

1° $\lim\limits_{x\searrow 0}\left[\frac{1}{\ln x}\right] = 0$; 2° $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{\sin x}\right] = 1$.

Soluție. $\lim\limits_{x\searrow 0}\left[\frac{1}{\ln x}\right] = \lim\limits_{x\searrow 0} \frac{1}{\ln x}\left((\ln x)\left[\frac{1}{\ln x}\right]\right) = 0$

Corolar 4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[x^n]}{x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{[x^n]} = 1,\ (\forall)\, x \in [1, \infty)$$

5.3.13. Exercițiu. *Să se calculeze*

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1} - 2\lambda x),$$

(λ *parametru real pozitiv*).

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2 \pm x + 1} - \lambda x) = +\infty \left(\text{resp. } -\infty, \text{ resp. } \frac{1}{2}\right)$ dacă $\lambda < 1$ (resp. $\lambda > 1$, resp. $\lambda = 1$), rezultă că există $c > 0$ a.î. $\sqrt{x^2 \pm x + 1} - \lambda x \neq 0$, $(\forall)\ x \geqslant c$. Atunci $(\forall)\ x \geqslant c$, avem :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} - 2\lambda x = (\sqrt{x^2 + x + 1} - \lambda x) +$$

$$+ (\sqrt{x^2 - x + 1} - \lambda x) = \frac{x^2(1 - \lambda^2) + x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \lambda x} + \frac{x^2(1 - \lambda^2) - x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \lambda x}.$$

Însă

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1 - \lambda^2) \pm x + 1}{\sqrt{x^2 \pm x + 1} + \lambda x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1 - \lambda^2) \pm 1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 \pm \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \lambda} =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \lambda < 1 \\ -\infty, & \lambda > 1 \\ \pm\frac{1}{2}, & \lambda = 1 \end{cases}, \quad \text{deci } \lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \lambda < 1 \\ -\infty, & \lambda > 1 \\ 0, & \lambda = 1 \end{cases}$$

5.3.14. Exercițiu. *Să se determine α și β a.î. funcția*

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + \alpha x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 + \beta x^2 \sin^2 x + 1},\ x \in \mathbf{R}$$

are limită la $+\infty$ și ea este egală cu 1.

Soluție. Evident pentru x suficient de mare avem :

$$f(x) = \frac{(\alpha - \beta)x^2 + \beta x^2 \cos^2 x}{\sqrt[3]{(x^3+\alpha x^2+1)^2} + \sqrt[3]{(x^3+\alpha x^2+1)(x^3+\beta x^2\cos^2 x+1)} + \sqrt[3]{(x^3+\beta x^2\cos^2 x+1)^2}}$$

Atunci f are limită la $+\infty \Leftrightarrow \beta = 0$. În acest caz $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{\alpha}{3}$. În concluzie :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 3 \text{ și } \beta = 0.$$

5.3.15. Exercițiu. *Fie funcția $f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + cx - 1}$, unde $a, b > 0$. Să se afle a, b, c a.î. f să aibă asimptotă la $+\infty$, o paralelă la dreapta $y = 2x + 1$ și asimptotă la $-\infty$, dreapta $y = -1$.*

Soluție. Dreapta $y = mx + n$ este asimptotă la $+\infty$ pentru $f \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ și $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = n$.

Prin urmare să determinăm $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $b > 0$ a.î. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Or evident $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax + \sqrt{bx^2 + cx - 1}}{x} =$ $= a + \sqrt{b}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(-x)}{-x} = a - \sqrt{b}$. Din sistemul $a + \sqrt{b} = 2$;

$a - \sqrt{b} = 0$, deducem $a = b = 1$. Atunci $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x + \sqrt{x^2 + cx - 1}) =$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - (x^2 + cx - 1)}{x - \sqrt{x^2 + cx - 1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-c + \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{c}{x} - \frac{1}{x^2}}} = -\frac{c}{2}, \text{ deci}$$

$-1 = -\frac{c}{2}$ și $c = 2$.

În definitiv avem $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x - 1}$, $(\forall)\, x \in D_f$.

5.3.16. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lambda + \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{x}$ *unde* $\lambda \in \mathbf{R}$ *parametru.*

Soluţie. Notăm $g(x) = \sin x - \cos x$, $x \in \mathbf{R}$ și $f(x) = \dfrac{\lambda + g\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$.

Se vede imediat că g este periodică de perioadă minimă 2π și $g(\mathbf{R}) = [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$.

Fie $0 \neq \lambda \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ fixat și $a \in \mathbf{R}$ a.î. $g(a) = -\lambda$. Atunci $g(a + 2n\pi) = g(a) = -\lambda$, $(\forall)\, n \geqslant 1$.

Să considerăm $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $(y_n)_{n\geqslant 1}$ două şiruri de numere pozitive convergente la 0, definite astfel:

$$\frac{1}{x_n} = a + 2n\pi, \quad \frac{1}{y_n} = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \quad (\forall)\, n \geqslant 1.$$

Evident $f(x_n) = 0$ și $f(y_n) = \lambda\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$, $(\forall)\, n \geqslant 1$. Prin urmare $f(x_n) \to 0$, $f(y_n) \to \pm\infty$, de unde rezultă că $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)$ nu există.

În cazul $\lambda = 0$ raţionamentul se simplifică.

Dacă $\lambda > \sqrt{2}$, atunci $\lambda + \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \geqslant \lambda - \sqrt{2} > 0$, deci $f(x) \geqslant$ $\geqslant$ (resp. $\leqslant$) $\dfrac{\lambda - \sqrt{2}}{x}$, după cum $x > 0$ (resp. $x < 0$). De aici deducem că $f(0+) = +\infty$, $f(0-) = -\infty$. Analog se raţionează dacă $\lambda < -\sqrt{2}$.

5.3.17. Execiţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{e^{\frac{1}{x-a}} + e^{-\frac{1}{x-a}}}{e^{\frac{1}{x-a}} - e^{-\frac{1}{x-a}}}$.

Soluţie. Să punem

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-a}} + e^{-\frac{1}{x-a}}}{e^{\frac{1}{x-a}} - e^{-\frac{1}{x-a}}}, \quad (\forall)\, x \in \mathbf{R}\setminus\{a\},$$

$\frac{1}{x-a} = t$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{a\}$ și $e^t = y$, $(\forall)\, t \in \mathbf{R}$. Atunci avem:

$$\lim_{x\searrow a} f(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{e + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^2 + 1}{y^2 - 1} = 1,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci $f(a+)=1$ şi $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^2+1}{y^2-1}=-1$ adică $f(a-)=-1$. Prin urmare f nu are limită în a.

5.3.18. Exerciţiu. *Să se calculeze*

$$\lim_{x\to 0}(1+\ln(1+x)+\ldots+\ln(1+nx))^{\frac{1}{x}}$$

Soluţie. Notăm $\varphi(x)=\ln(1+x)+\ldots+\ln(1+nx)$ şi $f(x)=(1+\varphi(x))^{\frac{1}{x}}$ $(\forall)\ x\in(-1,1)\setminus\{0\}$. Evident avem

$$f(x)=[1+\varphi(x))^{1/\varphi(x)}]^{\frac{1}{x}\varphi(x)},\ (\forall)\ x\in(-1,1)\setminus\{0\}$$

şi cum

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\varphi(x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}[(1+2x)^{1/2x}]^2\ldots[(1+nx)^{1/nx}]^n=$$

$$=\ln e+\ln e^2+\ldots+\ln e^n=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

deducem $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=e^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Analog se calculează $\lim\limits_{x\to 0}(n^{x-1}+n^{2x-1}+\ldots+n^{nx-1})^{\frac{1}{x}}$.

5.3.19. Exerciţiu. *Să se calculeze*

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_1x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n},\ (a_0,b_0>0).$$

Soluţie. Notăm $P(x)=a_0x^n+\ldots+a_n$, $Q(x)=b_0x^n+\ldots+b_n$,

$$R(x)=P(x)-Q(x)\ \text{şi}\ f(x)=x\ln\frac{P(x)}{Q(x)},\ (\forall)\ x\in[c,\infty),$$

unde c este suficient de mare.

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\ln\dfrac{a_0}{b_0}$, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\begin{cases}+\infty & a_0>b_0\\ -\infty & a_0<b_0\end{cases}$

Dacă $a_0=b_0$, atunci prin simplificare cu a_0 putem presupune $a_0=b_0=1$. Evident avem :

$$f(x)=\ln\left[\left(1+\frac{R(x)}{Q(x)}\right)^{\frac{Q(x)}{R(x)}}\right]^{\frac{xR(x)}{Q(x)}},\ (\forall)\ x\geqslant c$$

Însă $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xR(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a_1-b_1)x^n+\ldots+(a_n-b_n)}{x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}=$

$$=\begin{cases}a_1-b_1, & a_1\neq b_1\\ 0\ , & a_1=b_1\end{cases},\ \text{deci}\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\begin{cases}(a_1-b_1)\ln e, & a_1\neq b_1\\ 0\quad\ln e, & a_1=b_1.\end{cases}$$

5.3.20. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[n]{|P(x)|}-x)$, *dacă* P *este un polinom de grad* n *cu coeficienţi reali.*

Soluţie. Fie $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$. Evident există $c>0$ a.î.

$$|P(x)|=|a_0|\left((x^n+\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\ldots+\frac{a_n}{a_0}\right),\ (\forall)\ x\geqslant c$$

Notăm $\lambda=|a_0|$, $\frac{a_i}{a_0}=b_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$ şi $Q(x)=x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$.

Presupunem $\lambda=1$, atunci, $(\forall)\ x\geqslant c$, avem

$$\sqrt[n]{|P(x)|}-x=\sqrt[n]{Q(x)}-x=\frac{Q(x)-x^n}{(\sqrt[n]{Q(x)})^{n-1}+x(\sqrt[n]{Q(x)})^{n-2}+\ldots+x^{-n-1}}=$$

$$=\frac{x^{n-1}\left(b_1+\frac{b_2}{x}+\ldots+\frac{b_n}{x^{n-1}}\right)}{x^{n-1}\left[\left(\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}Q(x)}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}Q(x)}\right)^{n-2}+\ldots+1\right]}$$

Simplificăm cu x^{n-1} şi ţinem seama că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}Q(x)=1$, obţinem

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[n]{|P(x)|}-x)=\frac{b_1}{n}=\frac{a_1}{na_0}.$$

Dacă $\lambda\neq 1$, atunci $(\forall)\ x\geqslant c$, avem

$$\sqrt[n]{|P(x)|}-x=\sqrt[n]{|a_0|}\sqrt[n]{Q(x)}-x=\sqrt[n]{\lambda}\,(\sqrt[n]{Q(x)}-x)+\sqrt[n]{\lambda}x,$$

deci $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[n]{|P(x)|}-x)=+\infty$.

Corolar 1.

$$(\forall)\ c_1,c_2,\ldots,c_n\in\mathbf{R},\ \textit{avem}\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(x-c_i)}-x\right)=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}c_i.$$

Soluţie. Într-adevăr avem

$$\prod_{i=1}^{n}(x-c_i)=x^n-\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)x^{n-1}+\ldots+(-1)^nc_1c_2\ldots c_n \text{ etc.}$$

Corolar 2. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[n]{|P(x)|}-\sqrt[m]{|Q(x)|})$, *dacă* P,Q *sînt polinoame cu coeficienţi reali de grad* n *respectiv* m.

Soluţie. Fie $\left.\begin{aligned}P(x)&=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\\Q(x)&=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m\end{aligned}\right\}$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$

Dacă $|a_0|=|b_0|$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[n]{|P(x)|}-\sqrt[m]{|Q(x)|})=$

$$=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[n]{|P(x)|}-|a_0|x)-\lim_{x\to\infty}(\sqrt[m]{|Q(x)|}-|b_0|x)=|a_0|\frac{a_1}{na_0}-|b_0|\frac{b_1}{nb_0}-$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $|a_0| \neq |b_0|$ atunci $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[n]{|P(x)|} - \sqrt[m]{|Q(x)|}) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} [(\sqrt[n]{|P(x)|} - |a_0|\,x) - (\sqrt[m]{|Q(x)|} - |b_0|x) + (|a_0| - |b_0|)\,x] = +\infty,$

după cum $|a_0| - |b_0| > 0$, resp. < 0 și $|a_0|$ sau $|b_0|$ sînt 1 etc.

Observație. Dacă $a_0 > 0$ și $b_0 > 0$, putem calcula limitele din Ex. 5.3.20. renunțînd la module.

5.3.21. Exercițiu. *Să se calculeze* 1° $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^p} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin^p a_k x$;

2° $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sin a_k x}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sin b_k x}$, *cînd* $p \in \mathbf{N}$, $a_k, b_k \in \mathbf{R}^*$ *și* $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \neq 0$.

Soluție. 1° Deoarece avem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^p ax}{x^p} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^p a^p = a^p, \ (\forall)\, a \in \mathbf{R}^*,$$

rezultă

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^p} \sum_{k=1}^{n} \sin^p a_k x = \sum_{k=1}^{n} a_k^p.$$

2° Funcția $x \mapsto \frac{1}{x} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin b_k x$, $x \in \mathbf{R}^*$ are limita în 0 egală cu $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \neq 0$, deci există $\delta > 0$ a.î. $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin b_k x \neq 0$, $(\forall)\, 0 < |x| < \delta$.

Prin urmare are sens să scriem:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sin a_k x}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sin b_k x} = \frac{\frac{1}{x}\sum\limits_{k=1}^{n} \sin a_k x}{\frac{1}{x}\sum\limits_{k=1}^{n} \sin b_k x}, \ (\forall)\, 0 < |x| < \delta.$$

Trecînd în această egalitate la limită cu $x \to 0$, obținem că limita căutată este egală cu $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k}$.

Limitele date pot fi calculate și cu ajutorul regulei lui L'Hospital.

Corolar 1.

1° $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^p} \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{tg}^p a_k x = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p$, $(\forall)\, p \in \mathbf{N}$, $(\forall)\, a_k \in \mathbf{R}^*$;

2° $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{tg} a_k x}{\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{tg} b_k x} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k}$, $(\forall)\, p \in \mathbf{N}$; $a_k, b_k \in \mathbf{R}^*$ *și* $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \neq 0$;

Scanned with OKEN Scanner

$$3^\circ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{n(n+1)}{2};$$

$$4^\circ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sum_{k=1}^{n}\sin^2 kx=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Corolar 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{n-\sum_{k=1}^{n}\cos a_k x}{1-\cos x}=\sum_{k=1}^{n}a_k^2.$$

Soluţie.

$$\lim_{x\to 0}\frac{n-\sum_{k=1}^{n}\cos a_k x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n}(1-\cos a_k x)}{1-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n}2\sin^2\frac{1}{2}a_k x}{2\sin^2\frac{1}{2}x}=\sum_{k=1}^{n}a_k^2$$

5.3.22. Exerciţiu. *Să se calculeze*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1-\sin^2 x)\ldots(1-\sin^n x)}{\cos^{2n}x}.$$

Soluţie. Dacă notăm $x-\frac{\pi}{2}=t$, atunci $x\to\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow t\to 0$ şi limita dată devine

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1-\cos t)(1-\cos^2 t)\ldots(1-\cos t)}{\sin^{2n}t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin^2 t}\cdot\frac{1-\cos^2 t}{\sin^2 t}\cdot\ldots\cdot\frac{1-\cos^n t}{\sin^2 t}$$

Însă evident

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}}=\frac{1}{2},$$

deci

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^k t}{\sin^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin^2 t}(1+\cos t+\cos^2 t+\ldots+\cos^{k-1}t)=\frac{k}{2},\ (\forall)\ k\in\mathbf{N},$$

prin urmare limita dată este $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{2}=\frac{n!}{2^n}$.

Scanned with OKEN Scanner

5.3.23. Exerciţiu. *Să se calculeze*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})\ldots(1-\sqrt[n]{\cos x})}{x^{2n-2}},$$

unde $n \geqslant 2$.

Soluţie. Evident avem relaţia

$$1-\sqrt[k]{\cos x}=\frac{1-\cos x}{1+\sqrt[k]{\cos x}+\sqrt[k]{\cos^2 x}+\ldots+\sqrt[k]{\cos^{k-1}x}},$$

deci

$$\frac{1-\sqrt[k]{\cos x}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\sqrt[k]{\cos x}+\sqrt[k]{\cos^2 x}+\ldots+\sqrt[k]{\cos^{k-1}x}}$$

şi deci

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[k]{\cos x}}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}.$$

Atunci

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})((1-\sqrt[3]{\cos x})\ldots(1-\sqrt[n]{\cos x})}{x^{2n-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\prod_{k=2}^{n}\frac{1-\sqrt[k]{\cos x}}{x^2}=\prod_{k=2}^{n}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2^{n-1}n!}.$$

5.3.24. Exerciţiu. *Să se arate că* $(\forall)\ n\geqslant 1$ $\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(\sin\circ\sin\circ\ldots\circ\sin)}^{n}x}{x}=1$ (1)

Soluţie. Să punem $\sin_n(x)=\overbrace{(\sin\circ\sin\circ\ldots\circ\sin)}^{n}x$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$ Vom arăta egalitatea (1) prin inducţie relativ la n.

Dacă $n=1$, avem $\lim_{x\to 0}\frac{\sin_1 x}{x}=1$.

Presupunem egalitatea (1) adevărată pentru $n=k$, deci $\lim_{x\to 0}\frac{\sin_k(x)}{x}=1$. Fie funcţa $\varphi(x)=\sin_k(x)$, $x\in\mathbf{R}$. Evident φ este continuă, $\varphi(0)=0$ şi 0 este zerou izolat, deci $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$. Atunci

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin_{k+1}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{\varphi(x)}{x}=1,$$

deci egalitatea (1) este adevărată $(\forall)\ n\geqslant 1$.

Observație. În loc de sin putem considera o funcție arbitrară $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietățile:

1° f continuă în 0; 2° 0 este zerou izolat; 3° $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

5.3.25. Exercițiu. *Fie* $f: (0,1) \to \mathbf{R}$ *o funcție cu proprietățile* : $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 0$ *și* $(\exists)\ 0 < \lambda < 1$ *a.î.* $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{1}{x}[f(x) - f(\lambda x)] = 0$. *Atunci* $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{1}{x} f(x) = 0$.

Soluție. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci există $0 < \eta < 1$ a.î.

$$|f(x) - f(\lambda(x)| \leqslant \varepsilon\ |x|,\ (\forall)\ \ x \in (0, \eta).$$

De aici rezultă că $(\forall)\ x \in (0, \eta)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ avem:

$$|f(x) - f(\lambda^n x)| \leqslant |f(x) - f(\lambda x)| + |f(\lambda x) - f(\lambda^2 x)| + \ldots + |f(\lambda^{n-1}x) - f(\lambda^n x)| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(|x| + \lambda\ |x| + \lambda^2\ |x| + \ldots + \lambda^{n-1}|x|) \leqslant \varepsilon\,|x|\ \frac{1}{1-\lambda}$$

Așadar avem

$$|f(x) - f(\lambda^n x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\lambda}\ |x|,\ (\forall)\ \ x \in (0, \eta),\ (\forall)\ \ n \geqslant 1.$$

Trecînd la limită după n, obținem:

$$|f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\lambda}\ |x|,\ (\forall)\ \ x \in (0, \eta),\ \text{deci}\ \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x} f(x) = 0.$$

5.3.26. Exercițiu. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime simetrică a.î.* $0 \in A'$ *și* $f: A \to \mathbf{R}$ *funcție pară (resp. impară). Atunci* $f(0+)$ *există* $\Leftrightarrow f(0-)$ *există și în acest caz sînt egale (resp. de modul egal).*

Soluție. Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir din $A \cap (0, \infty)$ convergent la 0. Atunci șirul $(-x_n)_{n\geqslant 1}$ are elementele din mulțimea $A \cap (-\infty, 0)$ și este convergent la 0.

Cum $f(-x_n) = f(x_n)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ sau $f(-x_n) = -f(x_n)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ există și limita nu depinde de șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ considerat $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(-x_n)$ există și limita nu depinde de șirul $(-x_n)_{n\geqslant 1}$.

Prin urmare $f(0+)$ există $\Leftrightarrow f(0-)$ există.

Corolar 1. *Dacă* f *pară (resp. impară), atunci* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *există* $\Leftrightarrow f(0+)$ *sau* $f(0-)$ *există (resp.* $f(0+)$ *sau* $f(0-)$ *există și este nulă).*

5.3.27. Exercițiu. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime,* $x_0 \in A'$ $[\bar{\mathbf{R}}]$ *un punct și* $f, g: A \to \mathbf{R}$ *două funcții a.î.* g *este mărginită și* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. *Atunci avem:*

$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Soluție. g fiind mărginită $(\exists)\ M > 0$ a.î. $|g(x)| \leqslant M$, $(\forall)\ x \in A$, deci

$$-M + f(x) \leqslant f(x) + g(x) \leqslant M + f(x),\ (\forall)\ \ x \in A.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, atunci $\lim_{x\to x_0} [-M + f(x)] = \infty$, deci $\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$.

Analog, dacă $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, atunci $\lim_{x\to x_0} [M + f(x)] = -\infty$, deci

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = -\infty.$$

Corolar 1. *Fie P, Q, R trei polinoame cu coeficienți reali a.î.* grad $P \geqslant 1 +$ grad Q. *Atunci* : $\lim_{x\to\infty} \left[\frac{P(x)}{Q(x)} + R(\sin x)\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$.

5.3.28. Exercițiu. *Fie A, $B \subseteq \mathbf{R}$ două mulțimi și $f : A \to B$, $g : B \to \mathbf{R}$ două funcții. Dacă $a \in A'$, $\lim_{x\to a} f(x) = b \in B'$ și $\lim_{y\to b} g(y)$ există, rezultă de aici că $g \circ f$ are limită în a?*

Soluție. Răspunsul este negativ.

Contraexemplu. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel : $f(x) = 0$ dacă $x \in Q$ și $f(x) = x^2$ dacă $x \in \mathbf{R} \setminus Q$; fie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel : $g(0) = 1$ și $g(y) = y$, $(\forall) y = 0$. Atunci $(g \circ f)(x) = 1$ dacă $x \in Q$ și $(g \circ f)(x) = x^2$ dacă $x \in \mathbf{R} \setminus Q$. Evident $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$ și $g \circ f$ nu are limită în 0.

Dacă în plus $f(A) \subseteq B \setminus \{b\}$, atunci $g \circ f$ are limită în a. Într-adevăr $(\forall)$ $x_n \in A \setminus \{a\}$, $x_n \to a$ avem $f(x_n) \to b$, deci $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ există și deci $\lim_{x\to a} g(f(x))$ există.

5.3.29. Exercițiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție care are limită în x_0. Atunci* 1° $(\forall)$ $\dot{V}$ *o vecinătate punctată a lui x_0, avem* $|\lim_{x\to x_0} f(x)| \leqslant \sup_{x\in A\cap \dot{V}} |f(x)|$; 2° $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *este finită* $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ $\dot{V}$ *o vecinătate punctată a lui x_0 a.î. f este mărginită pe $A \cap \dot{V}$.*

Soluție. 1° $|f(x)| \leqslant M_V = \sup_{t\in A\cap \dot{V}} |f(t)|$, $(\forall)$ $x \in A \cap V$. deci $|\lim_{x\to x_0} f(x)| \leqslant M_V$

2° ($\Rightarrow$) Fie $l = \lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbf{R}$. Atunci pentru $\varepsilon > 0$ există $\dot{V}$ o vecinătate punctată a lui x_0 a.î.

$$|f(x)| \leqslant |l| + \varepsilon, \ (\forall)\ x \in A \cap \dot{V}$$

deci

$$\sup_{x\in A\cap \dot{V}} |f(x) \leqslant |l| + \varepsilon.$$

Implicația ($\Leftarrow$) rezultă din 1°.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime compactă și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție care are limită finită în fiecare punct de acumulare al mulțimii A. Atunci f este mărginită.*

5.3.30. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + a^x)}{\ln(1 + b^x)}$, $(a, b > 0)$.

Soluție (i) Dacă $a, b \in (0,1)$, atunci avem :

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x \frac{\ln(1 + a^x)^{a^{-x}}}{\ln(1 + b^x)^{b^{-x}}} = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a < b \\ \infty, & a > b \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

(ii) Dacă $a \in (0,1)$ şi $b \in (1, \infty)$ (resp. $b \in (0,1)$ şi $a \in (1, \infty)$) limita dată este 0 (resp. ∞)

(iii) Dacă $a > 1$ şi $b > 1$, atunci avem :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln a^x(1 + a^{-x})}{\ln b^x(1 + b^{-x})} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln a + \frac{1}{x} \ln (1 + a^{-x})}{\ln b + \frac{1}{x} \ln (1 + b^{-x})} = \frac{\ln a}{\ln b}$$

5.3.31. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim_{x \to 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

Soluţie. Nedeterminare de tipul 1^∞. Evident avem :

$$(1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}} = [(1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{x^2 e^x}}]^{\frac{x^2 e^x}{1-\cos x}}, \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

Cum

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} 2 \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 = 2,$$

limita dată este egală cu e^2.

5.3.32. Exerciţiu. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime,* $x_0 \in A' \, [\bar{\mathbf{R}}]$ *şi* $f, g : A \to \mathbf{R}$ *două funcţii cu proprietatea că* $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$ *şi* $\inf_{x \in A} |g(x)| > 0$. *Atunci* avem $\lim_{x \to x_0} |f(x)g(x)| = \lim_{x \to x_0} |f(x)|$.

Soluţie. Cf. ipotezei $(\exists)\ m > 0$ a.î. $|g(x)| \geqslant m$, $(\forall)\ x \in A$.

Fie $c > 0$ fixat. Deoarece $\lim_{x \to \infty} |f(x)| = \infty$, $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î.

$|f(x)| \geqslant cm^{-1}$, $(\forall)\ x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$, deci

$|(f(x)g(x)| \geqslant cm^{-1} \cdot m = c$, $(\forall)\ x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$ şi deci $\lim_{x \to \infty} |f(x)g(x)| = \infty$.

Corolar 1

$$\lim_{x \to \infty} e^{\sin x} (x - \sin 2x) = 0.$$

Soluţie $e^{\sin x} \geqslant e^{-1}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ şi $\lim_{x \to \infty} (x - \sin 2x) = \infty$ etc.

5.3.33. Exerciţiu *Să se calculeze* $\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x}$

Soluţie. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$ (cf. P. 5.6.17. (1°))

sau

$$e^x \geqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*,$$

deci

$$0 < \frac{x^n}{e^x} < \frac{(n+1)!}{x}, \quad x \in \mathbf{R}_+^* \text{ etc.}$$

Scanned with OKEN Scanner

5.3.34. Exerciţiu *Să se arate utilizînd definiţia cu* ε *şi* δ *că* $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}=1$.

Ind. Pentru $0<\varepsilon<1$ avem : $|\sqrt{x}-1|<\varepsilon \Leftrightarrow 1-\varepsilon<\sqrt{x}<1+\varepsilon \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (1-\varepsilon)^2<x<(1+\varepsilon)^2 \Leftrightarrow \varepsilon^2-2\varepsilon<x-1<\varepsilon^2+2\varepsilon$.

Luăm $\delta=2\varepsilon-\varepsilon^2$.

5.3.35. Exerciţiu. *Să se arate dacă funcţiile :*

$1^\circ\ f(x)=x\cos\dfrac{1}{x},\ x\in\mathbf{R}^*$; $2^\circ\ g(x)=\dfrac{1}{x}\cos x,\ x\in\mathbf{R}^*$;

$3^\circ\ f(x)=x\operatorname{tg}\dfrac{1}{x},\ 0<|x|<\dfrac{2}{\pi}$; $4^\circ\ f(x)=x\operatorname{ctg}x,\ 0<|x|<\dfrac{1}{\pi}$

au limită în 0.

Ind. $1^\circ\ |f(x)|\leqslant|x|$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}^*$, deci $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

$2^\circ\ g\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)=0$; $g\left(\dfrac{1}{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\right)=n\pi+\dfrac{\pi}{2}\to\infty$, deci g nu are limită în 0.

3° Analog cu 2° etc.

5.3.36. Exerciţiu *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{|\sin x|}}$.

Ind. Se ţine seama că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{|\sin x|}=0$; limita dată este egală cu 1.

5.3.37. Exerciţiu. *Fie* $P\in\mathbf{R}_n[X]$ *cu* $n\geqslant 1$. *Atunci* $\lim\limits_{x\to 0}|P_n(x)|=+\infty$.

Ind. $|P_n(x)\geqslant x^n\left(|a_0|-\dfrac{|a_1|}{x}-\dfrac{|a_2|}{x}-\ldots-\dfrac{|a_n|}{x^n}\right)$, $(\forall)x\geqslant x_0>0$.

5.3.38. Exerciţiu *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

Ind. $\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}+\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}\to 1+\dfrac{1}{2}$.

5.3.39. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin^p\dfrac{1}{x}$, $p\in\mathbf{R}$ *parametru.*

Ind. Ţinem seama că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\right)^p=1$, $(\forall)\ p\in\mathbf{R}_+$.

5.3.40. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Ind. Fie funcţia $\varphi(x)=\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}-1$, $x>\dfrac{2}{\pi}$. Atunci

$$\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)^x=\{[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}\}^{x\varphi(x)},\ (\forall)\ x>\frac{2}{\pi},$$

şi

$$\lim_{x\to\infty} x\varphi(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - \frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t} - \frac{1-\cos t}{t}\right) = 0.$$

Să observăm că

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\searrow 0}(\cos t + \sin t)^{\frac{1}{t}} \text{ (v. Ex. 6.6.23.).}$$

5.3.41. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{trig } x - \text{trig } a}{x-a}$.

Ind. Se scrie trig x — trig a sub formă de produs. Spre exemplu:

$$\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\right)\cdot\cos\frac{x+a}{2}.$$

5.3.29. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin ax - \cos bx}{1+\sin x - \cos x}$, $(a, b \neq 0)$.

Ind.
$$\frac{1+\sin ax-\cos bx}{1+\sin x-\cos x} = \frac{\sin ax + 2\sin^2\frac{bx}{2}}{\sin x + 2\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{a\left(\frac{\sin ax}{ax}\right) + \frac{b^2x}{2}\left(\frac{\sin\frac{bx}{2}}{\frac{bx}{2}}\right)^2}{\frac{\sin x}{x} + \frac{x}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}, \quad (\forall)\ 0 < |x| < \pi.$$

3. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{\text{arc sin}(\text{tg } x)}{\text{arc tg}(\sin x)}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ind. Ţinem seama că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{arc sin } x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{arc tg } x}{x} = 1$.

5.3.44. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos^3 x}$.

Ind. Folosim identitatea următoare:

$$\frac{x\sin 2x}{1-\cos^3 x} = 4\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x+\cos^2 x}, \quad (0 < |x| < \pi).$$

Scanned with OKEN Scanner

5.3.45. Exercițiu. *Să se calculeze*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x+1}}.$$ *Generalizare.*

Ind. $$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}+\sqrt{\frac{1}{x^7}}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\xrightarrow[(x\to\infty)]{}1.$$

5.3.46. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}\ln(1+x)}$.

Ind. Ținem seama că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=1$.

5.3.47. Exercițiu *Să se calculeze limitele* :

$$1^\circ\ \lim_{x\to\infty}(x-\ln \operatorname{ch} x);\qquad 2^\circ\ \lim_{x\to\infty}(x-\ln\ \operatorname{sh}\ x)$$

Ind. $$\lim_{x\to\infty}(x-\ln\ \operatorname{ch}\ x)=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{e^x}{\operatorname{ch} x}=\ln 2.$$

5.3.48. Exercitiu *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Ind. $$(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}=\{[1+(\operatorname{tg} x-1)]^{\frac{1}{\operatorname{tg} x-1}}\}^{(\operatorname{tg} x-1)\operatorname{tg} 2x},$$

$$(\operatorname{tg} x-1)\operatorname{tg} 2x=(\operatorname{tg} x-1)\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{-2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\to -1\left(x\to\frac{\pi}{4}\right).$$

5.3.49. Exercițiu. *Să se calculeze limitele* :

$1^\circ\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}\ (a,b\in\mathbf{R}_+^*)$; $2^\circ\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}\ (a,b\in\mathbf{R}_+^*)$;

$3^\circ\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{\cos x}-\sqrt[m]{\cos x}}{\operatorname{tg}^2 x}\ (n,m\in\mathbf{N})$.

Ind. 1° $$\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\frac{1}{a}\cdot\frac{e^{ax}-1}{ax}-\frac{1}{b}\cdot\frac{e^{bx}-1}{bx}\to\frac{1}{a}\cdot a-\frac{1}{b}\ (x\to 0)$$

3° $$1-\sqrt[k]{\cos x}=\frac{1-\cos x}{1+\sqrt[k]{\cos x}+\sqrt[k]{\cos^2 x}+\ldots+\sqrt[k]{\cos^{k-1}x}}$$

5.3.50. Exercițiu *Să se calculeze limita*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arc\ sin}\ a_1x+\operatorname{arc\ sin}\ a_2x+\ldots+\operatorname{arc\ sin}\ a_nx}{\operatorname{arc\ tg}\ b_1x+\operatorname{arc\ tg}\ b_2x+\ldots+\operatorname{arc\ tg}\ b_nx},$$

unde $a_i,\ b_i$ *și* $b_1+b_2+\ldots+b_n\in\mathbf{R}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Ţinem seamă că $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arcsin \lambda x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} \lambda x}{x} = \lambda$.

5.3.51 Exerciţiu. *Să se arate că funcţia* $f(x) = \operatorname{th} \dfrac{1}{x-a}$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{a\}$ *nu are limită în* a.

Ind. $\lim\limits_{y\to -\infty} \operatorname{th} y = -1$, $\lim\limits_{y\to \infty} \operatorname{th} y = +1$, deci $f(a-) = -1$, $f(a+) = 1$.

5.3.52. Exerciţiu. *Să se determine* $\lambda \in \mathbf{R}$ *a.î.* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{2n} - 2x^n + \lambda}{(x-1)^2}$ *există şi este finită, apoi să se calculeze această limită.*

Ind. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{(x^n-1)^2}{(x-1)^2} + \dfrac{\lambda - 1}{(x-1)^2} \right]$ există şi este finită $\Leftrightarrow \lambda = 1$.

5.3.53. Exerciţiu. *Să se calculeze limitele:*

$1^\circ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^p}\left(1 - \dfrac{\sin x}{x}\right)$, $(p>0)$; $2^\circ \lim\limits_{x\to\infty} x^p\left(1 - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right)$, $(p>0)$.

5.3.54. Exerciţiu *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{x^2 e^{-\frac{1}{x}}}{\sin^3 2x}$.

Ind. $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{x^2 e^{-\frac{1}{x}}}{\sin^3 2x} = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{2x}{\sin 2x}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}\right) = 0$

5.3.55. Exerciţiu. *Să se arate că funcţia* $f(x) = \dfrac{x - \sin x \cos x}{\cos^2 x + x^2 \sin^2 x}$, $x \in \mathbf{R}$ *nu are limită la* $+\infty$.

Ind. $f(n\pi) \to \infty$ şi $f\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) \to 0$

5.3.56. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{b^x - 1}$, $(a, b \in \mathbf{R}_+^*\setminus\{1\})$.

Ind. Ţinem seama că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{c^x - 1}{x} = \ln c$, $(\forall)\ c > 0$

5.3.57. Exerciţiu *Să se calculeze*

$$\lim_{x\to 0} \frac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x - n}{b_1^x + b_2^x + \ldots + b_n^x - n} \quad (a_i, b_i \in \mathbf{R}\setminus\{1\}).$$

Ind: Analog cu Ex. 5.3.56.

5.3.58. Exerciţiu *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\searrow 0} x^{\left[\frac{1}{x}\right]}$.

Ind. Ţinem seama că $0 < x^{\left[\frac{1}{x}\right]} \leqslant x^{\frac{1}{x}}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$ şi $\lim\limits_{x\searrow 0} x^{\frac{1}{x}} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

5.3.59. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\operatorname{tg} x}$.

Ind. Limita dată este egală cu

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\cos x})\operatorname{tg} x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}+\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{2}.$$

5.3.60 Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

Ind. $|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}|=2\left|\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|=2\left|\frac{\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}}\right|\cdot\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\to$$

$$\to 2.1.0=0$$

5.3.61. Exerciţiu. *Să se determine parametrii* $\alpha\in\mathbf{R}_+$ *şi* $\beta\in\mathbf{R}$ *a.î.*

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{\alpha x^2+x}-\sqrt{x^2+\beta x})$$

este finită (resp. infinită).

Ind. Pentru x suficient de mare avem:

$$\sqrt{\alpha x^2+x}-\sqrt{x^2+\beta x}=\frac{(\alpha-1)x^2+(1-\beta)x}{\sqrt{\alpha x^2+x}-\sqrt{x^2+\beta x}}$$

Limita este $\dfrac{1}{2}(1-\beta)$, dacă $\alpha=1$ şi $\pm\infty$, dacă $\alpha\in\mathbf{R}_+\setminus\{1\}$

5.3.62. Exerciţiu. *Fie* $A\subseteq\mathbf{R}$ *o mulţime şi* $f:A\to\mathbf{R}$ *o funcţie monotonă. Atunci* f *poate fi prelungită la o funcţie monotonă pe* $\bar{A}$.

Ind. Utilizăm T.5.5.18 şi T. 5.5.23.

5.4. Smbolurile lui Landau şi Hardy

Notaţie convenţională. Fie $A\subseteq\mathbf{R}$ o mulţime, $x_0\in A'$ [$\mathbf{R}$] un punct şi $f,g:A\to\mathbf{R}$ două funcţii. Dacă $(\exists)$ V o vecinătate a lui x_0 a.î. $g(x)\neq 0$, $(\forall)$ $x\in A\cap V\setminus\{x_0\}$ şi notăm $A\cap V$ prin B, atunci în loc de $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(f|_B)(x)}{(g|_B)(x)}$ se scrie simplu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Exemple.

1. Dacă $f(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$; $g(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$, atunci

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{f|_B(x)}{g|_B(x)}, \text{ unde } B = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Dacă $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$; $g(x) = \ln x$, $x \in \mathbf{R}_+$, atunci

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{e^x}{\ln x} = \lim_{x\searrow 0} \frac{f|_B(x)}{g|_B(x)}, \text{ unde } B = (0,1).$$

5.4.1. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'$ $[\bar{\mathbf{R}}]$ un punct și $f, g : A \to \mathbf{R}$ două funcții cu $g \geqslant 0$. Vom spune că $f = o(g)$ sau $f \leqslant g$ *în vecinătatea lui* x_0 și vom scrie $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, dacă este satisfăcută condiția:

$(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ V$ o vecinătate a lui x_0 a.î. $|f(x)| \leqslant \varepsilon g(x)$, $(\forall)\ x \in A \cap V$, $x \neq x_0$.

Vom spune că $f = O(g)$ sau $f \ll g$ *în vecinătatea lui* x_0 și vom scrie $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$, dacă este satisfăcută condiția:

$(\exists)\ M > 0$ și V o vecinătate a lui x_0 a.î. $|f(x)| \leqslant M g(x)$, $(\forall)\ x \in A \cap V$, $x \neq x_0$.

În loc de vecinătatea V a lui x_0 se poate considera o semivecinătate V^- sau V^+ a lui x_0.

Dacă g este o funcție elementară, spre exemplu $g(x) = x^n$, $x \in \mathbf{R}$, vom scrie "$f(x) = o(x^n)$, $x \to x_0$" în loc de „$f = 0(g)$ *în vecinătatea lui* x_0".

5.4.2. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'$ $[\bar{\mathbf{R}}]$ un punct și $f, g; A \to \mathbf{R}$ două funcții cu proprietatea că există V o vecinătate a lui x_0 a.î. $g(x) \neq 0$, $(\forall)$ $x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$. Vom spune că f *și* g *sînt echivalente în vecinătatea lui* x_0 și vom scrie: $f(t) \sim g(x)$, $x \to x_0$, dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 1$.

5.4.3. Definiție Fie șirurile $f = (a_n)_{n\geqslant 1}$ și $g = (b_n)_{n\geqslant 1}$. Vom scrie atunci:

1° $a_n = o(b_n)$, $n \to \infty \Leftrightarrow f = o(g)$ în vecinătatea lui ∞;

2° $a_n = O(b_n)$, $n \to \infty \Leftrightarrow f = O(g)$ în vecinătatea lui ∞;

3° $a_n \sim b_n$, $n \to \infty$, $\Leftrightarrow f \sim g$ în vecinătatea lui ∞.

Observație.

1° Simbolurile $o(g)$, $O(g)$ nu sînt funcții și nu au nici un sens luate izolat.

2. Condițiile $f = o(g)$, $f = O(g)$ și $f \sim g$, se referă întotdeauna la un anumit x_0 fixat, precizat în mod explicit sau subînțeles din context.

Exemple.

1. Fie $f = \sin$ și $g = 1_{\mathbf{R}}$. Atunci $f \sim g$ în vecinătatea lui 0; f nu este echivalent cu g în vecinătatea lui ∞; $f = o(g)$ în vecinătatea lui ∞.

2. Fie $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $x \in \mathbf{R}$ $(a_0 \neq 0)$

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots b_m, \quad x \in \mathbf{R} \quad (b_0 \neq 0)$$

Atunci $f \sim g$ în vecinătatea lui $\infty \Leftrightarrow a_0 = b_0$ și $n = m$;

$f = o(g)$ în vecinătatea lui $\infty \Leftrightarrow m > n$.

3. Fie $f(x) = \ln(1 + x)$, $x \in (-1, \infty)$, $g(x) = x$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$.

Atunci $f \sim g$ în vecinătatea lui 0 și $f = o(g)$ în vecinătatea lui ∞.

Scanned with OKEN Scanner

4. Fie $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$. Atunci $f = O(1)$ în vecinătatea lui O și $f = o(1)$ în vecinătatea lui ∞.

5. Fie $a_n := \frac{1}{n^2}$ și $b_n := \frac{1}{n+1}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Atunci $a_n = o(b_n)$.

6. Fie $a_n := (-1)^n$ și $b_n := \frac{n}{n+1}$ $(\forall)\ n \geqslant 1$. Atunci

$$a_n = O(b_n);\ a_n \neq o(b_n);\ a_n \sim b_n.$$

5.4.4. Exercițiu. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime*, $x_0 \in A'[\bar{\mathbf{R}}]$ *un punct și* $f, g : A \to \mathbf{R}$ *două funcții a.î.* $g(x) > 0$, $(\forall)\ x \in A$. *Atunci:*

1° $f = o(g)$ *în vecinătatea lui* $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;

2° $f = O(g)$ *în vecinătatea lui* $x_0 \Leftrightarrow$ *funcția* f/g *este mărginită pe o anumită vecinătate punctată a lui* x_0.

Soluție. Evidentă.

5.4.5. Exercițiu. *Următoarele relații sînt adevărate:*

1° $o(f) + o(f) = o(f)$; 2° $o(fg) = o(f) \cdot o(g)$;
3° $o(fg) = o(f) \cdot O(g)$; 4° $o(O(f)) = O(o(f)) = o(f)$;
5° $O(f) + O(f) = O(f)$; 6° $O(fg) = O(f) \cdot O(g)$;
7° $OO(f) = O(f)$; 8° $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$;
9° $o(f) = \lambda o(f)$ *și* $O(f) = \lambda O(f)$, $(\forall)\ \lambda \in \mathbf{R}^*$;
10° $f = o(1)$ *în vecinătatea lui* $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$;

11° $f = O(1)$ *în vecinătatea lui* $x_0 \Leftrightarrow f$ *este mărginită pe o anumită vecinătate a lui* x_0;

12° $f \sim g \Leftrightarrow \lambda f \sim \lambda g$, $(\forall)\ \lambda \in \mathbf{R}^* \Leftrightarrow f = g + o(|g|)$;

13° $f_1 \sim \lambda$, *și* $f_2 \sim \lambda_2 g \Rightarrow f_1 + f_2 \sim (\lambda_1 + \lambda_2)g$, *dacă* λ_1, λ_2 *și* $\lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbf{R}^*$;

14° $f_i \sim g_i$ $(i = \overline{1,2}) \Rightarrow f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ *și* $f_1/f_2 \sim g_1/g_2$.

Ind. Se aplică proprietățile standard ale limitelor de funcție. Să arătăm spre exemplu că $o(f(x)) + o(f)(x) = o(f(x))$, $x \to x_0$.

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)\ V_1$ și V_2 două vecinătăți ale lui x_0 a.î.

$$|g_1(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\ |f(x)|,\ (\forall)\ x \in A \cap V_1 \setminus \{x_0\};\ |g_2(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2};\ f(x)|,\ (\forall) x \in A \cap$$
$$\cap\ V_2 \setminus \{x_0\},$$

deci

$$|g_1(x) + g_2(x)| \leqslant |g_1(x)| + |g_2(x)| \leqslant \varepsilon |f(x)|,\ (\forall)\ x \in A \cap (V_1 \cap V_2) \setminus \{x_0\} \text{ etc.}$$

5.5. Funcții continue

5.5.1. Exercițiu. *Să se arate plecînd de la definiție că funcția* $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbf{R}$ *este continuă.*

Soluție. Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ fixat și $x_n \to x_0$. Atunci $x_0^2 \to x_0^2$ adică $f(x_n) \to f(x_0)$, deci f este continuă în x_0.

Scanned with OKEN Scanner

5.5.2. Exerciţiu. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă a.î.* $f(I \cap Q) \subseteq Q$. *Dacă există* $a,b \in I \cap Q$ *a.î.* $f(a)\, f(b) < 0$, *atunci nu rezultă numaidecît că există* $c \in I \cap Q$ *a.î.* $f(c) = 0$.

Contraexemplu : Fie $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$ definită astfel

$f(x) = x^2 - 3$. Atunci $f(0) = -3$, $f(2) = 1$ şi $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = +\sqrt{3}$.

5.5.3. Exerciţiu. *Fie funcţia* $f(x) = [x]$, $x \in \mathbf{R}$. *Atunci f continuă în* $x_0 \Leftrightarrow x_0 \notin \mathbf{Z}$.

Soluţie. ($\Rightarrow$) Fie $x_0 = n \in \mathbf{Z}$. Atunci $f(x) = \begin{cases} n-1, & (\forall) x \in [n-1, n) \\ n, & (\forall) x \in [n, n+1) \end{cases}$

deci $f(x_0-) = n-1$, $f(x_0+) = n$ şi deci f este discontinuă în x_0 (discontinuitate de prima speţă).

($\Leftarrow$) Fie $x_0 \notin \mathbf{Z}$. Atunci există $n \in \mathbf{Z}$ a.î. $n < x_0 < n+1$. Evident $f(x) = n$, $(\forall)\, x \in V = (n, n+1)$, deci $f|_V$ este constantă şi deci continuă în x_0. Din P.5.5.9 rezultă că f este continuă în x_0.

Corolar 1. *Funcţia* $f(x) = x - [x]$, $x \in \mathbf{R}$, *este continuă în* $x_0 \Leftrightarrow x_0 \notin \mathbf{Z}$

Corolar 2. *Fie funcţia* $f(x) = \left[\frac{1}{x^2}\right]$, *dacă* $x \in \mathbf{R}^*$ *şi* $f(0) = 0$. *Atunci f este continuă în* $x_0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0$ *şi* $x_0 \neq \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbf{N}$.

Corolar 2. *Funcţia* $f(x) = x^2 - [x^2]$, $x \in \mathbf{R}$, *este continuă în* $x_0 \Leftrightarrow x_0 \notin \mathbf{N}$ (fig. 8)

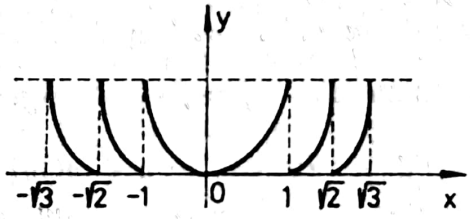


Fig. 8

5.5.4. Exerciţiu. *Fie funcţia* $f(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$, $x \in \mathbf{R}$. *Atunci f este continuă în* $x_0 \Leftrightarrow x_0 \neq n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Soluţie. ($\Rightarrow$) Fie $x_0 = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Atunci $f(x_0) = 0$ şi $f(x) = \pm 1$, deci f nu este continuă în x_0.

($\Leftarrow$) Fie $x_0 \neq n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Atunci $\sin x_0 \neq 0$ şi cum funcţia sign este continuă pe $\mathbf{R}^*$ rezultă că $f = \operatorname{sign} \circ \sin$ este continuă în x_0 (fig. 9).

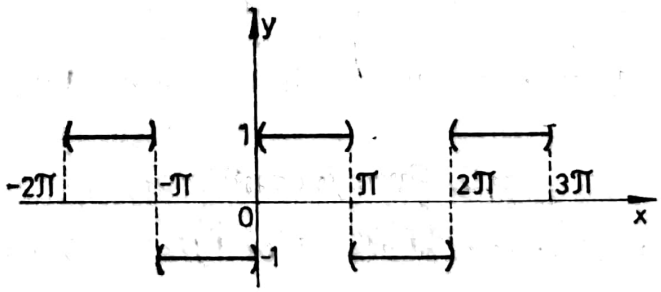


Fig. 9

Scanned with OKEN Scanner

Corolar 1. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită astfel* $f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin \frac{1}{x}\right)$, *dacă* $x \neq 0$ *şi* $f(0) = 0$. *Atunci* f *continuă în* $x_0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0$ *şi* $x_0 \neq \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$

5.5.5. Exerciţiu. *Să se studieze punctele de continuitate ale funcţiei* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită astfel*

$$f(x) = \left[\frac{1}{x^2}\right] \operatorname{sign}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right), \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Soluţie. Fie $g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcţii definite astfel

$$g(x) = \begin{cases} \left[\frac{1}{x^2}\right], & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}; \quad h(x) = \begin{cases} \operatorname{sign}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Funcţia $x \mapsto [x]$, $x \in \mathbf{R}$, fiind continuă pe $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ şi discontinuă pe $\mathbf{Z}$, rezultă că g este continuă în orice punct $x \neq 0$, cu $\frac{1}{x^2} \notin \mathbf{Z}$, deci dacă $x \neq 0$ şi $x \neq \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$, $k \in \mathbf{N}$.

Este clar că funcţia h este continuă în $x_0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0$ şi $x_0 \neq \frac{1}{k}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Prin urmare $f = g \cdot h$ este continuă în orice punct x_0 cu $x_0 \neq 0$, $\neq \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$ şi $\neq \pm \frac{1}{k}$ $(k \in \mathbf{N})$, adică în orice punct $x_0 \neq 0$ şi $x_0 \neq \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$ $(k \in \mathbf{N})$.

Fie acum $x_n = \dfrac{1}{2n + \frac{1}{2}}$ şi $y_n = \dfrac{1}{2n + \frac{3}{2}}$ $(n \geqslant 1)$. Atunci

$$f(x_n) = \left[\left(2n + \frac{1}{n}\right)^2\right] = 4n^2 + 2n \to \infty;$$

$$f(y_n) = -\left[\left(2n + \frac{3}{2}\right)^2\right] = -(4n^2 + 6n + 2) \to -\infty,$$

deci f nu este continuă în o (discontinuitate de speţa a doua).

Să arătăm că f este discontinuă în $x_0 = \frac{1}{\sqrt{k}}$ $(k \in \mathbf{N})$.

Evident $g(x_0+)$, $g(x_0-)$ există şi $\in \mathbf{N}$; $h(x_0+)$, $h(x_0-)$ există şi sînt egale cu 1 sau -1 şi sînt de semne contrare, deci $f(x_0+)$, $f(x_0-)$ există şi sînt de semne contrare şi deci f este discontinuă în x_0 (discontinuitate de prima speţă)

Analog se raţionează pentru $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{k}}$.

5.5.6. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel:* $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ *dacă* $x \neq 0$ *şi* $f(0) = 0$. *Atunci* f *nu are limite laterale în* 0, *deci* 0 *este un punct de discontinuitate de speţa a doua.*

Soluție. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(x'_n)_{n\geq 1}$ două șiruri de numere pozitive a.î.

$$\frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{1}{x'_n} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \ (\forall) \ n \geq 1.$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$ și $f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$, $(\forall)$ $n \geq 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$ în timp ce $f(x'_n) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1$, $(\forall)$ $n \geq 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = -1$. Prin urmare f nu are limită la dreapta în 0.

Analog se raționează pentru limita la stînga în 0.

Observația 1. Evident f are proprietatea lui Darboux deși f nu este continuă în fiecare punct.

Observația 2. Fie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ dacă $x \neq 0$ și $g(0)=1$. Atunci g are proprietatea lui Darboux și diferă de f într-un singur punct.

5.5.7. Exercițiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\setminus[-1, 0) \cup (0, 1]$ *o funcție definită astfel* $f(x) = (1 + x^2)$ sign x. *Atunci* f *este strict crescătoare, continuă pe* $\mathbf{R}^*$ *și discontinuă în* 0, *în timp ce funcția inversă* f^{-1} *este continuă.*

Soluție. Avem $f(0-) = -1$, $f(0) = 0$, $f(0+) = 1$, deci 0 este discontinuitate de prima speță. Pe $\mathbf{R}^*$ funcția f este continuă, fiind un produs de funcții raționale. Evident avem :

$f^{-1}(y) = \sqrt{-1 + y}$, dacă $y > 1$, $f^{-1}(0) = 0$ și $f^{-1}(y) = -\sqrt{-1 - y}$, dacă $y < -1$

Punctul o fiind izolat în mulțimea $(-\infty, 1) \cup \{0\} \cup (1, \infty)$ avem că f^{-1} este continuă în 0. Dacă $|y| > 1$, atunci evident f^{-1} este continuă în y (fig. 10)

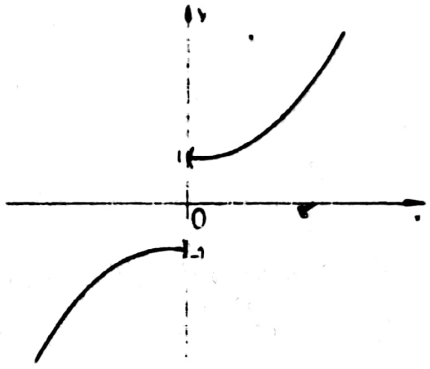


Fig. 10

5.5.8. Exercițiu. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime și* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci* $f = 0 \Leftrightarrow (\forall)\ x \in A$ *și* V *o vecinătate a lui* x *există* $x' \in A \cap V$ *a.î.* $f(x') = 0$.

Soluție. ($\Leftarrow$) Fie $x \in A$ fixat și $V_n(y) = \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbf{N}$. Cf. ipotezei există $x_n \in A \cap V_n(x)$ a.î. $f(x_n) = 0$ $(\forall)$ $n \geq 1$.

Evident $x_n \to x$ și cum f este continuă în x, rezultă $f(x_n) \to f(x)$, deci $f(x) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

5.5.9. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie nemărginită pe fiecare interval deschis* $I \subseteq \mathbf{R}$. *Atunci* f *este discontinuă pe* $\mathbf{R}$.

Soluţie. Dacă f ar fi continuă într-un punct $x_0 \in \mathbf{R}$, atunci f ar fi mărginită pe o vecinătate a lui x_0, deci pe un interval deschis I care conţine x_0, absurd.

5.5.10. Exerciţiu. *Fie* $f : [-1, 1] \cup \{2\} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) = \sin \pi x$, *dacă* $x \in [-1, 0)$; $f(x) = x^2$, *dacă* $x \in [0,1]$ *şi* $f(1) = 2$. *Atunci* f *este continuă.*

Soluţie. 2 este punct izolat al mulţimii $A = [-1, 1] \cup \{2\}$, deci f este continuă în 2.

Evident $f(0-) = f(0+) = f(0) = 0$, deci f este continuă în 0.

Fie $x_0 \in [-1, 0)$ şi U o ε-vecinătate a lui x_0 care nu conţine pe 0. Atunci $(f|_U)(x) = \sin \pi x$, $(\forall)\ x \in U$, deci $f|_U$ este continuă în x_0 şi deci (P. 5.5.9.) f este continuă în x_0.

Dacă $x \in (0, 1]$, procedăm analog

5.5.11. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă cu proprietatea că*

$$f(x + \sqrt{2}) = f(x + \sqrt{3}) = f(x), \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Atunci f *este constantă.*

Ind. Se arată prin inducţie relaţia $f(m\sqrt{2} + n\sqrt{3}) = f(0)$, $(\forall)\ m, n \in \mathbf{Z}$ Mulţimea $A = \{m\sqrt{2} + n\sqrt{3};\ m, n \in \mathbf{Z}\}$ fiind densă în $\mathbf{R}$(Ex. 5.2.15.) şi f continuă, rezultă (T. 5.5.21.) că $f(x) = f(0)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

5.5.12. Exerciţiu. *Să se arate că* $(\forall)\ \alpha \in \mathbf{R}$ *ecuaţia* $x^5 - x^2 + 3\alpha x - 1 = 0$ *admite cel puţin o rădăcină pozitivă.*

Soluţie. Fixăm $\alpha \in \mathbf{R}$ şi fie funcţia $f(x) = x^5 - x^2 + 3\alpha x - 1$, $x \in \mathbf{R}$. Evident f continuă, $f(0) = -1$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. Atunci $(\exists)\ a \in \mathbf{R}_+$ cu $f(a) > 0$, deci (T. 5.5.16. Cor. 2) $(\exists)\ x_0 \in (0, a)$ cu $f(x_0) = 0$ etc.

5.5.13. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$. *Atunci* f *ia pe intervalul* $[0, 2]$ *orice valoare cuprinsă între* -1 *şi* $+1$.

Soluţie. Evident f este continuă, deci f are proprietatea Darboux. Cum $f(0) = -1$ şi $f(2) = 1$, rezultă $f([0, 2]) \supseteq [-1, 1]$.

5.5.14. Exerciţiu. *Fie* $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval de capete* a *şi* b *şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă pe* $\mathring{I}$ *a.î.* $f(a+)$ *şi* $f(b-)$ *există şi sînt finite. Atunci* f *este mărginită.*

Soluţie. Notăm $l := f(a+)$, $L = f(b-)$ şi fie $\varepsilon > 0$. Atunci $(\exists)\ a < c < d < b$ a.î.

$$|f(x) - l| < 1, \ (\forall)\ x \in (a, c); \ |f(x) - L| < 1, \ (\forall)\ x \in (d, b),$$

deci

$$|f(x)| < 1 + |l|, \ (\forall)\ x \in (a, c); \ |f(x)| < 1\ |L|, \ (\forall)\ x \in (d, b)$$

Cum f este continuă pe $\mathring{I}$, deci pe $[c, d]$, rezultă (T.5.5.17. Cor.1) $M := \sup\limits_{x \in [c, d]} |f(x)| < +\infty$. Aşadar avem :

$$|f(x)| \leqslant \max\{M, 1 + |l|, 1 + |L|\}, \ (\forall)\ x \in \mathring{I} \text{ etc.}$$

Corolar 1. *Fie* $a \in \mathbf{R}$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$ *şi* $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă a.î.* $f(b-)$ *există şi este finită. Atunci* f *este mărginită.*

Scanned with OKEN Scanner

5.5.15. Exerciţiu. *Fie* $I = [a, b] \to \mathbf{R}$ *şi* $f, g : I \to I$ *două aplicaţii continue a.î.* $f \circ g = g \circ f$. *Atunci* $(\exists)\ x_0 \in I$ *cu proprietatea* $f(x_0) = g(x_0)$

Soluţie. Presupunem $(f-g)(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I$. Cum $f - g$ este continuă, $(\exists)\ \varepsilon > 0$ a.î. $f - g \geqslant \varepsilon$ sau $f - g \leqslant -\varepsilon$; să ne situăm în primul caz. Atunci pentru $h = f$ sau $h = g$ avem $(f - g)(h(x)) \geqslant \varepsilon$, $(\forall)\ x \in I$, deci $f \circ f \geqslant g \circ f + \varepsilon$ şi $f \circ g \geqslant g \circ g + \varepsilon$, de unde rezultă

$$f \circ f \geqslant g \circ f + \varepsilon = f \circ g + \varepsilon \geqslant g \circ g + 2\varepsilon$$

Continuînd acest procedeu deducem că

$$f^n \geqslant g^n + n\varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant 1,\ \text{deci}\ b \geqslant f^n(x) \geqslant g^n(x) + n\varepsilon \geqslant a + n\varepsilon,$$

$(\forall)\ n \geqslant 1$ şi deci $b - a \geqslant n\varepsilon$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, absurd etc.

5.5.16. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă. Dacă* $f \circ f$ *are puncte fixe, atunci* f *are puncte fixe.*

Soluţie. Presupunînd contrariul rezultă că $(f - 1_{\mathbf{R}})(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Cum $f - 1_{\mathbf{R}}$ este continuă, are proprietatea Darboux, deci $f - 1_{\mathbf{R}} > 0$ sau $f - 1_{\mathbf{R}} < 0$; spre exemplu avem $f - 1_{\mathbf{R}} > 0$. Atunci $f(f(x)) > f(x) > x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, ceea ce contrazice faptul că $f \circ f$ are puncte fixe. Rămîne că f are puncte fixe.

5.5.17. Exerciţiu. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime. Dacă orice funcţie continuă* $f : A \to \mathbf{R}$ *este mărginită, atunci* A *este compactă.*

Soluţie. Fie $f(x) = x$, $x \in A$. Evident f este continuă, deci conform ipotezei $\sup\limits_{x \in A} |f(x)| < +\infty$ şi deci $\sup\limits_{x \in A} |x| < +\infty$, încît A este mărginită.

Presupunem că A nu este închisă şi fie $x_0 \in A' \setminus A$ fixat. Atunci funcţia $f(x) = \dfrac{1}{|x - x_0|}$, $x \in A$ este continuă, deci majorată. Însă (T.5.1.8.) $(\exists)$ $x_n \in A \setminus \{x_0\} = A$ cu $x_n \to x_0$, deci $f(x_n) \to \infty$ şi deci avem $+\infty > \sup\limits_{x \in A} f(x) \geqslant$ $\geqslant \sup\limits_{n \geqslant 1} |f(x_n)| = +\infty$, absurd. Rămîne că A este închisă, deci compactă.

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime care nu este închisă. Atunci* $(\exists)\ f : A \to \mathbf{R}$ *continuă şi nemărginită.*

5.5.18. Exerciţiu. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval;* $f, g : I \to \mathbf{R}$ *două aplicaţii continue şi* $\varphi : I \to \mathbf{R}$ *o aplicaţie definită astfel* $\varphi(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in I \cap Q$ *şi* $\varphi(x) = g(x)$, $(\forall)\ x \in I \setminus Q$. *Atunci* φ *are proprietatea lui Darboux (resp. este antiderivabilă)* $\Leftrightarrow f = g$.

Soluţie ($\Rightarrow$) Presupunem că φ are P. D. şi că $(\exists)\ x_0 \in I$ cu $f(x_0) \neq g(x_0)$, spre exemplu $f(x_0) < g(x_0)$. Fie $\varepsilon = \dfrac{1}{3}(g(x_0) - f(x_0))$ şi să punem $V_1 =$ $= (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ şi $V_2 = (g(x_0) - \varepsilon, g(x_0) + \varepsilon)$. Aplicaţiile f şi g fiind continue, $(\exists)\ \eta > 0$ a.î. $f(U) \subseteq V_1$ şi $g(U) \subseteq V_2$, unde $U = (x_0 - \eta, x_0 + \eta) \cap I$. Evident avem $f(x_0) + \varepsilon < g(x_0) - \varepsilon$; fie c un număr cuprins între $f(x_0) +$ $+ \varepsilon$ şi $g(x_0) - \varepsilon$. Este clar că $\varphi(U \cap Q) = f(U \cap Q) \subseteq V_1 \subseteq -(\infty, c)$; $\varphi(U \setminus Q) =$ $= g(U \setminus Q) \subseteq V_2 \subseteq (c, +\infty)$, deci $\varphi(U) \subseteq \mathbf{R} \setminus \{c\}$. Cum $\varphi(U)$ este un interval (deoarece φ are P.D.) care are puncte comune cu $(-\infty, c)$ şi cu (c, ∞), rezultă că $c \in \varphi(U)$, absurd. Prin urmare $f = g$.

Implicaţia ($\Leftarrow$) rezultă din T.5.5.21.

5.5.19. Exerciţiu. *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcţii continue a.î.* $f(a) >$ $> g(a)$ *şi* $f(b) < g(b)$. *Atunci* $(\exists)\ x_0 \in (a, b)$ *cu* $f(x_0) = g(x_0)$.

Soluţie. Fie $h := g - f$. Atunci $h(a) < 0 < h(b)$ şi h continuă, deci $(\exists)\ x_0 \in (a, b)$ cu $h(x_0) = 0$ etc.

Scanned with OKEN Scanner

Corolar 1. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcţie continuă a.î.* $f(a)\geqslant a$ *şi* $f(b)\leqslant b$, *în particular* $f([a,b])\subseteq[a,b]$. *Atunci* $(\exists)\ x_0\in[a,b]$ *cu* $f(x_0)=x_0$.

Soluţie. Aplicăm Ex. 5.5.19. pentru funcţiile f şi $\mathbf{1}_{[a,b]}$.

5.5.20 Exerciţiu. *Fie* $I\subseteq\mathbf{R}$ *un interval şi* $f:I\to\mathbf{R}$ *o funcţie continuă. Modificînd* f *într-un număr finit de puncte* $x_1,x_2,\ldots,x_n$ *din* I, *funcţia rezultată nu are proprietatea lui Darboux.*

Soluţie. Fie $\tilde f:I\to\mathbf{R}$ o funcţie definită astfel $\tilde f(x)=f(x)$, $(\forall)\ x\in I\setminus\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ şi $f(x_i)=\alpha_i\neq f(x_i)$, $(\forall)\ i=\overline{1,n}$. Fie $i=\overline{1,n}$ fixat. Deoarece f este continuă în x_i, rezultă imediat relaţia:

$$\lim_{x\to x_i}\tilde f(x)=\lim_{x\to x_i}f(x)=f(x_i)\neq\alpha_i=\tilde f(x_i)$$

Aşadar x_i este o discontinuitate de prima speţă pentru $\tilde f$, deci (P. 5.5.20. Cor. 3) $\tilde f$ nu are proprietatea lui Darboux.

5.5.21. Exerciţiu. *Fie* $A\subseteq\mathbf{R}$ *o mulţime şi* $f:A\to\mathbf{R}$ *o mulţime. Atunci* f *este continuă în* $x_0\in A\Leftrightarrow(\forall)\ (x_n)_{n\geqslant1}$ *un şir monoton cu elemente din* A, *care converge la* x_0, *rezultă că* $f(x_n)\to f(x_0)$.

Soluţie ($\Leftarrow$) Presupunem f discontinuă în x_0. Atunci $(\exists)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ (x_n)_{n\geqslant1}$ un şir cu elemente din A, $x_n\to x_0$, a.î. $|f(x_n)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon$, $(\forall)\ n\geqslant1$.

Şirul $(x_n)_{n\geqslant1}$ posedă, evident, un subşir monoton $(x_{n_k})_{k\geqslant1}$. Cum $x_{n_k}\to x_0$ şi $|f(x_{n_k})-f(x_0)|\geqslant\varepsilon$, $(\forall)\ k\geqslant1$, obţinem o contradicţie. Rămîne că f este continuă în x_0.

5.5.22. Exerciţiu. *Fie* $A\subseteq\mathbf{R}$ o mulţime, $x_0\in\overline{A\setminus\{x_0\}}$ *şi* $f:A\to\mathbf{R}$ *o funcţie. Atunci* $\overline{\lim_{x\to x_0}}f(x)-\underline{\lim_{x\to x_0}}f(x)\leqslant\hat\omega_f(x_0)$.

Soluţie. Presupunem $\omega_f(x_0)<+\infty$, fie $\varepsilon>0$ fixat şi $\mathcal{V}=\mathcal{V}(x_0)$. Deoarece

$$\hat\omega_f(x_0)=\inf_{V\in\mathcal{V}}(\operatorname{dia}(f(V\setminus\{x_0\}))),\quad(\exists)\ V\in\mathcal{V}\text{ a.î.}$$

$$\operatorname{dia}(f(V\setminus\{x_0\}))\leqslant\omega_f(x_0)+\varepsilon$$

Însă

$$\operatorname{dia}f(V\setminus\{x_0\})=\inf f(V\setminus\{x_0\})-\inf f(V\setminus\{x_0\})$$

şi

$$0\leqslant\overline{\lim_{x\to x_0}}f(x)-\underline{\lim_{x\to x_0}}f(x)\leqslant\sup f(V\setminus\{x_0\})-\inf f(V\setminus\{x_0\}),$$

deci

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}f(x)-\underline{\lim_{x\to x_0}}f(x)\leqslant\omega_f(x_0)+\varepsilon$$

Cum $\varepsilon>0$ a fost arbitrar, rezultă inegalitatea dată.

5.5.23. Exerciţiu. *Fie* $A\subseteq\mathbf{R}$ *o mulţime,* $x_0\in A'$ [$\mathbf{R}$] *un punct şi* $f:A\to\mathbf{R}$ *o funcţie mărginită. Atunci avem:*

$$\hat\omega_f(x_0)=\overline{\lim_{x\to x_0}}f(x)-\underline{\lim_{x\to x_0}}f(x)$$

Soluţie. Fie $(V_n)_{n\geqslant1}$ un şir monoton descrescător care constituie bază de vecinătăţi a lui x_0.

Scanned with OKEN Scanner

Definim în continuare şirurile numerice

$$\alpha_n := \sup f(A \cap V \setminus \{x_0\}),\ \beta_n := \inf f(A \cap V \setminus \{x_0\}),$$
$$\gamma_n := \operatorname{dia} f(A \cap V_n \setminus \{x_0\}) \quad (n \geqslant 1).$$

Evident primul şi ultimul şir este monoton descrescător iar al doilea monoton crescător, deci (T.2.3.21.(2°)) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \inf\limits_{n\geqslant 1} \alpha_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \sup\limits_{n\geqslant 1} \beta_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \inf\limits_{n\geqslant 1} \gamma_n$. Mai departe avem $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \inf\limits_{n\geqslant 1} \alpha_n$, $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x) = \sup\limits_{n\geqslant 1} \beta_n$, $\hat{\omega}_f(x_0) = \inf\limits_{n\geqslant 1} \gamma_n$.

Din P. 2.2.8.(3°) rezultă că $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, de unde prin trecere la limită, obţinem :

$$\hat{\omega}_f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n - \lim_{n\to\infty} \beta_n = \overline{\lim_{n\to x_0}} f(x) - \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x).$$

5.5.24. Exerciţiu *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă care satisface una din condiţiile : $f(I) \subseteq Q$ sau $f(I) \subseteq \mathbf{R} \setminus Q$ sau $f(I)$ este o mulţime finită. Atunci f este constantă.*

Soluţie. Funcţiile continue au proprietatea lui Darboux iar funcţiile care au proprietatea lui Darboux şi satisfac una din condiţiile din enunţ sînt constante. (P.4.3.4., P.4.3.2.)

5.5.25. Exerciţiu. *Fie $I = [a, b]$ un interval închis şi mărginit şi $f : I \to I$ o funcţie continuă. Atunci f posedă cel puţin un punct fix.*

Soluţie. Notăm $g(x) = f(x) - x$, $(\forall)\ x \in I$. Evident $g : I \to \mathbf{R}$ este continuă şi avem $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$, $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. Deoarece g are proprietatea lui Darboux există $c \in I$ a.î. $g(c) = 0$ adică $f(c) - c = 0$ sau $f(c) = c$.

Observaţia 1. Dacă $a = -b$, atunci există şi un punct $d \in I$ cu $f(d) = -d$.

Observaţia 2. Dacă f nu este continuă sau I nu este interval închis şi mărginit, Ex. 5.5.25. nu este numaidecît adevărat.

5.5.26. Exerciţiu. *Fie $f, g : [a,b] \to [a,b]$ două funcţii continui cu proprietatea că f sau g este surjectivă. Atunci există $x_0 \in [a,b]$ a.î. $f(x_0) = g(x_0)$.*

Soluţie. Fie $h - f = g$ şi $I = [a,b]$. Dacă $h(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I$, rezultă (T.5.5.16.Cor. 3) $h > 0$ sau $h < 0$.

Presupunem f surjectivă. Există atunci $x_1, x_2 \in I$ a.î. $f(x_1) = a$ şi $f(x_2) = b$.
Dacă $h > 0$, atunci $a - g(x_1) = h(x_1) > 0$, deci $g(x_1) < a$, absurd.
Dacă $h < 0$, atunci $b - g(x_2) = h(x_2) < 0$, deci $g(x_2) > b$, absurd.
Prin urmare $(\exists)\ x_0 \in I$ a.î. $h(x_0) = 0$ adică $f(x_0) = g(x_0)$.
Observaţie. Ex. 5.5.25. este un caz particular al Ex. 5.5.26.

5.5.27. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă şi periodică. Atunci f este mărginită şi posedă cel puţin un punct fix.*

Soluţie. Funcţia f fiind periodică există $T > 0$ a.î. $f(x + T) = f(x)$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$. Deoarece f este continuă pe $\mathbf{R}$ deci pe $[0, T]$, rezultă (T. 5.5.17. Cor.1) că f este mărginită pe $[0, T]$. Cum $f(\mathbf{R}) = f([0, T])$, deducem că f este mărginită (pe $\mathbf{R}$). Mulţimea $f(\mathbf{R})$ fiind mărginită, există $n \in \mathbf{N}$ a.î., $f(\mathbf{R}) \subseteq [-nT, nT]$. Notăm $[-nT, nT]$ cu I şi observăm că $f(I) \subseteq f(\mathbf{R}) \subseteq I$, deci (Ex. 5.5.25.) există $x_0 \in I$ a.î. $f(x_0) = x_0$.

5.5.28. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^*$ o funcţie continuă şi $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $g(x) = f(x)$, dacă $x \in Q$ şi $g(x) = -f(x)$, dacă $x \in \mathbf{R} \setminus Q$. Atunci g este discontinuă.*

Soluţie. Fixăm $x_0 \in \mathbf{R}$. Să presupunem că g este continuă în x_0 şi fie $r_n \in Q$, $r_n \to x_0$ şi $i_n \in \mathbf{R} \setminus Q$, $i_n \to x_0$. Atunci $g(r_n) \to g(x_0)$ şi $g(i_n) \to g(x_0)$. Însă

Scanned with OKEN Scanner

$g(r_n) = f(r_n) \to f(x_0)$ și $g(i_n) = -f(i_n) \to -f(x_0)$, deci $f(x_0) = -f(x_0)$, absurd, deoarece $f(x_0) \neq 0$. Rămîne că g este discontinuă în x_0, deci pe $\mathbf{R}$.

5.5.29. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită şi $M_f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel $M_f(x) = \sup_{t \in I, t \leq x} f(t)$. Dacă f este continuă în $x_0 \in \mathring{I}$ şi $f(x_0) < M_f(x_0)$, atunci există o vecinătate V a lui x_0 pe care M_f este constantă.*

Soluţie. Dacă $f(t) \leqslant f(x_0)$, $(\forall)\ t \in I$, $t < x_0$ atunci $M(x_0) \leqslant f(x_0)$, absurd. Deci există $t_0 \in I$, $t_0 < x_0$ a.î. $f(t_0) > f(x_0)$. Cum f este continuă în x_0 există V o vecinătate a lui x_0, $V \subseteq I$ a.î. $f(t_0) > f(x)$, $(\forall)\ x \in V$. Atunci $M_f(x) = f(t_0)$, $(\forall)\ x \in V$, deci M_f este constantă pe V.

5.5.30. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Atunci între două puncte de maxim (resp. minim) în sens larg există cel puţin un punct de minim (resp. maxim) în sens larg.*

Soluţie. Fie $a, b \in I$, $a < b$, două puncte de maxim în sens larg şi să presupunem că $f(a) \leqslant f(b)$.

(i) $(\exists)\ 0 < \varepsilon < b - a$ a.î. f este constantă pe $(a, a + \varepsilon)$. Atunci orice punct $x_0 \in (a, a + \varepsilon)$ este punct de minim în sens larg.

(ii) $(\forall)\ 0 < \varepsilon < b - a$, f nu este constantă pe $(a, a + \varepsilon)$. Atunci există $x \in (a, b)$ a.î. $f(x) < f(a)$, deci f fiind continuă pe $[a, b]$ există $x_0 \in [a, b]$ a.î. $f(x_0) \leqslant f(x)$, $(\forall)\ x \in [a, b]$. Evident $x_0 \neq a$ şi b deci $x_0 \in (a, b)$ şi deci x_0 este un punct de minim în sens larg cuprins între a şi b.

Observaţie. Între două puncte de maxim (resp. minim) în sens strict nu există numaidecît un punct de minim (resp. maxim) în sens strict.

5.5.31. Exerciţiu *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $a \in \mathring{I}$ şi $f, g : I \to \mathbf{R}$ două funcţii a.î. f nenulă şi continuă în a iar $g(x) = (x - a)^n f(x)$ $(\forall)\ x \in I$. Atunci avem :*

1° a extrem local pentru $g \Leftrightarrow n$ par ;

2° a punct de inflexiune pentru $g \Leftrightarrow n$ impar.

Soluţie. 1° Deoarece f continuă în a şi $f(a) \neq 0$, spre exemplu $f(a) > 0$, există $\varepsilon > 0$ a.î. $J = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq I$ şi $f(x) > 0$, $(\forall)\ x \in J$.

Dacă n este par, atunci $g(x) > g(a) = 0$, $(\forall)\ x \in J \setminus \{a\}$, deci a este minim local pentru g.

Reciproc dacă a este extrem local, spre exemplu maxim pentru g, atunci există $\varepsilon > 0$ a.î. $J = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq I$ şi $(x - a)^n f(x) \geqslant g(a) = 0$, $(\forall)\ x \in J$. Însă evident putem alege J a.î. $f(x) > 0$, $(\forall)\ x \in J$ (resp. $f(x) < 0$, $(\forall)\ x \in J$). De aici deducem că funcţia $x \mapsto (x - a)^n$, $x \in J \setminus \{a\}$ are un semn constant, deci n este par.

Analog se raţionează şi în cazul 2°.

5.5.32. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel $f(x) = x$, dacă $x \in \mathbf{Q}$ şi $f(x) = x^3$, dacă $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Atunci f este continuă în 0 şi 1 şi este discontinuă pe $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Într-adevăr fie $\varepsilon > 0$ fixat. Dacă $0 < \eta < \min\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt[3]{\varepsilon}\}$, atunci

$$|f(x) - f(0)| = \begin{cases} |x|^2, & (\forall)\ x \in Q \\ |x|^3, & (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus Q \end{cases} \leqslant \varepsilon, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R},\ |x| < \eta,$$

deci f este continuă în 0.

De asemenea avem $f(x) - f(1) = \begin{cases} x - 1, & (\forall)\ x \in Q \\ x^3 - 1, & (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus Q \end{cases}$

Raționînd ca în Exemplele 1—2 de la T.5.5.7., deducem că

$$|x^2 - 1| \leqslant \varepsilon, \quad \text{dacă } |x - 1| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{3}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\right\},$$

$$|x^3 - 1| \leqslant \varepsilon, \quad \text{dacă } |x - 1| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{9}, \frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon}, \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{3}}\right\},$$

deci $|f(x) - f(1)| \leqslant \varepsilon$, dacă $|x - 1| < \eta$, unde

$$\eta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3}, \frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon}, \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{3}}\right\}.$$

Prin urmare f este continuă în $x = 1$.

Fie acum $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ fixat. Dacă $x_n \in \mathbf{Q}$, $x_n \to x_0$ și $x_n' \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $x_n' \to x_0$, atunci avem $f(x_n) = x_n^2 \to x_0^2$, $f(x_n') = x_n'^3 \to x_0^3 \neq x_0^2$.

Prin urmare f nu are limită în x_0, deci nu este continuă. Graficul lui f este „reprezentat" în fig. 11.

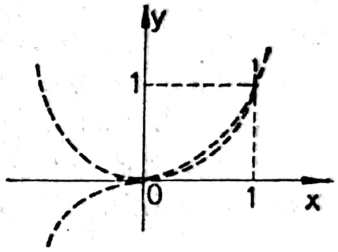


Fig. 11

5.5.33. Exercițiu. *Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci există $\xi \in (a, b)$ a.î.* $f(\xi) = \dfrac{1}{a - \xi} + \dfrac{1}{b - \xi}$,

Soluție. Notăm $I = [a, b]$ și să definim $g : \mathring{I} \to \mathbf{R}$ astfel $g(x) = \dfrac{1}{a - x} + \dfrac{1}{b - x}$. Evident g este continuă, deci $g(\mathring{I})$ este un interval și cum $g(a+) = -\infty$, $g(b-) = +\infty$, deducem că $g(\mathring{I}) = \mathbf{R}$.

Dacă $f - g$ nu se anulează în nici un punct din $\mathring{I}$ avem, deoarece $f - g$ este continuă pe $\mathring{I}$, că $f - g > 0$ sau $f - g < 0$ pe $\mathring{I}$. Dacă $f - g > 0$ adică $f > g$ pe $\mathring{I}$, atunci evident $f(b) = f(b-) \geqslant g(b-) = +\infty$, absurd, deoarece $f(b) \in \mathbf{R}$.

Prin urmare există $\xi \in \mathring{I}$ a.î. $f(\xi) = g(\xi)$ adică $f(\xi) = \dfrac{1}{a - \xi} + \dfrac{1}{b - \xi}$.

5.5.34. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$ o funcție continuă a.î.*

$$f(x + y) + f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)}, \quad (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}^*,\ x \neq y.$$

Atunci f este constantă.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fixăm $x \in \mathbf{R}^*$. Evident există $n_0 \in \mathbf{N}$ a.î. $y = x + \frac{1}{n} \neq 0$, $(\forall)\ n \geq n_0$, deci

$$f\left(2x + \frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{f(x)}{f\left(x + \frac{1}{n}\right)},\ (\forall)\ n \geq n_0.$$

Funcția f fiind continuă și cu valori nenule, avem

$$\lim_{n\to\infty} f\left(2x + \frac{1}{n}\right) = f(2x),\ \lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{f\left(x + \frac{1}{n}\right)} = 1,$$

deci $l = \lim_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{n}\right)$ există, este finită și avem $f(2x) + l = 1$. Înlocuind x cu $\frac{1}{2}x$, deducem $f(x) = 1 - l$, deci f este constantă.

5.5.35. Exerciţiu. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă, cu $f(a) = f(b)$ și fie c mijlocul lui $[a, b]$. Atunci există $x_0 \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$ a.î. $f(a + x_0) = f(c + x_0)$*

Soluție. Înlocuind f cu $f - f(a)$ putem presupune că $f(a) = f(b) = 0$.

(i) Dacă $f(c) = 0$, atunci $f(a + x_0) = f(c + x_0)$ pentru $x_0 = 0$.

(ii) Dacă $f(c) \neq 0$, să punem $\varphi(x) = f(a + x) - f(c + x)$, $x \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$

Evident φ este continuă și avem:

$$\varphi(0) = f(a) - f(c) = -f(c);\ \varphi\left(\frac{b-a}{2}\right) = f(c) - f(b) = f(c).$$

Cum $f(c) \neq 0$, rezultă că $\varphi(0)\ \varphi\left(\frac{b-a}{2}\right) < 0$, deci există $x_0 \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$ a.î. $\varphi(x_0) = 0$ și deci $f(a + x_0) = f(c + x_0)$.

5.5.36. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție și $x_0 \in A$ un punct. Să presupunem că $(\forall)\ \delta > 0$. există $\varepsilon = \varepsilon(x_0, \delta) > 0$ a.î.*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon,\ (\forall)\ x \in A,\ |x - x_0| < \delta \qquad (1)$$

Rezultă numaidecît de aici că f este continuă în x_0?

Soluție. Răspunsul este negativ, dacă x_0 este neizolat.

Contraexemplu. Fie $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel:

$f(x) = 1$, dacă $x \in A \cap (x_0, \infty)$, $f(0) = 0$ și $f(1) = -1$, dacă $x \in A \cap (-\infty, x_0)$.

Atunci $|f(x) - f(x_0)| = 1$, $(\forall)\ x \in A$, $x \neq x_0$, deci $(\forall)\ \delta > 0$, funcția f satisface relația (1) pentru $\varepsilon = 1$ și evident f nu este continuă în x_0.

Observație. Condiția din enunț implică f mărginită într-o vecinătate a lui x_0.

5.5.37. Exerciţiu. *O mulțime $A \subseteq \mathbf{R}$ este interval $\Leftrightarrow$ orice funcție continuă $f : A \to \{0,1\}$ este constantă.*

Soluție. ($\Rightarrow$) Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ interval și $f : A \to \{0, 1\}$ o funcție continuă. Atunci (T.5.5.16) $f(A)$ este un interval și cum $f(A) \subseteq \{0,1\}$, avem $f(A) = \{0\}$ sau $f(A) = \{1\}$, deci f este constantă.

($\Leftarrow$) Să presupunem că A satisface proprietatea din enunț și nu este interval, deci există $a, b \in A$, $a < b$ cu $(a, b) \not\subseteq A$. Fie $c \in (a, b) \setminus A$ fixat și $f : A \to \{0, 1\}$ o funcție definită astfel $f(x) = 0$, dacă $x \in A$, $x < c$ și $f(x) = 1$, dacă $x \in A$, $x > c$. Atunci (P. 5.5.9. Cor. 3) f este continuă și cum $f(a) = 0$ și $f(b) = 1$, nu este constantă, absurd.

Prin urmare A este interval.

Observație. Proprietatea din enunț caracterizează mulțimile conexe din spații topologice (v. [41]).

5.5.38. Exercițiu. *Fie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă $x_0 \in [a, b]$ un punct și $y > f(x_0)$. Atunci există $P \in \mathbf{R}[X]$ un polinom de grad 2 a.î. $P(x_0) < y_0$ și $f(x) < P(x)$, $(\forall)$ $x \in [a, b]$.*

Ind. Dacă facem o translație putem presupune că $x_0 = 0$ și $f(x_0) < 0 < y_0$. Fie $\sup f([a, b]) < M < \infty$ fixat. Deoarece $f(0) < 0$ și f continuă, există $\delta > 0$ a.î. $f(x) < 0$, $(\forall)$ $x \in [-\delta, \delta] \cap [a, b]$. Fie polinomul $P(x) = \frac{M}{\delta^2} x^2$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci avem : $f(x) < 0 < P(x)$, $(\forall)$ $x \in [-\delta, \delta] \cap [a, b]$, $f(x) < M \leqslant P(x)$, $(\forall)$ $x \in [a, b] \setminus [-\delta, \delta]$ și $P(x_0) = 0 < y_0$.

5.5.39. Exercițiu. *Să se determine funcțiile continue $f : (-1, 1) \to \mathbf{R}$ care satisfac relația :*

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x + y}{1 + xy}\right), \quad (\forall)\ x, y \in (-1, 1).$$

Soluție. Fie $g : \mathbf{R} \to (-1, 1)$ funcția tangenta hiperbolică (Ap. 1.19.) și $h = f \circ g$. Atunci avem relația :

$$h(x) + h(y) = f\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) + f\left(\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\right) =$$

$$= f\left(\frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{e^{x+y} + e^{-x-y}}\right) = h(x + y), \quad (\forall)\ x, y \in \mathbf{R},$$

deci (P. 5.6.15.) $h(x) = cx$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow f(x) = h \circ g^{-1}(x)$, $(\forall)$ $x \in (-1, 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{c}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \quad (\forall)\ x \in (-1, 1).$$

5.5.40. Exercițiu (N. Ciorănescu). *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ funcție continuă cu proprietatea că $f(a) = f(b) \neq f(x)$, $(\forall)$ $x \in (a, b)$. Atunci $(\forall)$ $0 < d < b - a$ există $x_1, x_2 \in [a, b]$ a.î. $x_2 - x_1 = d$ și $f(x_1) = f(x_2)$.*

Ind. Cf. ipotezei avem spre exemplu $f(x) > f(a)$, $(\forall)$ $x \in (a, b)$. Considerăm funcția $\varphi(x) = f(x) - f(x + d)$, $x \in [a, b - d]$. Atunci avem :

$$\varphi(a) = f(a) - f(a + d) < \varepsilon \text{ și } \varphi(b) - [d] = f(b - d) - f(b) > 0,$$

deci există $x_1 \in (a, b - d)$ cu $\varphi(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_1 + d)$.

Observație. Dacă omitem condiția $f(x) \neq f(a)$, $(\forall)$ $x \in (a, b)$, Ex. 5.5.40. nu este numaidecît adevărat.

Contraexemplu. $f(x) = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ și $d = \frac{3\pi}{2}$.

5.5.41. Exercițiu. *Fie $0 < c < 1$, $A = [0, 1] \cap \mathbf{Q}$ și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel : $f(x) = 0$, dacă $x \in [0, c] \cap \mathbf{Q}$ și $f(x) = 1$, dacă $x \in (c, 1) \cap \mathbf{Q}$. Atunci f este continuă $\Leftrightarrow c \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}$.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție ($\Rightarrow$) Presupunem f continuă pe A și $c \in \mathbf{Q}$. Atunci f este continuă în c. Cum $f(c-) = 0$, $f(c+) = 1$ și $f(c) = 0$, obținem o contradicție. Rămîne că $c \in [0,1] \setminus Q$.

($\Leftarrow$) Precupunem $c \in [0, 1] \setminus \mathbf{Q}$. Funcția $f_{|[0,c) \cap \mathbf{Q}}$ fiind constantă este continuă, deci f este continuă pe $[0, c) \cap \mathbf{Q}$. Analog rezultă că f este continuă pe $(c, 1] \cap \mathbf{Q}$ și deci f este continuă pe $[0, 1] \cap \mathbf{Q}$.

5.5.42. Exercițiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f, g : A \to \mathbf{R}$ două funcții cu proprietățile: 1° g este continuă; 2° $(\forall)\ x \in A$ și V o vecinătate a lui x, există $x_1 \in A \cap V$ a.î. $f(x_1) = g(x_1)$. Atunci $f = g$.*

Ind. Fie $x_0 \in A$ fixat și $h = f(x_0) - g$. Dacă $f(x_0) \neq g(x_0)$, atunci $h(x_0) \neq 0$, spre exemplu $h(x_0) > 0$, deci h fiind continuă există V o vecinătate a lui x_0 a.î. $h(x) > 0$, $(\forall)\ x \in A \cap V \Leftrightarrow f(x) \neq g(x)$, $(\forall)\ x \in A \cap V$, absurd.

Observație. Dacă g nu este continuă Ex.5.5.42.nu este numaidecît adevărat.

Contraexemplu. Fie $A = \mathbf{R}$, $f = 1$ și g funcția lui Dirichlet. Atunci $(\forall)$ $x_0 \in \mathbf{R}$ și V o vecinătate a lui x_0, avem $f(x) = g(x)$, $(\forall)\ x \in V \cap \mathbf{Q}$ și totuși $f \neq g$.

5.5.43. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietățile: 1° $f \circ f = \mathbf{1}_{\mathbf{R}}$; 2° f nu posedă puncte fixe. Atunci $(\forall)\ a \in \mathbf{R}$ între a și $f(a)$ funcția f are cel puțin un punct de discontinuitate.*

Soluție. Fie $a \in \mathbf{R}$ fixat. Din 2° avem $f(a) \neq a$, deci $f(a) < a$ sau $a < f(a)$; fie spre exemplu primul caz. Presupunem f continuă pe intervalul $[f(a), a]$ și fie $\varphi(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci φ este continuă pe intervalul $[f(a), a]$ și avem $\varphi(f(a)) = ff(a) - f(a) = a - f(a) > 0$, $\varphi(a) = f(a) - a < 0$, deci există $c \in (f(a), a)$ cu $\varphi(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$, absurd.

Observație. Există funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietățile 1° și 2°.

5.5.44. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval deschis și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție care are limite laterale în fiecare punct. Atunci f este continuă $\Leftrightarrow (\forall)\ \lambda \in \mathbf{R}$ funcția $\max\{f, \lambda\}$ este continuă.*

Soluție. Implicația ($\Rightarrow$) este evidentă.

($\Leftarrow$) Fie $x_0 \in I$ fixat și $l_s = f(x_0-)$. Presupunem că $l_s \neq f(x_0)$, spre exemplu $l_s < f(x_0)$ și fie $l_s < \lambda < f(x_0)$ fixat. Atunci există $\delta > 0$ a.î.

$$f(x) < \lambda,\ (\forall)\ x \in V^- = (x_0 - \delta,\ x_0) \cap I.$$

Evident $g(x) = \max\{f(x), \lambda\} = \lambda$, $(\forall)\ x \in V^-$, deci $\lim\limits_{x \nearrow x_0} g(x) = \lambda$. Cum $g(x_0) = \max\{f(x_0), \lambda\} = f(x_0) > \lambda$, rezultă că g este discontinuă în x_0, absurd.

Așadar $f(x_0-) = f(x_0)$ și analog $f(x_0+) = f(x_0)$ deci f este continuă în x_0.

5.5.45. Exercițiu. *Să se determine funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care satisfac condiția:*

$$xf(y) + yf(x) = (x + y) f(x)\ f(y),\ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R} \qquad (1)$$

Să se arate că printre aceste funcții se găsesc numai două funcții continue.

Soluție. Funcția $f = 0$ satisface evident condiția (1) și este continuă. Fie $f \neq 0$. Presupunem că $(\exists)\ x_0 \neq 0$ cu $f(x_0) = 0$. Atunci din (1) avem $x_0 f(y) = 0$, $(\forall)\ y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow f = 0$, absurd. Rămîne că $f(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}^*$.

Punem în (1) $y = x$ și obținem $2xf(x) = 2xf^2(x)$, deci $f(x) = f^2(x)$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}^*$ și deci $f(x) = 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}^*$.

Atunci relația (1) este verificată pentru f definită arbitrar în 0. Așadar funcția căutată este: $f(x) = 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}^*$ și $f(0) = \lambda$, λ real arbitrar; f este continuă $\Leftrightarrow \lambda = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

5.5.46. Exerciţiu. *O funcţie f este constantă, dacă satisface una din condiţiile următoare:*

1° $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ *este continuă în* 1 *şi* $f(x)=f(x^2)$, $(\forall)\ x\in(0,\infty)$;

2° $f:[0,1)\to\mathbf{R}$ *este continuă în* 0 *şi* $f(x)=f(x^2)$, $(\forall)\ x\in[0,1)$;

3° $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ *este continuă în* 0, *în* 1 *şi* $f(x)=f(x^2)$, $(\forall)\ x\in[0,\infty)$

Soluţie 1° Fie $x>0$ fixat. Atunci evident $f(x)=f(\sqrt{x})$, deci prin inducţie relativ la n avem: $f(x)=f(\sqrt[2^n]{x})$, $(\forall)\ n\geqslant 1$.

Evident însă $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{x}=1$, deci f fiind continuă în 1, avem $\lim\limits_{n\to\infty}f(\sqrt[2^n]{x})=f(1)$.

Cum $f(\sqrt[2^n]{x})=f(x)$, $(\forall)\ n\geqslant 1$, rezultă că $f(x)=f(1)$.

2° Fie $x\in(0,1)$ fixat. Atunci evident avem $f(x)=f(x^2)=\ldots f(x^{2^n})$, $(\forall)\ n\geqslant 1$. Şi deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^n}=0$ şi f continuă în 0, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}f(x^{2^n})=f(0)$, deci $f(x)=f(0)$.

3° se deduce din 1° şi 2°.

5.5.47. Exerciţiu. *Fie* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcţie continuă a.î.* $f\left(r+\frac{1}{n}\right)=f(r)$, $(\forall)\ r\in\mathbf{Q}$ *şi* $n\in\mathbf{N}$. *Atunci f este constantă.*

Soluţie. Evident avem $f\left(r+\frac{2}{n}\right)=f\left(r+\frac{1}{n}\right)=f(r)$, deci

$$f\left(r+\frac{m}{n}\right)=f(r),\ (\forall)\ n,\ m\geqslant 1,\ (\forall)\ r\in\mathbf{Q}$$

Punînd aici $r=0$ resp. $r=-\frac{m}{n}$, unde $m,\ n\geqslant 1$, obţinem:

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f(0)=f\left(-\frac{m}{n}\right)\Leftrightarrow f(r)=f(0),\ (\forall)\ r\in Q$$

Fie $x_0\in\mathbf{R}$ fixat şi $r_n\in\mathbf{Q}$ a.î. $r_n\to x_0$. Deoarece f este continuă, avem $f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(r_n)=f(0)$, deci f este constantă.

5.5.48. Exerciţiu. *Fie* $P\in\mathbf{R}[X]$ *un polinom de grad* $n\geqslant 1$. *Atunci există cel puţin un punct şi cel mult n puncte* $x_0\in\mathbf{R}$ *cu proprietatea* $|P(x_0)|\leqslant|P(x)|$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$.

Soluţie. Funcţia $f(x)=|P(x)|$, $x\in\mathbf{R}$, este continuă şi $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$. Evident există $a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$ a.î. f este strict descrescătoare, (resp. strict crescătoare) pe $(-\infty,a)$ (resp. (b,∞)), deci avem $\inf\limits_{x\in\mathbf{R}}f(x)=\inf\limits_{\in[a,b]}f(x)$. Fie $x_0\in[a,b]$ cu $f(x_0)\leqslant f(x)$, $(\forall)\ x\in[a,b]$. Atunci avem:

$$|P(x_0)|\leqslant|P(x)|,\ (\forall)\ x\in\mathbf{R} \tag{1}$$

Ecuaţia $P(x)=\lambda$ avînd cel mult n soluţii reale, pentru $(\forall)\ \lambda\in\mathbf{R}$, rezultă imediat că există cel mult n puncte x_0 în $\mathbf{R}$ cu proprietatea (1).

5.5.49. Exerciţiu. *Fie* $I\subseteq\mathbf{R}$ *un interval şi* $f_1,f_2,f:I\to\mathbf{R}$ *trei funcţii continue a.î.* $f_1\leqslant f_2$ *şi* $G_f\cap G_{f_i}\neq\emptyset$ $(i=\overline{1,2})$. *Atunci* $(\forall)\ g:I\to\mathbf{R}$ *o funcţie continuă cu* $f_1\leqslant g\leqslant f_2$ *rezultă că* $G_f\cap G_g\neq\emptyset$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Prin ipoteză există $x_i \in I$ $(i = \overline{1,2})$ a.î. $f(x_i) = f_i(x_i)$ Atunci avem :

$$g(x_1) \geqslant f_1(x_1) = f(x_1),\ g(x_2) \leqslant f_2(x_2) = f(x_2)$$

deci

$$(f - g)(x_1) \leqslant 0,\ (f - g)(x_2) \geqslant 0$$

și deci $f - g$ fiind continuă, există x^* cuprins între x_1 și x_2 cu $(f - g)(x^*) = 0 \Leftrightarrow G_f \cap G_g \neq \emptyset$.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f_1, f_2, g : I \to \mathbf{R}$ trei funcții continue a.î. $f_1 \leqslant g \leqslant f_2$. Dacă f_1 și f_2 posedă fiecare un punct fix, atunci g posedă un punct fix.*

Soluție. Fie funcția $f(x) = x$, $x \in I$. Atunci $f_i (i = 1,2)$ posedă un punct fix $\Leftrightarrow G_f \cap G_{f_i} \neq \emptyset$, deci $G_g \cap G_f \neq \emptyset$ și deci g posedă un punct fix.

Corolar 2. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f_1, f_2 : I \to \mathbf{R}$ două funcții continue care posedă fiecare un punct fix. Atunci $(\forall)\ \lambda \in (0,1)$ funcția $\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2$ posedă un punct fix.*

Observație. Dacă $f_1 \leqslant f_2$ și $f_1 \neq f_2$, atunci nu orice funcție continuă $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$ se poate scrie sub forma $\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2$ cu $0 < \lambda < 1$.

5.5.50. Exercițiu. *Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < b < c$ și $f : (a, b) \cup (b, c) \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea că $f_{|(a,b)}$ și $f_{|(b,c)}$ sînt monoton crescătoare (resp. descrescătoare). Atunci f este monoton crescătoare (resp. descrescătoare) $\Leftrightarrow f(b-) \leqslant f(b+)$ (resp. $f(b-) \geqslant f(b+)$).*

Soluție. Deoarece $f_{|(a,b)}$ și $f_{|(b,c)}$ sînt monoton crescătoare rezultă (T.5.5.18.) că $f(b-)$ și $f(b+)$ există.

($\Rightarrow$) Dacă f este monoton crescătoare avem :

$$f(x) \leqslant f(y),\ (\forall)\ x \in (a, b) \wedge y \in (b, c),$$

deci

$$f(b-) = \sup_{x \in (a,b)} f(x) \leqslant \inf_{y \in (b,c)} f(y) = f(b+)$$

($\Leftarrow$) Dacă $f(b-) \leqslant f(b+)$, atunci avem :

$$f(x) \leqslant f(b-) \leqslant f(b+) \leqslant f(y),\ (\forall)\ x \in (a, b) \wedge y \in (b, c),$$

deci f este monoton crescătoare.

Corolar 1. *Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < b < c$ și $f : (a, c) \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea că $f_{|(a,b)}$ și $f_{|(b,c)}$ sînt monoton crescătoare (resp. descrescătoare). Atunci 1° f este monoton crescătoare (resp. descrescătoare) $\Leftrightarrow f(b-) \leqslant f(b) \leqslant f(b+)$ (resp. $f(b-) \geqslant f(b) \geqslant f(b+)$); 2° Dacă f este continuă în b, rezultă că f este monoton crescătoare (resp. descrescătoare) pe (a, c).*

5.5.51. Exercițiu. *Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții astfel încît f este continuă și g este monotonă. Atunci $f = g \Leftrightarrow (\exists)\ A$ densă în $\mathbf{R}$ cu proprietatea că $f(x) = g(x)$, $(\forall)\ x \in A$.*

Soluție ($\Leftarrow$) Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ și $\varepsilon > 0$ fixați. Funcția f fiind continuă $(\exists)\ \eta > 0$ a.î.

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon,\ (\forall)\ x \in (x_0 - \eta,\ x_0 + \eta)$$

Cum $\bar{A} = \mathbf{R}$, există $a, b \in A$ cu $x_0 - \eta < a < x_0 < b < x_0 + \eta$.

Funcția g fiind monotonă, spre exemplu monoton crescătoare, avem $g(a) \leqslant g(x_0) \leqslant g(b)$. Însă $f(a) = g(a)$ și $f(b) = g(b)$, deci

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(a) = g(a) \leqslant g(x_0) \leqslant g(b) = f(b) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$$

și deci $|f(x_0) - g(x_0)| \leqslant \varepsilon$, de unde deducem că $f(x_0) = g(x_0)$ etc.

Scanned with OKEN Scanner

5.5.52. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime. Atunci A este interval compact $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\forall)\ f : A \to A$ continuă, rezultă că f posedă cel puţin un punct fix.*

Soluţie. Implicaţia ($\Rightarrow$) rezultă din Ex. 5.5.25.

($\Leftarrow$) Fie $a, b \in A$, $a < b$ şi $c \in (a, b)$. Să presupunem că $c \notin A$ şi $f : A \to A$ o funcţie definită astfel : $f(x) = b$ dacă $x \in A \cap (-\infty, c)$ şi $f(x) = a$ dacă $x \in A \cap (c, \infty)$. Evident f este continuă şi nu are puncte fixe absurd. Rămîne că $(a, b) \subseteq A$, deci A este interval (P.2.2.13.).

Presupunem că $\sup A = \infty$ şi fie $f : A \to A$ o funcţie definită astfel $f(x) = x + \lambda$, unde $\lambda > 0$ şi $\lambda > \inf A$. Este clar că f este continuă şi f nu posedă puncte fixe, absurd. Rămîne că $b = \sup A < \infty$ şi analog $a = \inf A > -\infty$, deci A este un interval mărginit.

Dacă $a \notin A$ funcţia $f : A \to A$ definită astfel $y = a + m(x - a)$ $(0 < m < 1)$ este continuă şi nu are puncte fixe, absurd. Aşadar $a \in A$ şi analog $b \in A$, deci $A = [a, b]$, prin urmare A este interval compact.

5.5.53. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime şi $\varphi : A \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită. Atunci $(\forall) x_0 \in A$ funcţia $f(x) = (x - x_0)\varphi(x)$, $x \in A$ este continuă în x_0.*

Soluţie. Dacă x_0 este punct izolat în A, atunci f este continuă în x_0. Dacă x_0 este neizolat, atunci (T.5.5.6.) :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)\varphi(x) = 0 = f(x_0),$$

deci f este continuă în x_0.

5.5.54. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ şi $\lim_{x \to \infty} f(x)$ există şi sînt egale. Atunci $(\forall)\ d > 0$ există $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ a.î. $x_1 - x_2 = d$ şi $f(x_1) = f(x_2)$.*

Soluţie. Considerăm funcţia $\varphi(x) = f(x) - f(x + d)$, $x \in \mathbf{R}$. Evident φ este continuă. Dacă $\varphi(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, atunci $\varphi > 0$ sau $\varphi < 0$, fie spre exemplu $\varphi > 0$, deci $f(x + d) < f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ De aici deducem

$$f(nd) < f(d) < f(0) < f(-nd),\ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

de unde prin trecere la limită, $n \to \infty$, obţinem :

$$l = \lim_{n \to \infty} f(nd) \leqslant f(d) < f(0) \leqslant \lim_{n \to \infty} f(-nd) = l,$$

absurd. Aşadar există $x_1 \in \mathbf{R}$ cu $\varphi(x_1) = 0$, deci $f(x_1) - f(x_1 + d) = 0$. Punem $x_2 = x_1 + d$.

5.5.55. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Dacă f admite un punct de extrem local şi numai unul singur, atunci acel punct este punct de extrem.*

Soluţie. Presupunem că $c \in \overset{\circ}{I}$ este unicul extrem local al lui f, spre exemplu minim. Atunci $(\exists)\ \delta > 0$ cu $(c - \delta, c + \delta) \leqslant I$ şi $f(c) \leqslant f(x)$, $(\forall)\ x \in (c - \delta, c + \delta)$. Fie $x \in I \setminus \{c\}$ fixat, spre exemplu $x < c$. Deoarece, evident, f nu este constantă pe $[c - \delta, c]$, deci nici pe $[x, c]$, există $a \in [x, c]$ cu $f(a) > f(c)$. Dacă $f(x) \leqslant f(c)$, atunci f şi-ar atinge maximul pe $[x, c]$ într-un punct $x_0 \in (x, c)$, deci x_0 ar fi maxim local, absurd. Rămîne că $f(x) > f(c)$, deci c este punct de minim.

5.5.56. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $\lim_{|x| \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Atunci funcţia $g = \mathbf{1}_{\mathbf{R}} + f$, este surjectivă.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $y \in \mathbf{R}$ fixat și $h_y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $h_y(x) = y - f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Evident $\lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{h_y(x)}{x} = 0$, deci există $a > 0$ a.î. $|h_y(x)| \leqslant |x|$, $(\forall)|x| \geqslant a$. Cum h_y este continuă ea este mărginită pe intervalul $[-a, a]$, deci există $b > 0$ cu $|h_y(x)| < b$, $(\forall)\ x \in [-a, a]$. Fie $c \geqslant \max\{a, b\}$. Atunci avem $h_y([-c, c]) \subseteq [-c, c]$, deci (Ex. 5.5.25.) există $x_0 \in [-c, c]$ cu proprietatea că $h_y(x_0) = x_0$ adică $y - f(x_0) = x_0$ și deci $y = g(x_0)$. Prin urmare g este surjectivă.

5.5.57. Exercițiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A \cap A'$ un punct și $f, g : A \to \mathbf{R}$ două funcții care au proprietatea : $(\forall)\ x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$, avem $f(x_n) \leqslant g(x_n)$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$ sau $f(x_n) \geqslant g(x_n)$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$. Atunci f și g sînt continue în $x_0 \Leftrightarrow$ funcțiile $s = f + g$ și $p = fg$ sînt continue în x_0.*

Soluție. Implicația ($\Rightarrow$) este evidentă.

($\Leftarrow$) Fie $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$ fixați și să presupunem că $f(x_n) \leqslant g(x_n)$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$. Pentru orice $n \geqslant n_0$ soluțiile ecuației $t^2 - s(x_n)t + p(x_n) = 0$ sînt $f(x_n)$ și $g(x_n)$, deci cum $f(x_n) \leqslant g(x_n)$, rezultă relațiile :

$$f(x_n) = \frac{s(x_n) - \sqrt{s^2(x_n) - 4p(x_n)}}{2};\quad g(x_n) = \frac{s(x_n) + \sqrt{s^2(x_n) - 4p(x_n)}}{2}$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \frac{s(x_0) - \sqrt{s^2(x_0) - 4p(x_0)}}{2} = f(x_0)$$

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \frac{s(x_0) + \sqrt{s^2(x_0) - 4p(x_0)}}{2} = g(x_0)$$

Prin urmare f și g sînt continue în x_0.

Observație. Proprietatea din enunț este îndeplinită dacă $f \leqslant g$ sau $f \geqslant g$ pe o vecinătate punctată a lui x_0

5.5.58. Exercițiu [45]. *Fie $a, b \in \mathbf{R}_+^*$, $a < b$ și $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție subaditivă a.î. $f(t)/t < 1$, $(\forall)\ t \in (a, b)$. Atunci $\sup\limits_{t\in[a,b]} f(t)/t < 1$.*

Soluție. Presupunem că $M = \sup\limits_{n\to\infty} f(t)/t = 1$ și fie $t_n \in [a, b]$ cu proprietatea că $f(t_n)/t_n \to 1$. Mulțimea $[a, b]$ fiind compactă, putem presupune că șirul $(t_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent ; fie $\theta = \lim\limits_{x\in[a,b]} t_n$. Considerăm funcția $g(t) = t - f(t)$, $t \in [a, b]$. Din ipoteză rezultă că $g(t) > 0$, $(\forall)\ t \in [a, b]$. Funcția f fiind subadivă, $(\forall)\ s, t \in [a, b]$, $t > s$, avem :

$$f(t) = f(t - s + s) \leqslant f(t - s) + f(s),$$

deci

$$t - f(t) \geqslant (t - s - f(t + s)) + (s - f(s))$$

adică

$$g(t) \geqslant g(t - s) + g(s)$$

și deci

$$g(t) - g(s) \geqslant g(t - s) > 0,$$

de unde deducem că g este strict crescătoare. Atunci

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{f(t_n)}{t_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{t_n - f(t_n)}{t_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} g(t_n)}{0} \geqslant \frac{g(a)}{0} > 0,$$

absurd, prin urmare $M < 1$.

5.5.59. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval arbitrar de capete a şi b şi $f : I \to \mathbf{R}$ o fnucţie continuă cu proprietatea că $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\nearrow b} f(x)$ există şi sînt egale între ele. Atunci f îşi atinge maximul sau minimul pe I.*

Soluţie. Fie $m = \inf f(I)$, $M = \sup f(I)$ şi $l = f(a+) = f(b-)$. Dacă $m = M$, atunci f este constantă şi afirmaţia este evidentă.

Presupunem $m < M$. Evident $m \leqslant l \leqslant M$, deci $m < l$ sau $l < M$; spre exemplu $l < M$. Fie V o vecinătate a lui l care nu conţine pe M. Cum $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) < M$ şi $\lim\limits_{x\nearrow b} f(x) < M$, există $[c, d] \subseteq I$ a.î. $f(x) \in V$, $(\forall)\ x \in (a.c)$ şi $f(x) \in V$, $(\forall)\ x \in (d, b)$, deci $f(x) < M$, $(\forall) x \in (a, c) \cup (d, b)$. Atunci $\sup f(I) = \sup f([c, d])$. Din T. 5.5.17. Cor. 1 rezultă că există $x_0 \in [c, d]$ a.î. $\sup f([c, d]) = f(x_0)$, deci există $x_0 \in I$ a.î. $\sup f(I) = f(x_0)$.

Observaţie. Dacă $l < M$, atunci f îşi atinge maximul, iar dacă $m < l$, atunci f îşi atinge minimul, într-un punct din I.

Corolar 1. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă a.î. $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = -\infty$ (resp. $+\infty$). Atunci f îşi atinge maximul (resp. minimul) într-un punct din $\mathbf{R}$.*

5.5.60. Exerciţiu. *Fie $f : (0,1] \to [-1, 1]$ o funcţie a.î. $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 0$. Atunci există două funcţii $f_1, f_2 : [0, 1] \to [-1, 1]$ cu proprietăţile : 1° f_1, f_2 continue; 2° $f_1(0) = f_2(0) = 0$; 3° $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$; 4° f_1 monoton descrescătoare şi f_2 monoton crescătoare.*

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 0$, pentru $0 < \varepsilon < 1$ există $0 < \delta < 1$ a.î. $|f(x)| \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ x \in (0, \delta]$. Aşadar există $\delta_n \to 0$ cu $0 < \delta_{n+1} < \delta_n < 1$ a.î. $|f(x)| \leqslant \frac{1}{n}$, $(\forall)\ x \in (0, \delta_{n-1}]$, $(\forall)\ n \geqslant 2$.

Construim $f_2 : [0, 1] \to [-1, 1]$ o funcţie continuă definită astfel : $f_2(0) = 0$, $f_2(1) = 1$, $f_2(\delta_n) = \frac{1}{n}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ şi f_2 afină pe fiecare interval $[\delta, 1]$ şi $[\delta_{n+1}, \delta_n]$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ (fig. 12).

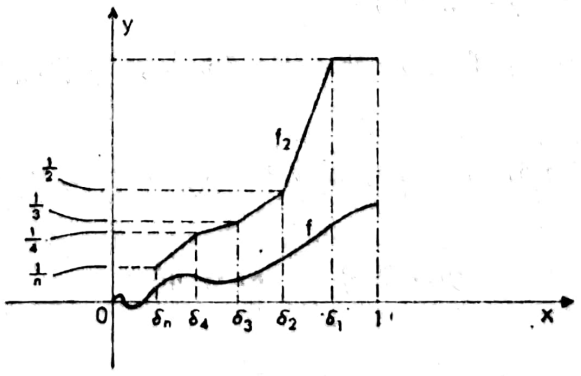


Fig. 12

Scanned with OKEN Scanner

Este evident că funcţiile $f_1 := -f_2$ şi f_2 satisfac condiţiile din enunţ.

5.5.61. Exerciţiu. *Fie* $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie periodică şi neconstantă. Atunci* f *nu admite limite la* $+\infty$ *şi* $-\infty$.

Soluţie. Deoarece φ este periodică există $T > 0$ a.î.

$$\varphi(x + T) = \varphi(x), \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Cum φ nu este constantă există $a, b \in [0, T]$ a.î. $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.

Dacă punem $x_n = a + nT$, $y_n = b + nT$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, atunci evident şirurile $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $(y_n)_{n\geqslant 1}$ au limita $+\infty$ şi avem:

$$\varphi(x_n) = \varphi(a), \ \varphi(y_n) = \varphi(b), \ (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(a)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(y_n) = \varphi(b) \neq \varphi(a)$, prin urmare $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)$ nu există.

Corolar 1. *Dacă* $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *este periodică şi neconstantă, atunci funcţia* $x \mapsto \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in \mathbf{R}^*$ *nu are limite laterale în* $x = 0$.

Corolar 2. *Fie* $f, \varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *unde* φ *este periodică neconstantă şi* $f(x) = x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, *dacă* $x \in \mathbf{R}^*$ *şi* $f(0) = 0$. *Atunci* f *nu admite derivate laterale în* 0.

Soluţie. Evident avem $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, $(\forall)\ x \neq 0$. Cum $\lim\limits_{x\searrow 0} \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ nu există avem că $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ nu există, deci $f'_d(0)$ nu există.

Analog se arată că $f'_s(0)$ nu există.

5.5.62. Exerciţiu. *Fie* $f : I = (0, 1) \to \mathbf{R}$ *o funcţie cu proprietatea lui Darboux şi* $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *două şiruri din* I, *convergente la* 0, *a.î.* $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ *şi* $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$ *există. Dacă* $\alpha < \gamma < \beta$, *atunci există şirul* $(c_n)_{n\geqslant 1}$ *din* I, *convergent la* 0, *a.î.* $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n) = \gamma$.

Soluţie. Fie $0 < \varepsilon < \min\{\gamma - \alpha, \beta - \gamma\}$ fixat. Există atunci $n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î. $|f(a_n) - \alpha| < \varepsilon$ şi $|f(b_n) - \beta| < \varepsilon$, $(\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$. Evident $\gamma \in [f(a_n), f(b_n)]$, $(\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$.

Să definim şirul $(c_n)_{n\geqslant 1}$ din I astfel $c_1, c_2, \ldots, c_{n_\varepsilon}$ arbitrar, iar pentru $n \geqslant n_\varepsilon$ fie $c_n \in [a_n, b_n]$ a.î. $f(c_n) = \gamma$. Acest lucru este posibil deoarece f are proprietatea lui Darboux. Evident $c_n \to 0$ şi $f(c_n) \to \gamma$.

5.5.63. Exerciţiu. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie cu proprietatea lui Darboux a.î.* $|f|$ *este continuă. Atunci* f *este continuă.*

Soluţie. Fie $x_0 \in I$ cu $f(x_0) = 0$ şi $x_n \in I$ a.î. $x_n \to x_0$. Funcţia $|f|$ fiind continuă în x_0 avem: $|f(x_0)| \to |f(x_0)| = 0$, deci $f(x_n) \to f(x_0)$ şi deci f continuă în x_0. Fie acum $x_0 \in I$ cu $|f(x_0)| > 0$, spre exemplu $f(x_0) > 0$.

Cum $|f|(x_0) > 0$ şi $|f|$ continuă în x_0 există V o vecinătate a lui x_0, a.î. $|f(x)| \geqslant \frac{1}{2} f(x_0) > 0$, $(\forall)\ x \in I \cap V$.

Însă f are proprietatea lui Darboux şi nu se anulează pe intervalul $J = I \cap V \subseteq I$, deci f păstrează un semn constant pe J. Deoarece $f(x_0) > 0$,

avem că $f(x) > 0$, $(\forall)\ x \in J$, adică $|f(x)| = f(x)$, $(\forall)\ x \in J$ de unde deducem că f este continuă în x_0.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea lui Darboux. Atunci f este continuă $\Leftrightarrow |f|$ este continuă.*

5.5.64. Exercițiu. *Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții periodice a.î. $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - g(x)] = 0$. Atunci $f = g$.*

Soluție. Funcțiile f și g fiind periodice există T, $T' > 0$ a.î.

$$f(x + T) = f(x) \text{ și } g(x + T') = g(x),\ (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

Notăm $f - g$ cu h. Atunci cf. ipotezei avem:

$$\lim_{n\to\infty} h(x + nT) = \lim_{n\to\infty} h(x + nT') = \lim_{n\to\infty} h(x + nT + nT') = 0,\ (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

Evident avem identitatea:

$$h(x) = h(x + nT) - h(x + nT + nT') + h(x + nT'),\ (\forall) x \in \mathbf{R} \text{ și } n \in \mathbf{N}.$$

Fixăm $x \in \mathbf{R}$ și trecem cu n la limită, $n \to \infty$, obținem $h(x) = 0$. Prin urmare $h = 0$ adică $f = g$.

Generalizare. Fie $f_1, f_2, \ldots, f_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, k funcții periodice a.î.

$$\lim_{x\to\infty} [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)] = 0. \text{ Atunci } f_1 + f_2 + \ldots + f_k = 0.$$

Soluție. Pentru simplificare vom presupune $k = 3$. Funcțiile f_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, fiind periodice, există $T_i > 0$ a.î. $f_i(x + T_i) = f_i(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ și $1 \leqslant i \leqslant 3$. Notăm $f_1 + f_2 + f_3$ cu h. Atunci $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ și $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, cf. ipotezei avem:

$$\lim_{n\to\infty} h(x + nT_i) = \lim_{n\to\infty} h(x + nT_i + nT_j) = \lim_{n\to\infty} h(x + nT_1 + nT_2 + nT_3) = 0$$

Se vede imediat însă că:

$$h(x) = [h(x + nT_1) + h(x + nT_2) + h(x + nT_3)] - [h(n + nT_1 + nT_2) +$$

$$+ h(n + nT_2 + nT_3) + h(x + nT_3 + nT_1)] - h(x + nT_1 + nT_2 + nT_3),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \text{ și } n \in \mathbf{N}.$$

Fixăm $x \in \mathbf{R}$ și trecem cu n la limită, $n \to \infty$, obținem $h(x) = 0$. Prin urmare, $x \in \mathbf{R}$ fiind arbitrar, rezultă $h = 0$.

Corolar 1. *Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții periodice a.î. $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - g(x)]$ există și este finită. Atunci $f - g = k$ (constantă).*

Corolar 2. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție periodică a.î. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Atunci $f = 0$.*

5.5.65. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea lui Darboux. Atunci f este continuă $\Leftrightarrow (\forall)\ a \in \mathbf{R}$ mulțimea $f^{-1}(\{a\})$ este închisă.*

Soluție. ($\Rightarrow$) Fie $a \in \mathbf{R}$ fixat și $A := f^{-1}(\{a\})$. Dacă $x_n \in A$ și $x_n \to x \in \mathbf{R}$, atunci $a = f(x_n) \to f(x)$, deci $a = f(x)$ și deci $x \in f^{-1}(\{a\})$, prin urmare A este închisă.

($\Leftarrow$) Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ fixat. Presupunem f discontinuă în x_0. Atunci $(\exists)$ $\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall)\ n \geqslant 1$ $(\exists)\ x_n \in \mathbf{R}$, $|x_n - x_0| \leqslant \dfrac{1}{n}$ și $|f(x_n) - f(x_0)| \geqslant 2\varepsilon$ (1).

Scanned with OKEN Scanner

Din (1) există un subșir al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$, să-l notăm la fel, cu proprietatea $f(x_n) \geq f(x_0) + 2\varepsilon$, $(\forall)\ n \geq 1$ sau $f(x_n) \leq f(x_0) = 2\varepsilon$, $(\forall)\ n \geq 1$. Presupunem îndeplinită prima condiție. Atunci avem:

$$(\forall)\ n \geq 1\ f(x_n) > f(x_0) + \varepsilon > f(x_0),$$

deci f având propr. Darboux, $(\forall)\ n \geq 1\ (\exists)\ y_n \in \mathbf{R}$, y_n cuprins între x_0 și x_n cu $f(y_n) = f(x_0) + \varepsilon$, deci $y_n \in f^{-1}(\{f(x_0) + \varepsilon\})$. Cum evident $y_n \to x_0$ (deoarece $|y_n - x_0| \leq |x_n - x_0| \to 0$) și mulțimea $f^{-1}(f(x_0) + \varepsilon)$ este, cf. ipotezei, închisă, avem $x_0 \in f^{-1}(f(x_0) + \varepsilon)$, deci $f(x_0) = f(x_0) + \varepsilon$, absurd. Rămîne că f este continuă în x_0, deci pe $\mathbf{R}$.

Corolar 1. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea lui Darboux. Dacă $(\forall)$ $a \in \mathbf{R}$ mulțimea $f^{-1}(\{a\})$ este finită, atunci f este continuă.*

Observație. Mulțimile de forma $f^{-1}(a)$ cu $a \in \mathbf{R}$ fixat se numesc mulțimi *de nivel* ale lui f. Ex. 5.5.65. afirmă că o funcție f cu P.D. pentru care mulțimile de nivel sînt închise, este continuă. Evident putem lua a dintr-o mulțime densă în $\mathbf{R}$.

5.5.66. Exercițiu. *Fie $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $|f(\pm 1)| < 1$ și fie $g(x) = x + f(x)$, $(\forall)\ x \in [-1, 1]$. Atunci 0 este punct interior al mulțimii $g([-1, 1])$.*

Soluție. Avem $g(1) = 1 + f(1) > 0$ și $g(-1) = -1 + f(-1) < 0$. Evident există $\varepsilon > 0$ cu proprietatea

$$1 + f(1) - c > 0; \quad -1 + f(-1) - c < 0, \ (\forall)\ |c| < \varepsilon$$

Fixăm c cu $|c| < \varepsilon$. Atunci $g(1) - c > 0$, $g(-1) - c < 0$ deci, funcția $g - c$ fiind continuă, există $x = x(c) \in (-1, 1)$ a.î. $g(x) - c = 0$ și deci $c = g(x) \in g([-1, 1])$. De aici deducem că $(-\varepsilon, \varepsilon) \in g([-1, 1])$ deci 0 aparține interiorului mulțimii $g([-1,1])$.

5.5.67. Exercițiu. *Fie $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție cu $f(0) > 0$ și $f(1) < 0$. Dacă există o funcție continuă $g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ a.î. $f + g$ este monoton crescătoare, atunci există $x_0 \in [0, 1]$ cu $f(x_0) = 0$.*

Soluție. Fie $A = \{x \in [0,1];\ f(x) \geq 0\}$, $x_0 = \sup A$ și $h = f + g$. Deoarece h este monoton crescătoare rezultă că $h(x_0) \geq h(x)$, $(\forall)\ x \in A$ și cum $h(x) = f(x) + g(x) \geq 0 + g(x)$, $(\forall)\ x \in A$, deducem că $h(x_0) \geq g(x)$, $(\forall)\ x \in A$ (1). Funcția g fiind continuă din (1) rezultă că $h(x_0) \geq g(\sup A) = g(x_0)$ deci

$$g(1) = h(1) - f(1) > h(1) \geq h(x_0) \geq g(x_0)$$

și deci $(\exists)\ t \in [x_0, 1]$ a.î. $g(t) = h(x_0)$.

Funcția h fiind monoton crescătoare $h(t) \geq h(x_0) = g(t)$ deci $f(t) = h(t) - g(t) \geq 0$ și deci $t \in A$. Cum $t \geq x_0 = \sup A$ avem că $t = x_0$ deci $h(x_0) = g(x_0)$ și deci $f(x_0) = h(x_0) - g(x_0) = 0$.

5.5.68. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to [-1, 1]$ o funcție continuă a.î. $f(n) = (-1)^n$ $(\forall)\ n \in \mathbf{Z}$ și fie $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, dacă $x \neq 0$ și $f(0) = 0$. Atunci g invariază intervalele închise și mărginite deși g nu este continuă peste tot.*

Soluție. Funcțiile f și $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$ fiind continue rezultă că g este continuă pe $\mathbf{R}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $x_n = \frac{1}{n}$ atunci $g(x_n) = f(n) = (-1)^n$ deci $(g(x_n))_{n\geq 1}$ nu are limită şi deci $g(0+)$ nu u există. Analog $g(0-)$ nu există, încît o este o discontinuitate de a doua speţă.

Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval închis şi mărginit. Dacă $I \subseteq \mathbf{R}_+^*$ sau $I \subseteq \mathbf{R}_+^*$ atunci $g(I)$ este un interval închis şi mărginit, deoarece g este continuă pe $\mathbf{R}^*$, deci pe I.

Dacă $0 \in I$ şi $\mathring{I} \neq \emptyset$ atunci vom arăta că $g(I) = [-1,1]$.

Pentru aceasta fie n par din $\mathbf{Z}$ a.î. $\frac{1}{n} \in I$. Atunci $\frac{1}{n+1} \in I$ deci $g(I) \ni g\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ şi $g(I) \ni g\left(\frac{1}{n+1}\right) = -1$ şi deci $g(I) \supseteq [-1, 1]$, deoarece g este continuă pe intervalul $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$. Cum $|g(x)| \leqslant 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deducem că $g(I) = [-1, 1]$.

5.5.69. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $f : I \to \mathbf{R}$ semiconvexă şi $x \in \mathring{I}$. Dacă $f(x-)$, $f(x+)$ există, atunci f este continuă în x.*

Soluţie. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, două şiruri din I a.î. $x_n \nearrow x$, $y_n \searrow x$ şi $\frac{x_n + y_n}{2} = x$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Atunci

$$f(x) = f\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} f(x_n) + \frac{1}{2} f(y_n),\ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

deci trecînd la limită cu $n \to \infty$, obţinem :

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2} f(x-) + \frac{1}{2} f(x+) \tag{1}$$

Cum $\frac{x + x_n}{2} \nearrow x$ şi $f\left(\frac{x + x_n}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(x_n)$ trecînd din nou la limită cu $n \to \infty$, obţinem :

$$f(x-) \leqslant \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(x-) \Leftrightarrow f(x-) \leqslant f(x).$$

Analog deducem că $f(x+) \leqslant f(x)$, deci din (1) rezultă

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2} f(x-) + \frac{1}{2} f(x+) \leqslant f(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2} f(x-) + \frac{1}{2} f(x+) \tag{2}$$

Din (2) şi din inegalităţile $f(x-) \leqslant f(x)$, $f(x+) \leqslant f(x)$, rezultă evident că $f(x-) = f(x+) = f(x)$ deci f este continuă în x.

5.5.70. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Atunci f este convexă $\Leftrightarrow$ f este semiconvexă.*

Soluţie. Fie $a, b \in I$, $a < b$ fixaţi. Cum f este continuă pe I, deci pe $[a, b]$, rezultă că f este mărginită pe $[a, b]$ şi deci $f|_{[a,b]}$ este convexă, prin urmare f este convexă.

5.5.71. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime, $x_0 \in A \cap A'$ şi $f : A \to \mathbf{R}$ o funcţie. Dacă funcţia $x \overset{\varphi}{\mapsto} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \in A \setminus \{x_0\}$ este mărginită pe $A \cap V \setminus \{x_0\}$, unde V este o vecinătate a lui x_0, atunci f este continuă în x_0.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Evident avem

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0), \quad (\forall)\ x \in A \setminus \{x_0\}.$$

Deoarece φ este mărginită pe $A \cap V \setminus \{x_0\}$, există $M > 0$ a.î. $|\varphi(x)| \leqslant M$ $(\forall)\ x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$, deci

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant M|x - x_0| \quad (\forall)\ x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$$

Cum $\lim\limits_{x \to x_0} M|x - x_0| = 0$ avem $\lim\limits_{A \cap V \ni x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$, deci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Observație. Reciproca Ex. 5.5.71. nu este numaidecît adevărată.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție și $x \in I$. Dacă f admite derivate laterale în x_0, în particular dacă f este derivabilă în x_0, atunci f este continuă în x_0.*

5.5.72. Exercițiu. *Fie $f : I = [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă a.î. $f(a) = f(b)$. Atunci există $(a_n)_{n \geqslant 1}$ și $(b_n)_{n \geqslant 1}$ două șiruri din I convergente la același punct a.î. $a_n < b_n$ și $f(a_n) = f(b_n)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.*

Soluție. Presupunem f neconstantă și fie $m = \min\limits_{x \in I} f(x)$, $M = \max\limits_{x \in I} f(x)$. Evident avem $m \neq f(a)$ sau $M \neq f(a)$ deoarece f neconstantă. Dacă $M \neq f(a)$ atunci există $c \in \mathring{I}$ a.î. $f(c) = M$.

Fie $c_n, d_n \in I$ a.î. $c_n \nearrow c$, $d_n \searrow c$ și să notăm $I_n = [c_n, d_n]$

1) Dacă $f(c_n) < f(d_n)$ cum $f(d_n) \leqslant f(c)$ avem $f(c_n) < f(d_n) \leqslant f(c)$. Deoarece f are proprietatea lui Darboux există $a_n \in (c_n, c]$ a.î. $f(c_n) = f(d_n)$ În acest caz punem $b_n = d_n$

2) Dacă $f(c_n) \geqslant f(d_n)$ cum $f(c) \geqslant f(c_n)$ avem $f(c) \geqslant f(c_n) \geqslant f(d_n)$ deci ca mai sus există $b_n \in [c, d_n]$ a.î. $f(b_n) = f(c_n)$. În acest caz punem $a_n = c_n$.

Prin urmare am obținut două șiruri $(a_n)_{n \geqslant 1}$, $(b_n)_{n \geqslant 1}$ a.î. $c_n \leqslant a_n \leqslant c \leqslant b_n \leqslant d_n$ și $f(a_n) = f(b_n)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Cum $c_n \to c$ și $d_n \to c$ avem $a_n \to c$ și $b_n \to c$.

5.5.73. Exercițiu. *Fie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă a.î. $f(a) = f(b)$. Dacă $m = \inf f([a, b)$ și $M = \sup f([a,b])$, atunci f ia orice valoare din intervalul (m, M) cel puțin de două ori.*

Soluție. Fie $y \in (m, M)$ fixat. Funcția f fiind continuă, există (T. 5.5.17. Cor. 1) $x_0, x_1 \in [a, b]$ a.î. $f(x_0) = m$ și $f(x_1) = M$.

Evident avem : (i) $m < y \leqslant f(a)$ sau (ii) $f(a) \leqslant y < M$.

Dacă $m < y \leqslant f(a)$, cum $m = f(x_0)$, rezultă (T. 5.5.16. Cor. 1) că există $c_1 \in [a, x_0)$ a.î. $f(c_1) = y$. Însă $f(a) = f(b)$, deci $f(x_0) < y \leqslant f(b)$ și deci există $c_2 \in {}_0(x, b]$ a.î. $f(c_2) = y$. Prin urmare $f(c_1) = f(c_2) = y$ și $c_1 \neq c_2$.

În cazul (ii) se raționează la fel.

Generalizare. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval de capete a, $b \in \overline{\mathbf{R}}$ și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă a.î. $\lim\limits_{x \searrow a} f(x)$, $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x)$ există și sînt egale cu l. Atunci f ia orice valoare din mulțimea $(m, M) \setminus \{l\}$, unde $m = \inf f(I)$ și $M = \sup f(I)$, cel puțin de două ori.

5.5.74. Exercițiu. *Fie $f : [a, b] \to [a, b]$ o funcție și $(x_n)_{n \geqslant 1}$ un șir definit astfel $x_n = f(x_{n-1})$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ cu $x_0 \in [a, b]$ fixat. În ce condiții șirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este convergent și limita sa este o soluție (resp. unică) a ecuației $f(x) = x$?*

Soluție. Să considerăm următoarele cazuri particulare :

1° *f este continuă și monoton crescătoare.*

Dacă $f(x_0) \geqslant$ (resp. $\leqslant$)x_0 atunci evident $x_n \geqslant$ (resp $\leqslant$) x_{n-1}, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci $t = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ există și avem :

$$f(t) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = t$$

Prin urmare şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ converge monoton către o soluţie a ecuaţiei $f(x) = x$.

2° *f este continuă şi monoton descrescătoare.*

Notăm $g = f \circ f$ şi $y_n = g(y_{n-1})$, $(\forall)\ n \geq 1$ unde $y_0 = x_0$. Atunci g este continuă şi monoton crescătoare, deci $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ există şi avem $g(y) = y$. Cum $y_n = x_{2n}$, $(\forall)\ n \geq 1$ deducem că $(x_{2n})_{n\geq 1}$ este monoton crescător (resp. descrescător) dacă $x_2 = g(x_0) \geq$ (resp. $\leq$) x_0, deci f fiind monoton descrescătoare şi $x_{2n+1} = f(x_{2n})$ rezultă că şirul $(x_{2n+1})_{n\geq 1}$ este monoton descrescător (resp. crescător) dacă $x_2 \geq$ (resp $\leq$) x_0; fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}$. Atunci avem

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f(x_{2n}) = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = x \text{ şi analog } f(x) = y.$$

Aşadar $x_{2n} \nearrow y$, $x_{2n+1} \searrow x$, $f(x) = y$ şi $f(y) = x$ sau $x_{2n} \searrow y$, $x_{2n+1} \nearrow x$, $f(x) = y$ şi $f(y) = x$.

Prin urmare dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent limită sa este o soluţie a ecuaţiei $f(x) = x$.

Observaţie. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}$ nu sînt numaidecît egale, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ nu există numaidecît.

Contraexemplu. Fie f: $[0,1] \to [0,1]$ definită astfel $f(x) = 1 - x^2$. Dacă $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, atunci $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{4} > x_0$ deci $x_{2n} \nearrow x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ şi $x_{2n+1} \searrow y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

3° *f satisface condiţia*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|,\ (\forall)\ x_1, x_2 \in [a, b],\ x_1 \neq x_2.$$

Fie funcţia $g(x) = f(x) - x$, $x \in [a, b] = I$. acă $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, atunci

$$g(x_2) - g(x_1) = (x_2 - x_2) - (f(x_1) - f(x_2)) > 0,$$

deoarece

$$f(x_1) - f(x_2) \leq |f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2| = x_2 - x_1.$$

Aşadar g este strict crescătoare. Cum f este evident continuă, rezultă că posedă cel puţin un punct fix şi deoarece g este strict crescătoare, ecuaţia $f(x) = x$ admite o singură soluţie; să o notăm cu t. Atunci $|t - x_n| = |f(t) - f(x_{n-1})| < |t - x_{n-1}|$, deci şirul $(|t - x_n|)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător, deci $y = \lim\limits_{n\to\infty} |t - x_n|$ există şi $y \geq 0$. Fie $(t - x_{n_k})_{k\geq 1}$ un subşir al şirului $(t - x_n)_{n\geq 1}$ care păstrează un semn constant. Evident $t - x_{n_k} \to z$, unde $z = y$ sau $-y$, deci $x_{n_k} \to x - z \in [a, b]$. În acest caz avem

$$|f(t - z) - t| = \left|\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) - t\right| = \lim_{n\to\infty} |x_{n_k+1} - t| = y \qquad (1).$$

Pe de altă parte, dacă $y > 0$ avem:

$$|f(t - z) - t| = |f(t - z) - f(t)| \leq |t - z - t| = y \qquad (2).$$

Inegalităţile (1) şi (2) sînt contradictorii. Rămîne că $y = 0$.

Prin urmare ecuaţia $f(x) - x = 0$ are o singură soluţie şi care se obţine ca limită a şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

4° *f satisface condiţia*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \lambda\, |x_1 - x_2|,\ (\forall)\ x_1, x_2 \in [a, b] \text{ unde } 0 < \lambda < 1.$$

Evident condiţia 4° implică condiţia 3° etc.

5° *f este derivabilă și avem* $|f'(x)| < 1$, $(\forall)\ x \in [a, b]$ sau $|f'(x)| \leqslant \lambda < 1$, $(\forall)\ x \in [a, b]$.

Evident condiția 5° implică condiția 3° etc.

Observații. a) Dacă $f : [a, b] \to [a, b]$ este derivabilă și $|f'(x)| \geqslant \lambda > 1$, $(\forall)\ x \in [a, b]$ nu rezultă numaidecît că șirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ cu $x_n = f(x_{n-1})$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ și $x_0 \in [a, b]$ fixat, nu este convergent.

Contraexemplu $f(x) = \lambda x$ $(\forall)\ x \in [0, 1]$ și $\lambda > 1$ fixat.

b) Există funcții $f : [a, b] \to [a, b]$ discontinui a.î. șirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ cu $x_n = f(x_{n-1})$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ și $x_0 \in [a, b]$ fixat, converge către o soluție a ecuației $(fx) = x$.

Exemplu : funcția lui Dirichlet.

c) Dacă $f, g : [a, b] \to [a, b]$ sînt derivabile și $\sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| < \sup_{x \in [a,b]} |g'(x)| < 1$, nu rezultă numaidecît că șirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$, cu $x_n = f(x_{n-1})$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, converge mai rapid decît șirul $(y_n)_{n \geqslant 1}$, cu $y_n = g(y_{n-1})$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, unde $x_0 = y_0 \in [a, b]$ este fixat.

Contraexemplu (H. A. Antosiewicz, J. M. Hammersley) Fie funcția

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \lambda x, & \text{dacă } |x| \leqslant \frac{1-\lambda}{\lambda}; \\ \left(\frac{3}{4}\right)^2 ((\lambda x - 2) - 2)^2 (3\lambda x + 2\lambda - 2)/(1-\lambda)^2, & \text{dacă} \\ & (1-\lambda)/\lambda < |x| < 2(1-\lambda)/\lambda; \\ 0, & \text{dacă } |x| \geqslant 2(1-\lambda)/\lambda, \end{cases}$$

Atunci obținem soluția $x = 0$ a ecuației $f(x) = x$ după un singur pas, dacă $\lambda > 1/\left(1 + \frac{1}{2}|x_0|\right)$ și după o infinitate de pași, dacă $0 < \lambda < 1/\left(1 + \frac{1}{2}|x_0|\right)$.

5.5.75 Exercițiu. *Fie* $-\infty < a < b \leqslant \infty$ *și* $f : [a, b) \to [a, b)$ *o funcție continuă a.î.* $f(x) \neq x$, $(\forall)\ x \in [a, b)$. *Atunci șirul* $(x_n)_{n \geqslant 1}$ *unde* $x_n = f(x_{n-1})$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ *cu* $x_0 \in [a, b)$ *fixat, are limita* b.

Soluție. Fie $I = [a, b)$. Deoarece $f(a) \geqslant a$ și $f(a) \neq a$, avem că $f(a) > a$. Funcția $x \mapsto f(x) - x$, $x \in I$ fiind continuă și nenulă în fiecare punct, păstrează un semn constant, deci cum $f(a) - a > 0$, rezultă că $f(x) - x > 0$, $(\forall)\ x \in I$. Atunci

$$x_n - x_{n-1} = f(x_{n-1}) - x_{n-1} > 0, \ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

deci $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este strict crescător, încît $x^* = \lim_{n \to \infty} x_n$ există. Dacă $x^* < b$, atunci, trecînd la limită în relația $x_n = f(x_{n-1})$, $n \geqslant 1$, obținem că $x^* = f(x^*)$, absurd. Rămîne că $x^* = b$, deci $\lim_{n \to \infty} x_n = b$.

Observație. 1° Deoarece $x < f(x) < b$ $(\forall)\ x \in [a, b)$, rezultă că $\lim_{n \to \infty} xf() = b$.

2° Notînd $g(x) = f(x) - x - a - b$, $x \in [a, b]$, observăm că $g(a) < 0$ și $g\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, deci există cel puțin un punct $c \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ a.î. $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = a + b - c$ (în ipoteza $b \neq \infty$).

5.5.76. Exercițiu. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime mărginită și închisă și* $f : A \to A$ *o funcție care satisface condiția :*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|, \ (\forall)\ x_1, x_2 \in A, \ x_1 \neq x_2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci f posedă un punct fix și numai unul singur.

Soluție. Evident f este o funcție continuă. Fie $\lambda := \inf_{x \in A} |f(x) - x|$. Din definiția marginii inferioare rezultă că $(\exists)\ x_n \in A$ a.i. $|f(x_n) - x_n| \to \lambda$. Mulțimea A fiind mărginită și închisă, este secvențial compactă (T. 5.2.9.), deci șirul $(x_n)_{n>1}$ posedă un subșir convergent $(x_{n_k})_{k>1}$, către un punct $x_0 \in A$. Funcția find continuă, avem:

$$|f(x_0) - x_0| = \lim_{k \to \infty} |f(x_{n_k}) - x_{n_k}| = \lambda.$$

Deoarece $\lambda \leqslant |f(x) - x|$, $(\forall)\ x \in A$ și $f(x_0) \in A$, dacă $f(x_0) \neq x_0$, atunci:

$$\lambda \leqslant |f(f(x_0)) - f(x_0)| < |f(x_0) - x_0| = \lambda, \text{ absurd.}$$

Rămîne că $f(x_0) = x_0$.

Dacă $f(x_1) = x_1$ și $x_1 \neq x_0$, atunci:

$$|x_0 - x_1| = |f(x_0) - f(x_1)| < |x_0 - x_1|, \text{ absurd.}$$

Prin urmare f posedă un singur punct fix.

Observație. Afirmația rămîne adevărată înlocuind A cu *un spațiu metric compact.*

Corolar 1. *Fie $f : [a, b] \to [a, b]$ o funcție derivabilă a.î. $|f'(x)| < 1\ (\forall)\ x \in [a, b]$. Atunci f admite un punct fix și numai unul singur.*

5.5.77. Exercițiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime închisă și $f : A \to A$ o funcție mărginită care satisface condiția:*

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|,\ (\forall)\ x, y \in A,\ x \neq y$$

Atunci $(\exists)\ x_0 \in A$ *unic a.î.* $f(x_0) = x_0$.

Soluție. Fie $\lambda = \inf_{x \in A} |f(x) - x|$. Avem $0 \leqslant \lambda < \infty$. Din definiția marginii inferioare există $(x_n)_{n>1}$ un șir din A a.î. $\lambda = \lim_{n \to \infty} |f(x_n) - x_n|$.

Evident $M_1 = \sup_{n>1} |f(x_n) - x_n| < +\infty$ și din ipoteză

$$M_2 = \sup_{n>1} |f(x_n)| \leqslant \sup_{x \in A} |f(x)| < +\infty,$$

deci

$$|x_n| \leqslant |x_n - f(x_n)| + |f(x_n)| \leqslant M_1 + M_2 < \infty,\ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Așadar șirul $(x_n)_{n>1}$ este mărginit. Din T. 2.3.21. (5°) rezultă că șirul $(x_n)_{n>1}$ posedă un subșir convergent $(x_{n_k})_{k>1}$; fie $x_0 = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$. Mulțimea A fiind închisă, avem $x_0 \in A$. Este clar că f este continuă, deci

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} |f(x_{n_k}) - x_{n_k}| = |f(x_0) - x_0|.$$

Presupunem că $f(x_0) \neq x_0$. Atunci

$$|f(f(x_0)) - f(x_0)| < |f(x_0) - x_0| = \lambda \qquad (1)$$

Cum $|f(x) - x| \geqslant \lambda$, $(\forall)\ x \in A$, avem

$$|f(f(x_0)) - f(x_0)| \geqslant \lambda \qquad (2)$$

Inegalitățile (1) și (2) sînt contradictorii.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare $f(x_0) = x_0$. Unicitatea punctului fix x_0 rezultă ca în **Ex. 5.5.76.**

5.5.78. Exerciţiu (P. L é v y). *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă cu* $f(a) = f(b)$ *şi* $H(a, b) = \left\{\frac{b-a}{n};\ n \in \mathbf{N}\right\}$. *Atunci* 1° $(\forall)\ h \in H(a, b)$ *există* $c, d \in [a, b]$ *a.î.* $d - c = h$ *şi* $f(c) = f(d)$; 2° *Dacă* $h \in (0, b-a) \setminus H(a, b)$, *proprietatea* 1° *nu este numaidecît adevărată.*

Soluţie. 1° Fie $h = \frac{b-a}{n}$ cu n fixat şi $g : [a, b-h] \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel : $g(x) = f(x + h) - f(x)$. Evident g este continuă. Dacă g nu se anulează în nici un punct, avem că $g > 0$ sau $g < 0$; fie spre exemplu $g > 0$ Atunci $g(a + ih) > 0$, $(\forall)\ i = \overline{0, n-1}$, deci

$$0 < \sum_{i=0}^{n} g(a + ih) = \sum_{i=0}^{n-1} [f(a + (i+1)h - f(a + ih)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(a + ih) - \sum_{i=0}^{n-1} f(a + ih) = f(a + nh) - f(a) = f(b) - f(a) = 0,$$

absurd. Rămîne că există $c \in [a, b-h]$ a.î. $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = f(c + h)$.

2° Pentru a arăta 2° să construim un *contraexemplu*. Fie $h \in (0, b-a) \setminus H(a, b)$ fixat şi $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel

$$f(x) = \frac{x-a}{b-a} - \frac{1}{k} \sin \frac{2\pi(x-a)}{h},$$

unde $k = \sin \frac{2\pi(b-a)}{h}$ (evident $k \neq 0$). Atunci

$$f(a) = f(b) = 0 \text{ şi } f(x + h) - f(x) = \frac{h}{b-a} > 0,\ (\forall)\ x \in [a, b-h]$$

Observaţie. Proprietatea 1° poate fi generalizată astfel : fie $f : [c, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă şi $h \in H(a, b)$. Atunci există $c, d \in [a, b]$ a.î. $d - c = h$ şi coarda la graficul lui f de extremităţi $C(c, f(c))$ şi $D(d, f(d))$ este paralelă cu coarda de extremităţi $A(a, f(a))$ şi $B(b, f(b))$ (fig. 13).

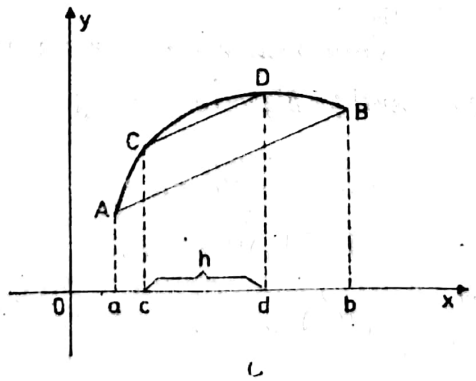


Fig. 13

5.5.79. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă cu proprietatea că graficul său* G_f *este simetric în raport cu punctul* $P = P(x_0, y_0)$. *Atunci* $y_0 = f(x_0)$ *deci* $P \in G_f$.

Scanned with OKEN Scanner

Ind. G_f este simetric în raport cu punctul $P(x_0, y_0) \Leftrightarrow \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2} = y_0$, $(\forall)\ h \in \mathbf{R}$. Prin trecere la limită, $h \to 0$, obținem $f(x_0) = y_0$.

5.5.80. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime, $x_0 \in A'$ un punct şi $f : A \to \mathbf{R}$ o funcţie care are limita l în x_0. Dacă pentru orice vecinătate V a lui x_0, există $x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$ cu $f(x) = 0$, atunci $l = 0$.*

Ind. Presupunem spre exemplu $l > 0$. Atunci $(\exists)\ U$ o vecinătate a lui x_0 a.î. $f(x) > 0$, $(\forall)\ x \in A \cap U\{x_0\}$, absurd.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime, $x_0 \in A$ un punct şi $f : A \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă în x_0. Dacă pentru orice vecinătate V a lui x_0 există $x \in A \cap V$ cu $f(x) = 0$, atunci $f(x_0) = 0$.*

5.5.81. Exerciţiu. *Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcţii bijective şi strict crescătoare. Atunci funcţia $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $h = af + g$, unde $a > 1$, este bijectivă şi strict crescătoare.*

Ind. Funcţiile f şi g fiind strict crescătoare rezultă că h este strict crescătoare, deci injectivă. Din T..5.5.19. Cor. 1 deducem că f şi g sînt continue, deci h este continuă şi deci $h(\mathbf{R})$ este un interval. Însă :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \text{ şi } \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty,$$

deci $\lim_{x\to\infty} h(x) = -\infty$ şi $\lim_{x\to\infty} h(x) = +\infty$ şi deci $h(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

Observaţie. Există funcţii $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ strict crescătoare cu $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ şi $\lim_{x\to\infty} h(x) = +\infty$ şi care nu sînt bijective.

5.5.82. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă şi neidentic nulă. Atunci $(\forall)\ \lambda \in (0,1)$, există $x_0 \in I$ şi $V \subset I$ o vecinătate a lui x_0 a.î. $|f(x) - f(x_0)| < \lambda |f(x_0)|$, $(\forall)\ x \in V$.*

Ind. Fie $x_0 \in I$ cu $f(x_0) \neq 0$ şi $F(x) = |f(x) - f(x_0)| - \lambda |f(x_0)|$, $x \in I$. Atunci F este continuă şi $F(x_0) < 0$, deci există $V \subseteq I$ o vecinătate a lui x_0 a.î. $F(x) < 0$, $(\forall)\ x \in V$ etc.

5.5.83. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime, $f : A \to A$ o funcţie şi f^+, f^- partea pozitivă, respectiv partea negativă a lui f, adică $f^+ = \max\{f, 0\}$ şi $f^- = \max\{-f, 0\}$. Atunci f este continuă în $x_0 \in A \Leftrightarrow f^+$ şi f^- sînt continue în 0.*

Ind. $f^+ = \frac{f + |f|}{2}$, $f^- = \frac{f - |f|}{2}$, $f = f^+ - f^-$ f continuă în $x_0 \Rightarrow |f|$ continuă în $x_0 \to f^+$ şi f^{-1} continuă în x_0.

5.5.84. Exerciţiu. *Fie $I, J \subseteq \mathbf{R}$ două intervale care conţin originea şi $f : I \to J$ o funcţie cu proprietăţile 1° f continuă şi bijectivă; 2° $g(0) = 0$; 3° $l = \lim_{x\to0} \frac{1}{x} f(x)$ există. Atunci $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} f^{-1}(x)$ există şi este egală cu $\frac{1}{l}$.*

Ind. Trecem la limită, $x \to 0$, în identitatea :

$$\frac{f(x)}{x} \cdot \frac{f^{-1}(y)}{y} = 1, \quad (\forall)\ x \in I\{0\} \ \blacktriangle\ y = f(x)$$

5.5.85. Exerciţiu. *Să se determine punctele de continuitate ale funcţiilor :*
1° $f(x) = [\sqrt{x}] - \sqrt{x}$, $x \in \mathbf{R}_+^*$; 2° $f(x) = x[x^{-1}]$, $x \in \mathbf{R}^*$, $f(0) = 1$;
3° $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{Q}$ şi $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$;

Scanned with OKEN Scanner

4° $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$ şi $f(0) = 0$;

5° $f(x) = x^p \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$ şi $f(0) = 0$ $(p \in \mathbf{R}_+)$;

6° $f(x) = x$, $x \neq \pm \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$; $f(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$ $x \neq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$.

Ind. 1° f continuă în $x \Leftrightarrow$ funcţia $x \mapsto [\sqrt{x}]$, $x \in \mathbf{R}_+^*$ este continuă, în $x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \neq n^2$, $n \in \mathbf{N}$.

2° f continuă în 0; f continuă în $x \in \mathbf{R}^* \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in \mathbf{Z}$;

3° f continuă în $x \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z}$.

4° $|f(x) - f(0)| < |x|$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, deci f continuă în 0 etc.

5° $|f(x) - f(0)| \leqslant |x|^p$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, deci f continuă în 0 etc.

6° f continuă în $x \Leftrightarrow x = 0$.

5.5.86. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime şi $f : A \to A$ o funcţie continuă. Dacă $x_0 \in A$, $x_n = f(x_{n-1})$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$ şi $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este convergent către un punct din A, spre exemplu cînd f este monotonă şi A închisă, atunci limita sa este un punct fix al lui f.*

Ind. Fie $x^* = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Trecînd la limită în relaţia $x_n = f(x_{n-1})$, $n \geqslant 1$, obţinem $x^* = f(x^*)$.

5.5.87. Exerciţiu. *Fie $a \in \overline{\mathbf{R}}_+$ şi $f : [0, a) \to [0, a)$ o funcţie cu proprietăţile* 1° $f(0) = 0$; 2° *f continuă*; 3° $f(x) < x$, $(\forall)$ $x \in (0, a)$. *Să se studieze natura şirului $(x_n)_{n \geqslant 1}$ definit astfel : $x_1 \in (0, a)$ fixat şi $x_{n+1} = f(x_n)$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$.*

Ind. Avem $0 \leqslant x_{n+1} = f(x_n) \leqslant x_n$, $(\forall)$, $n \geqslant 1$, deci $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ există şi $x_0 \in [0, a)$. Cum $f(x_0) = x_0$, rezultă că $x_0 = 0$.

Exemple: $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, $x \in \mathbf{R}_+^*$; $f(x) = \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

$$f(x) = \frac{x}{1+x}, \quad x \in \mathbf{R}_+; \qquad f(x) = -x^2 + 2x, \; x \in [0, 1].$$

5.5.88. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel :*

1° $f(x) = \frac{1}{x}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}^*$; 2° $f(x) = 1 + \sin \frac{1}{x}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}^*$;

3° $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}^*$; 4° $f(x) = \begin{cases} 1, & (\forall)\, x > 0 \\ -1, & (\forall)\, x < 0 \end{cases}$.

Să se arate în ce caz poate fi prelungită prin continuitate funcţia f în punctul $x = 0$.

Ind. Numai în cazul 3°, deoarece $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ există şi $\in \mathbf{R}$.

5.5.89. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă care nu este monotonă. Atunci f posedă cel puţin un extrem local în sens larg.*

Ind. Deoarece f nu este monotonă $(\exists)$ $a, b \in I$, $a < b$ a.î. $f(c)$ nu este cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$ pentru nici un punct c cuprins între a şi b. Luînd maximul şi minimul lui f pe $[a, b]$ deducem că există $c \in (a, b)$ punct de extrem local pentru f.

5.5.90. Exerciţiu. *Să se determine funcţiile continue $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a.î.*

$$f(x + y) = f(x)\, g(y), \; (\forall)\; x, y \in \mathbf{R}; \; f \neq 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ind. $f(0) \neq 0$; $g(x) = \dfrac{f(x)}{f(0)}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Relaţia dată se transcrie

$$g(x + y) = g(x)\, g(y),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

5.5.91. Exerciţiu. *Fie* $a, b \in \mathbf{R}$, $ab > 0$ *şi* $f : [a, b] \to [a, b]$ *o funcţie continuă. Atunci există* $x_0 \in (a, b)$ *a.î.* $x_0 f(x_0) = ab$.

Ind. Fie funcţia $\varphi(x) = xf(x) - ab$, $x \in [a, b]$. Atunci φ este continuă şi $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = a(f(a) - b)) \cdot b(f(b) - b)) \leqslant 0$, deci $(\exists)\ x_0 \in (a, b)$ a.î. $\varphi(x_0) = 0$.

5.5.92. Exerciţiu. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval de capete* a *şi* b *cu* $a, b \in \bar{\mathbf{R}}$ *şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă. Dacă* $\lim\limits_{x \searrow a} f(x)$ *şi* $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x)$ *există şi au semne contrare, atunci există cel puţin un punct* $c \in I$ *a.î.* $f(c) = 0$.

Ind. Presupunem $f(a+) < 0$ şi $f(b-) > 0$. Atunci există $a_1, b_1 \in I$, $a_1 < b_1$ a.î. $f(a_1) < 0$ şi $f(b_1) > 0$.

5.5.93. Exerciţiu. *Să se determine parametrul real* λ *a.î. ecuaţia* $x^3 - 5x + \lambda = 0$ *să aibă în intervalul* $[0,2]$ *două rădăcini reale.*

Soluţie. Fie $P(x) = x^3 - 5x + \lambda$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci P este continuă şi avem $P(0) = \lambda$, $P(1) = -4 + \lambda$, $P(2) = -2 + \lambda$. Dacă $P(0) \cdot P(1) \leqslant 0$ şi $P(1) \cdot P(2) \leqslant 0$ rezultă că P are în fiecare interval $[0, 1]$ şi $[1,2]$ cel puţin cîte o rădăcină reală. Rămîne deci să determinăm $\lambda \in \mathbf{R}$ a.î. $\lambda(\lambda - 4) \leqslant 0$ şi $(\lambda - 4)(\lambda - 2) \leqslant 0$, de unde deducem $\lambda \in [2, 4]$.

5.5.94. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ *o funcţie continuă şi subaditivă. Atunci oricare ar fi o serie numerică convergentă* $\sum\limits_{n \geqslant 1} x_n$, *avem relaţia* $f(\sum\limits_{n \geqslant 1} x_n) \leqslant \sum\limits_{n \geqslant 1} f(x_n)$.

5.5.95. Exerciţiu. *Să se arate că orice funcţie polinomială* f *de grad par admite cel puţin un punct de minim sau de maxim.*

Ind. Ţinem seama că $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

5.5.96. Exerciţiu. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime şi* $f : A \subseteq \mathbf{R}$ *o funcţie. Atunci oricare ar fi funcţia continuă* $g : A \to \mathbf{R}$ *rezultă că* $f + g$ *are aceleaşi puncte de discontinuitate ca şi* f.

5.5.97. Exerciţiu. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime cu* $A \neq \bar{A}$, $c \in \bar{A} \setminus A$ *un punct şi* $f(x) = \dfrac{1}{|x - c|}$, $(\forall)\ x \in A$. *Atunci* f *este continuă pe* $A \setminus \{c\}$ *şi* $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$.

Ind. Ţinem seama că $c \in \bar{A} \Leftrightarrow$ există $(x_n)_{n \geqslant 1}$ un şir din A a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$.

5.5.98. Exerciţiu. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă. Dacă* $x_0 \in I$ *este punct de extrem pentru* f, *atunci* x_0 *este punct de extrem şi pentru* $|f|$. *Reciproca nu este numaidecît adevărată.*

5.6. Funcţii uniform continue

5.6.1. Exerciţiu. *Funcţia* $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbf{R}_+$ *este uniform continuă.*

Soluţia 1. Evident avem $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{|x - y| + y} \leqslant \sqrt{x - y} + \sqrt{y}$, deci

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{|x - y|} \tag{1}$$

Analog

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{|y - x|} = \sqrt{|x - y|} \tag{2}$$

Din (1) şi (2) avem

Scanned with OKEN Scanner

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}, \quad (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}_+,$$

deci

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}, \ |x-y| < \eta = \varepsilon^2$$

şi deci f este uniform continuă.

Soluţia 2. Fie $\varepsilon > 0$ fixat şi $\eta = \varepsilon^2$. Atunci : (i) Dacă $0 < x, x' < \eta$, avem $0 < \sqrt{x}, \sqrt{x'} < \varepsilon$, deci $|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| < \varepsilon$ (ii) Dacă $x \geqslant \eta$ sau $x' \geqslant \eta$, avem $\sqrt{x} + \sqrt{x'} \geqslant \eta$, deci pentru $|x - x'| < \eta$ rezultă că

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| = \frac{|x-x'|}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}} < \frac{\eta}{\varepsilon} = \varepsilon.$$

5.6.2. Exerciţiu. *Să se arate că funcţiile următoare*

$$f(x) := \sin \frac{\pi}{2}, \ x \in (0, 1); \ g(x) := \cos \frac{\pi}{x}, \ x \in (0, 1);$$

nu sînt uniform continui.

Soluţie. Considerăm primul exemplu. Presupunem f uniform continuă şi fie $\varepsilon = 1$. Atunci există $0 < \delta < 1$ a.î.

$$\left|\sin \frac{\pi}{x} - \sin \frac{\pi}{y}\right| \leqslant 1 \ (\forall)\ x, y \in (0, 1), \ |x-y| < \delta$$

Evident există $n \geqslant 1$ cu proprietatea că

$$x_0 = \frac{1}{\frac{1}{2} + 2n} \in (0, \delta) \quad \text{şi} \quad y_0 = \frac{1}{\frac{3}{2} + 2n} \in (0, \delta)$$

Atunci

$$|x_0 - y_0| < \delta \text{ şi } 2 = |\sin x_0 - \sin y_0| \leqslant 1,$$

absurd. Prin urmare f nu este uniform continuă.

5.6.3. Exerciţiu. *Funcţia* $f(x) = \frac{1}{x} \ln (1 + x)$, $x \in (0, \infty)$, *este uniform continuă.*

Soluţie. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Deoarece $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, există $c > 0$ a.î. $|f(x)| \leqslant \varepsilon/2$, $(\forall)\ x \geqslant c$ (1). Cum $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 1$ funcţia f poate fi prelungită prin continuitate în 0, de unde rezultă [(T. 5.7.8.) că f este uniform continuă pe $(0,c]$ şi deci există $\delta > 0$ a.î.

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon/2, \ (\forall)\ x, y \in (0,c], \ |x-y| \leqslant \delta \ (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă imediată că

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \ (\forall)\ x, y \in (0, \infty), \ |x-y| \leqslant \delta,$$

deci f este uniform continuă.

Scanned with OKEN Scanner

5.6.4. Exerciţiu. *Să se arate că funcţiile următoare:*

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x},\ x \in (0,1);\ g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}},\ 0 < |x| \leqslant 1;$$

$$h(x) = \frac{\sin x}{x},\ x \in (0,1);\ k(x) = \frac{\arcsin x}{x},\ x \in (0,1),$$

sînt uniform continui.

Soluţie. Considerăm primul exemplu. Deoarece $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$ putem prelungi prin continuitate f la $[0,1]$. Fie $\tilde{f}$ funcţia obţinută. Mulţimea $[0, 1]$ fiind compactă şi $\tilde{f}$ continuă, rezultă că $\tilde{f}$ este uniform continuă şi deci f este uniform continuă.

5.6.5. Exerciţiu. *Funcţia $f(x) = \sin x^2$, $x \in \mathbf{R}$ este continuă însă nu este uniform continuă.*

Soluţie. Presupunem f uniform continuă şi fie $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Atunci $(\exists)\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î.

$$|\sin x^2 - \sin y^2| < \frac{1}{2},\ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R},\ |x - y| < \delta,$$

Fie $x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ şi $y_n = \sqrt{2n\pi}$ $(n \geqslant 1)$. Atunci $x_n - y_n \to 0$, deci $(\exists)\ n_0 \geqslant 1$ a.î. $|x_n - y_n| < \delta$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$ şi deci

$$1 = |\sin x_n^2 - \sin y_n^2| < \frac{1}{2},\ (\forall)\ n \geqslant n_0,$$

absurd. Rămîne f nu este uniform continuă.

5.6.6. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Atunci 1° f nu este uniform continuă pe $\mathbf{R}_+^*$; 2° $(\forall)\ a > 0$, f este uniform continuă pe $[a, \infty)$.*

Soluţie 1° Presupunem f uniform continuă pe $\mathbf{R}_+^*$. Atunci pentru $\varepsilon = 1$, $(\exists)\ \eta > 0$ a.î. $|f(x) - f(y)| \leqslant 1$, $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}_+^*$. $|x - y| \leqslant \eta$, deci $\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+\eta)^2}\right| \leqslant 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$, şi deci

$$\frac{\eta^2}{x^2(x^2+\eta)^2} \leqslant \frac{2x\eta + \eta^2}{x^2(x+\eta)^2} = \frac{(x+\eta)^2 - x^2}{x^2(x+\eta)^2} \leqslant 1,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$$

Prin trecere la limită, $x \searrow 0$, obţinem o contradicţie etc. 2° Fie $a > 0$ fixat. Atunci $(\forall)\ x, y \in [a, \infty)$ avem:

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right| = |x - y| \cdot \frac{x+y}{x^2y^2} = |x - y|\left(\frac{1}{xy^2} + \frac{1}{x^2y}\right) \leqslant$$

$$\leqslant |x - y| \cdot \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^3}\right) = \frac{2}{a^3}|x - y|$$

Aşadar f este lipschitziană, deci uniform continuă.

Scanned with OKEN Scanner

5.6.7. Exerciţiu. *Fie* $f\colon \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$. *Atunci* f *este uniform continuă pe mulţimea* $A \subseteq \mathbf{R}\setminus\{1\} \Leftrightarrow 1 \notin \bar{A}$.

Soluţie ($\Rightarrow$) Presupunem că $1 \in \bar{A}$ şi f este uniform continuă pe A. Considerăm mulţimea $B = A \cup ((0,1) \cup (1,2))$. Atunci B este mărginită, $1 \in \bar{B}$ şi f este uniform continuă pe B, deci f este mărginită pe B. Evident $1 \in \bar{B}\setminus B \subseteq B'$, există deci $x_n \in B$ cu $x_n \to 1$ şi deci $|f(x_n)| = \dfrac{1}{1-x^3} \to \infty$, de unde rezultă că f este nemărginită pe B, absurd. Rămîne că $1 \notin \bar{A}$.

($\Leftarrow$) Dacă $1 \notin \bar{A}$, există $\varepsilon > 0$ a.î. $A \cap (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) = \emptyset$, deci $A \subseteq (-\infty, 1-\varepsilon) \cup (1+\varepsilon, \infty)$. Cum f este continuă şi are limite finite la capetele fiecărui interval $(-\infty, 1-\varepsilon)$ şi $(1+\varepsilon, \infty)$ este uniform continuă pe fiecare din aceste intervale (T.5.7.8. Cor. 1.) deci şi pe reuniunea lor şi deci şi pe mulţimea A.

Generalizare. Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ *un polinom care are drept rădăcini reale pe* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi $f\colon \mathbf{R}\setminus\{x_1, \ldots, x_n\} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) = \dfrac{1}{P(x)}$. *Atunci* f *este uniform continuă pe mulţimea* $A \subseteq \mathbf{R}\setminus\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \Leftrightarrow x_i \notin \bar{A}$, $(\forall)\, i = \overline{1, n}$

5.6.8. Exerciţiu. *Să se construiască o funcţie uniform continuă care nu satisface condiţia lui Hölder.*

Soluţie. Fie $0 < a < 1$ şi $f\colon [0, a] \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel: $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, dacă $x \in (0, a]$ şi $f(0) = 0$. Evident f este continuă, deci $[0, a]$ fiind compact, f este uniform continuă (T.5.7.8.). Dacă f este hölderiană există $p \in (0,1]$ şi $M > 0$ a.î.

$$|f(x) - f(0)| \leqslant M|x|^p, \ (\forall) x \in [0, a],$$

deci

$$x^p \,|\ln x| \geqslant \lambda = \frac{1}{M} > 0, \ (\forall)\, x \in (0, a],$$

absurd, deoarece $\lim\limits_{x \searrow 0} x^p \ln x = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{1}{p}\, t \ln t = \dfrac{1}{p} \lim\limits_{y \to \infty} \dfrac{\ln y}{y} = 0$.

5.6.9. Exerciţiu. *Fie* $X \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime şi* $f\colon X \to \mathbf{R}$ *o funcţie. Dacă* $A, B \subseteq X$, $d(A, B) > 0$ *şi* f *este uniform continuă pe* A *şi pe* B, *atunci* f *este uniform continuă pe* $A \cup B$

Soluţie. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)\ \delta_1 > 0$ şi $\delta_2 > 0$ a.î.,

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \ (\forall)\ x, y \in A, \ |x - y| < \delta_1,$$

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \ (\forall)\ x, y \in B, \ |x - y| < \delta_2,$$

deci

$$|f(x) - f(x)| < \varepsilon, \ (\forall)\ x, y \in A \cup B, \ |x - y| < \delta,$$

unde $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, d(A, B)\}$.

Observaţie. Dacă $d(A, B) = 0$. Ex. 5.6.9. nu este numaidecît adevărat.

Contraexemplu. $A = \mathbf{R}_+^*$, $B = \mathbf{R}_+^*$ şi $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcţia signum.

5.6.10. Exerciţiu. *Să se construiască o funcţie uniform continuă care nu este absolut continuă.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ o funcție definită astfel: $f(x)=x\cos\frac{\pi}{x}$ dacă $x\in(0,1]$ și $f(0)=0$. Evident f este continuă și cum $[0,1]$ este compact, f este uniform continuă (T.5.7.8.) Fie $a_k=\frac{1}{2k}$ și $b_k=\frac{1}{2k+1}$. Atunci $f(a_k)=\frac{1}{2k}$ și $f(b_k)=-\frac{1}{2k+1}$, deci

$$\sum_{k=n}^{n+p}|f(a_k)-f(b_k)|=\sum_{k=n}^{n+p}\left(\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}\right)=\sum_{k=2n}^{2n+2p+1}\frac{1}{k}>\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{n+p}\frac{1}{k} \tag{1}$$

Fie $\varepsilon>0$ și $\delta>0$ fixați. Atunci $(\exists)\ n_0\geqslant 1$ a.î. $a_n, b_n\in(0,\delta)$, $(\forall)\ n\geqslant n_0$, deci cum $[a_n,b_n]\cap[a_m,b_n]=\emptyset$, $(\forall)\ n\neq m$, avem că

$$\sum_{k=n}^{n+p}(b_k-a_k)<\delta,\ (\forall)\ n\geqslant n_0\ \blacktriangle\ p\geqslant 1 \tag{2}$$

Seria $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ fiind divergentă, din (1) rezultă că $(\exists)\ p_0\geqslant 1$ a.î.

$$\sum_{k=n}^{n+p}|f(a_k)-f(b_k)|>\varepsilon,\ (\forall)\ n\geqslant n_0\wedge p\geqslant p_0 \tag{3}$$

Din (2) $\wedge$ (3) deducem că f nu este absolut continuă.

5.6.11. Exercițiu. *Fie $A\subseteq\mathbf{R}$ o mulțime și $f,g:A\to\mathbf{R}$ două funcții uniform continue și mărginite. Atunci produsul lor este o funcție uniform continuă.*

Soluție f și g fiind mărginită există $M>0$ a.î. $|f(x)|\leqslant M$ și $|g(x)|\leqslant M$, $(\forall)\ x\in A$. Fie $\varepsilon>0$ dat. Funcțiile f și g fiind uniform continue există $\delta>0$ a.î. $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\varepsilon/2M$ și $|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant\varepsilon/2M$, $(\forall)\ x_1, x_2\in A$, $|x_1-x_2|<\delta$ Atunci $(\forall)\ x_1, x_2\in A$, $|x_1-x_2|<\delta$ avem:

$$|(fg)(x_1)-(fg)(x_2)|\leqslant|f(x_1)-f(x_2)|\cdot|g(x_1)|+$$
$$+|g(x_1)-g(x_2)|\cdot|f(x_2)|\leqslant\varepsilon/2M\cdot M\ \dot{+}\ \varepsilon/2M\cdot M=\varepsilon,$$

deci fg este uniform continuă.

Observație. Dacă f și g nu sînt mărginite Ex. 5.6.11., nu este numaidecît adevărat.

Contraexemplu. Fie $f=1_{\mathbf{R}}$ și $g=\sin$. Atunci $h=fg$ nu este uniform continuă, deoarece pentru $x_1=2n\pi+\delta$, $x_2=2n\pi$, avem $h(x_1)-h(x_2)=(2n\pi+\delta)\sin\delta\to\infty$ $(n\to\infty)$.

5.6.12. Exercițiu. *Fie $A\subseteq\mathbf{R}$ o mulțime α-discretă ($|x-y|\geqslant\alpha$, $(\forall)\ x, y\in A$, $x\neq y$). Atunci orice funcție $f:A\to\mathbf{R}$ este uniform continuă.*

Soluție. Într-adevăr, $(\forall)\ \varepsilon>0$ și $0<\delta<\alpha$ avem:

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon,\ (\forall)\ x, y\in A,\ |x-y|<\delta$$

În particular orice funcție $f:A\to\mathbf{R}$, unde $A\subseteq\mathbf{Z}$, este uniform continuă.

5.6.13. Exercițiu. *Fie $A\subseteq\mathbf{R}$ o mulțime și $f:A\to\mathbf{R}$ o funcție uniform continuă. Atunci $|f|$ este uniform continuă.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Funcția f fiind uniform continuă există $\delta > 0$ a.î.

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon, (\forall), x, y \in A, |x - y| \leqslant \delta.$$

Atunci

$$||f(x)| - |f(y)|| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon, (\forall)\ x, y \in A, |x - y| \leqslant \delta,$$

deci $|f|$ este uniform continuă.

Observație. Reciproca Ex. 5.6.13. nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu. Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = 1$, $(\forall)\ x \in Q$ și $f(x) = -1, (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus Q$, nu este continuă în nici un punct în timp ce $|f| = 1$, deci $|f|$, este uniform continuă.

5.6.14. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $f: A \to \mathbf{R}$ o funcție; să punem* $\omega_f(\delta) = \sup \{|f(x_1) - f(x_2)|;\ x_1, x_2 \in A, |x_1 - x_2| \leqslant \delta\}$, $\delta > 0$ (*„modulul de continuitate”*) *și* $\omega_f = \inf_{\delta > 0} \omega_f(\delta)$. *Atunci f este uniform continuă* $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \omega_f = 0$.

Soluție. ($\Rightarrow$) Fie $\varepsilon > 0$, fixat. Funcția f fiind uniform continuă există $\delta > 0$ a.î.

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \varepsilon, (\forall)\ x_1, x_2 \in A, |x_1 - x_2| \leqslant \delta,$$

deci $\omega_f \leqslant \omega_f(\delta) \leqslant \varepsilon$ și cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, iar ω_f nu depinde de ε, rezultă că $\omega_f = 0$.

($\Leftarrow$) Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Dacă $\omega_f = 0$, din definiția marginii inferioare, rezultă că există $\delta > 0$ a.î. $\omega_f(\delta) \leqslant \varepsilon$, deci

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \varepsilon, (\forall)\ x_1, x_2 \in A, |x_1 - x_2| \leqslant \delta$$

și deci f este uniform continuă.

5.6.15. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval. Dacă orice funcție continuă $f: I \to \mathbf{R}$ este uniform continuă, atunci I este compact.*

Soluție. Presupunem că I nu admite majoranți. Atunci există $a \in I$ a.î. $(a, \infty) \subseteq I$. Funcția $f(x) = x^2$, $x \in I$, este continuă și nu este uniform continuă, altfel pentru $\varepsilon = 1$ ar exista $\delta > 0$ a.î.

$$|x^2 - y^2| \leqslant 1, (\forall)\ x, y \geqslant a, |x - y| \leqslant \delta$$

Înlocuind y cu $x + \delta$, deducem că

$$|x^2 + 2x\delta| \leqslant 1, (\forall)\ x \geqslant a$$

Contradicția obținută dovedește că I admite majoranți și analog I admite minoranți, deci I este mărginită.

Dacă $b = \sup I \notin I$, atunci funcția $f(x) = \dfrac{1}{b - x}$, $x \in I$, este continuă și nemărginită, absurd (T.5.5. 17. Cor. 1). Așadar $\sup I \in I$ și analog $\inf I \in I$, deci I este închis, prin urmare compact.

5.6.16. Exerciţiu. *Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție subadditivă a.î. $f(0) = 0$. Atunci f este uniform continuă $\Leftrightarrow$ f este continuă în 0.*

Soluție. ($\Leftarrow$) Evident $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$ avem :

$$f(x) = f(x - y + y) \leqslant f(x - y) + f(y),$$

deci

$$f(x) - f(y) \leqslant f(x - y) \tag{1}$$

$$f(y) - f(x) \leqslant f(y - x) \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (1) şi (2) rezultă :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \max \{f(x-y), f(y-x)\} \tag{3}$$

Fie acum $\varepsilon > 0$ dat ; f fiind continuă în 0, $(\exists)\ \eta > 0$ a.î.

$$|f(t)| = |f(t) - f(0)| < \varepsilon, (\forall)\ t \in \mathbf{R},\ |t| < \eta \tag{4}$$

Din (3) şi (4) deducem :

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon\ (\forall)\ \ x, y \in \mathbf{R},\ |x - y| < \eta,$$

prin urmare f este uniform continuă.

Corolar 1. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie aditivă. Atunci f este uniform continuă $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f$ este continuă $\Leftrightarrow f$ este continuă în 0.*

Observaţie. Dacă $f(0) \neq 0$, Ex. 5.6.16. nu este numaidecît adevărat.

5.6.17. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ o funcţie uniform continuă cu proprietatea* $(\forall)\ x \in \mathbf{R}, \lim\limits_{n\to\infty} f(x+n) = 0\ (n \in \mathbf{N})$. *Atunci* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Soluţie. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, a.î.

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon/2\ (\forall)\ |x - y| \leqslant \delta \tag{1}$$

Evident există $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_p = 1$ cu proprietatea că $x_i - x_{i-1} < \delta$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$. Deoarece $(\forall)\ i = \overline{1, p}$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_i + n) = 0$, deci există $N \geqslant 1$ cu

$$|f(x_i + n)| \leqslant \varepsilon/2, (\forall)\ i = \overline{1, p}, (\forall)\ n \geqslant N \tag{2}$$

Fie acum $x > N$ fixat. Dacă $n = [x]$, avem $0 \leqslant x - n < 1$, deci există $j = \overline{1, p}$ cu $|x - n - x_j| < \delta$. Atunci ţinînd cont de (1) şi (2) deducem :

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(x_j + n)| + |f(x_j + n)| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Aşa dar $|f(x)| < \varepsilon$, $(\forall)\ x > N$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

5.6.18. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă şi periodică. Atunci f este uniform continuă.*

Soluţie f fiind periodică există $T > 0$ a.î. $f(x + T) = f(x)$ $(\forall)\ \ x \in \mathbf{R}$ (*) Fie $\varepsilon > 0$ fixat. $[0, T]$ este o mulţime mărginită şi închisă, deci compactă. Funcţia f fiind continuă pe $\mathbf{R}$ deci pe $[0, T]$ rezultă (T.5.7.8.) că f este uniform continuă pe $[0, T]$. Atunci există $0 < \eta = \eta(\varepsilon) < T$ a.î. $(\forall)\ x_1, x_2 \in [0, T]$, $|x_1 - x_2| < \eta$ să avem $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon/2$. De aici şi din (*) deducem :

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon/2, (\forall)\ x_1, x_2, \in [nT, (n+1)\ T]\ (n \in \mathbf{Z}), |x_1 - x_2) < \eta$$

Fie acum $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ arbitrari cu $|x_1 - x_2| < \eta$. Evident există $n \in \mathbf{Z}$ a.î. $x_1, x_2 \in [nT, (n+2)\ T]$, deci

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - f((n+1)\ T)| + f|((n+1)\ T) - f(x_2) \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Prin urmare f este uniform continuă

5.6.19. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea :* $(\exists)\ \varepsilon > 0$ *şi* $\delta > 0$ *a.î.* $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ x, y \in I$, $|x - y| \leqslant \delta$. *Atunci există* $\alpha, \beta \geqslant 0$ *a.î.* $|f(x)| \leqslant \alpha|x| + \beta, (\forall)\ x \in I$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $I = I_1 \cup I_2$, unde $I_1 = \{x \in I ; x \geqslant 0\}$ și $I_2 = \{x \in I ; x < 0\}$. Fie $a \in I_1$ a.î. $\inf I_1 \leqslant a < \delta + \inf I_1$. Atunci $(\forall)\ x \in I_1$, există $n = n_x \geqslant 0$ a.î. $a \leqslant x - n\delta < \delta$, deci $n \leqslant \frac{1}{\delta} x$ (fig. 14).

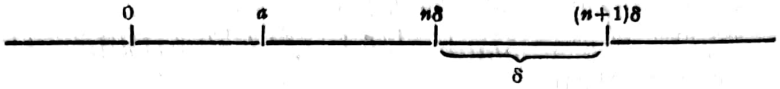


Fig. 14

Dacă $n \geqslant 1$, avem succesiv :

$$|f(a) - f(n\delta)| \leqslant |f(a) - f(\delta)| + |f(\delta) - f(2\delta)| + \ldots$$

$$\ldots + f|(n-1)\,\delta) - f(n\delta)| \leqslant n\varepsilon \leqslant \frac{1}{\delta} x\,\varepsilon$$

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(n\delta)| + |f(n\delta) - f(a)| + |(f)a)| \leqslant \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\delta} x + |f(a)|$$

Dacă $n=0$, atunci $|x-a| < \delta$, deci $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ și deci $|f(x)| < \varepsilon + |f(a)|$.

Prin urmare $|f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} x + \varepsilon + |f(a)|$, $(\forall)\ x \in I_1$

Mai departe notăm $g(x) = f(-x)$, $(\forall)\ x \in J = -I_2$ și fie $b \in J$ a.î. $\inf J \leqslant b < \delta + \inf J$. Din calculul făcut rezultă :

$$|f(-x)| = |g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} x + \varepsilon + |g(b)| = \frac{\varepsilon}{\delta} |-x| + \varepsilon + |f(-b)|\ (\forall)\ x \in J,$$

deci

$$|f(x')| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} |x'| + \varepsilon + |f(-b),\ (\forall)\ x' \in I_2$$

Condiția din enunț este satisfăcută pentru numerele $\alpha = \frac{\varepsilon}{\delta}$ și $\beta = \varepsilon +$ $+ \max\{|f(a)|, |f(-b)|\}$

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \subseteq \mathbf{R}$ o funcție uniform continuă. Atunci există $\alpha, \beta > 0$ a.î. $|f(x)| \leqslant \alpha|x| + \beta$, $(\forall)\ x \in I$.*

Corolar 2. *Funcțiile $x \to x^n$, $x \in \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ $x \to x^p$, $x \in \mathbf{R}_+$, $(p > 0)$, nu sînt uniform continue.*

5.6.20. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție aproape periodică în sensul lui H. Bohr : $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \eta > 0$ cu proprietatea că pentru orice interval $I \subseteq \mathbf{R}$ cu $|I| \leqslant \eta$, există $\xi \in I$ a.î. $|f(x) - f(x + \xi)| \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Atunci f este uniform continuă.*

Soluție. Fie $\varepsilon > 0$ fixat și $\eta > 0$ cu proprietatea din enunț. Deoarece mulțimea $[-\eta, \eta]$ este compactă și f continuă, rezultă că f este uniform continuă pe $[-\eta, \eta]$. Există atunci $\delta > 0$ a.î.

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ x, y \in [-\eta, \eta],\ |x - y| \leqslant \delta \qquad (1)$$

Fie $x, y \in \mathbf{R}$ fixaţi cu $|x = y| \leqslant \delta' = \min\{\delta, \eta\}$. Să presupunem că $x < y$. Cf. ipotezei există $\xi \in [x, y]$ a.î.

$$|f(t) - f(t + \xi)| \leqslant \varepsilon, \ (\forall)\ t \in \mathbf{R} \tag{2}$$

Evident $x' = x - \xi \in [-\eta, 0]$, $y' = y - \xi \in [0, \eta]$ şi $0 < y' - x' = y - x < \delta$, deci din (1) şi (2) deducem :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(x - \xi)| + |f(x') - f(y')| + |f(y - \xi) - f(y)| \leqslant 3\varepsilon$$

şi deci f este uniform continuă.

5.6.21. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $a = \inf I < c < \sup I = b$ şi $f : I \setminus \{c\} \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Dacă f are limită finită în fiecare punct $x_0 \in \{a, c, b\}$, atunci f este uniform continuă. Reciproc, dacă f este uniform continuă şi $x_0 \in \{a, b, c\} \cap \mathbf{R}$, atunci f are limită finită în x_0.*

Soluţie. Presupunem că f are limită finită în punctele a, b, c şi fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci cf. criteriului lui Cauchy (T.5.3.10) există $a < d_1 < d_2 < c < d_3 < d_4 < b$ a.i.

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon, \ (\forall)\ x, y \in [a, d_1] \cap I;\ x, y \in [d_2, d_3] \setminus \{c\};\ x, y \in [d_3, b] \cup I.$$

Funcţia f fiind continuă şi intervalele $[d_1, d_2]$, $[d_3, d_4]$ compacte, este uniform continuă pe fiecare din aceste intervale, deci există $\eta > 0$ a.î.

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon, (\forall)\ x, y \in [d_1, d_2]; (\forall)\ x, y \in [d_3, d_4];\ |x - y| < \eta$$

Evident putem presupune că

$$0 < \eta < \min\{d_1 - a, d_2 - d_1, c - d_2, d_3 - c, d_4 - d_3, b - d_4\}$$

Atunci $(\forall) x, y \in I \setminus \{c\}$, $|x - y| < \eta$, există $i = \overline{1,4}$, cu $|x - d_i| < \eta$, $|y - d| < \eta$, deci

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(d_i)| + |f(d_i) - f(y)| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

şi deci f este uniform continuă.

Presupunem acum că f este uniform continuă şi $x_0 \in \{a, b, c\} \cap \mathbf{R}$. Atunci x_0 este punct de acumulare în $\mathbf{R}$ a lui I, deci (P.5.7.5. Cor. 1) f are limită finită în x_0.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval $a_0 = \inf I < a_1 < \ldots < a_n = \sup I$ şi $f : I \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\} \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Dacă f are limită finită în fiecare punct $x_0 \in \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, atunci f este uniform continuă. Reciproc, dacă f este uniform continuă şi $x_0 \in \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \cap \mathbf{R}$, atunci f are limită finită în x_0.*

Corolar 2. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval mărginit, $a_0 = \inf I < a_1 < \ldots < a_n = \sup I$ şi $f : I \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\} \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Atunci f este uniform continuă $\Leftrightarrow$ f are limită finită în fiecare punct $x_0 \in \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$.*

Corolar 3. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie monotonă şi mărginită. Atunci f este uniform continuă $\Leftrightarrow$ f este continuă.*

Soluţie. ($\Leftarrow$) f fiind monotonă şi mărginită admite limite finite la capetele intervalului. Aplicăm mai departe Ex. 5.6.21.

Corolar 4. *Fie $f : [a, \infty) \to \mathbf{R}$ o funcţie uniform continuă. Dacă $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ există şi este finită, atunci f este uniform continuă.*

Aplicaţie. Funcţiile următoare 1° $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in (0,1)$; $f(x) = x \operatorname{are} \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$; $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin x$, $x \in (a, \infty)$, $(a > 0)$ sînt uniform continui.

Funcţia $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin x$, $x \in (0,1)$ nu este uniform continuă.

Scanned with OKEN Scanner

Observaţia 1. Dacă I este interval mărginit, rezolvarea Ex. 5.6.21. se simplifică. În acest caz prelungim prin continuitate f pe $\bar{I}$ şi ţinem seama că o funcţie continuă pe un compact este uniform continuă (v. T.5.7.8. Cor. 2).

Observaţia 2. O funcţie uniform continuă pe un interval nemărginit, nu are numaidecît limită finită în punctele de la infinit ale intervalului.

Contraexemplu. Funcţia $\mathbf{1}_{\mathbf{R}}$ are limite infinite la $+\infty$.

5.6.22. Exerciţiu. *Fie* $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ *o funcţie continuă. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)=0$$

Soluţie. Fie $\varepsilon>0$ fixat. Funcţia f fiind continuă şi $[0,1]$ compactă, rezultă că f este uniform continuă (T.5.7.8.) Există deci $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ a.î.

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon,\ (\forall)\ x,y\in[0,1],\ |x-y|\leqslant\delta$$

şi deci

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{(k+1)}{n}\right)\right|\leqslant\varepsilon,\ (\forall)\ \frac{1}{n}\leqslant\delta \text{ şi } 0\leqslant k\leqslant n-1$$

Fie $s_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)$. Vom arăta că

$$s_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n-1}^k\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]\ (\forall)\ n\geqslant 1 \tag{1}$$

Atunci $|s_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k=\frac{\varepsilon}{2^n}(1+1)^{n-1}=\frac{\varepsilon}{2}$ $(\forall)\ n\geqslant\frac{1}{\delta}$ şi deci $\lim_{n\to\infty}s_n=0$

Or avem evident $C_{n-1}^k=\frac{n-k}{n}C_n^k$; $C_n^k=\frac{k+1}{n-k}C_n^{k+1}$, deci

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^n\frac{n-k}{n}C_n^k\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{n-k}{n}C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{k+1}{n}C_n^{k+1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]=$$

$$=C_n^0 f(0)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{n-k}{n}C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)+\sum_{k=0}^{n-2}(-1)\frac{k+1}{n}C_n^{k+1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)+$$

$$+(1)^n C_n^n f(1)=C_n^0+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)+(-1)^n C_n^n f(1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Relaţia (1) şi deci relaţia din enunţ este arătată

CALCUL DIFERENȚIAL

6.1. Funcții derivabile

6.1.1. Exercițiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{1 + x^2}}$. *Atunci* f *este derivabilă în* $x_0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0$.

Soluție. Fie $f_1(x) := |x|$, $x \in \mathbf{R}$ și $f_2(x) := \sqrt{1 + x^2}$, $x \in \mathbf{R}$. Evident avem: f_1 derivabilă în $x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$; f_2 este derivabilă pe $\mathbf{R}$.

($\Rightarrow$) Dacă f este derivabilă în x_0, rezultă (T. 6.1.9.) că $f \circ f_2 = f_1$ este derivabilă în x_0, deci f_1 este derivabilă în x_0 și deci $x_0 \neq 0$.

Implicația ($\Leftarrow$) rezultă din T.6.1.9.

6.1.2. Exercițiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = |x - a| \sin x$, $x \in \mathbf{R}$. *Atunci* f *este derivablilă pe* $\mathbf{R} \Leftrightarrow a \in \pi\,\mathbf{Z}$.

Soluție. Deoarece funcția $\mathbf{R} \ni x \mapsto |x - a| \in \mathbf{R}$ este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{a\}$, rezultă că f este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{a\}$. Așadar f derivabilă pe $\mathbf{R} \Leftrightarrow f$ derivabilă în a. Cum avem:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{|x - a|}{x - a} \sin x, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{a\},$$

rezultă $f'_s(a) = \lim\limits_{x \nearrow a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\sin a$ și analog $f'_d(a) = \sin a$. Prin urmare f are derivata laterale în a, deci: f derivabilă în $a \Leftrightarrow f'_s(a) = f'_d(a) \Leftrightarrow -\sin a = \sin a \Leftrightarrow \sin a = 0 \Leftrightarrow a \in \pi\,\mathbf{Z}$.

6.1.3. Exercițiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = (x - a)\,|x - b|$, *unde* $a, b \in \mathbf{R}$ *sînt fixați. Atunci* f *este derivabilă pe* $\mathbf{R} \Leftrightarrow a = b$.

Soluție. ($\Rightarrow$) Presupunem $a \neq b$. Deoarece f este derivabilă pe $\mathbf{R}$, rezultă că funcția:

$$\mathbf{R} \setminus \{a\} \ni x \mapsto \frac{f(x)}{x - a} = |x - b|,$$

este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{a\} \ni b$, absurd.

($\Leftarrow$) Evident funcția $f(x) = (x - a)\,|x - a|$, $x \in \mathbf{R}$, este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{a\}$. Cum avem:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} |x - b| = |a - b|,$$

rezultă că f este derivabilă în b, deci pe $\mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Corolar 1. *Funcția* $\mathbf{R} \ni x \mapsto x^2 \operatorname{sign} x$ *este derivabilă pe* $\mathbf{R}$.

Observație. Fie $a \in \mathbf{R}$ fixat. Atunci funcția $f(x) = (x-a)|x-a|$, $x \in \mathbf{R}$ este indefinit derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{a\}$ și numai o singură dată în a.

6.1.4. Exercițiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = x|x-a| + |x-b|$, *unde* $a, b \in \mathbf{R}$ *sînt fixați. Atunci* f *este derivabilă pe* $\mathbf{R} \Leftrightarrow a = b = -1$.

Soluție. ($\Rightarrow$) Considerăm funcțiile $f_1(x) = x|x-a|$, $x \in \mathbf{R}$ și $f_2(x) = |x-b|$. $x \in \mathbf{R}$. Dacă $a = 0$, rezultă (Ex 6.1.3.) $f - f_1 = f_2$ derivabilă pe $\mathbf{R}$, absurd, deci $a \neq 0$. Cum prin ipoteză f este derivailă pe $\mathbf{R}$ și f_1 este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{a\}$ și nederivabilă în a (Ex. 6.1.3.), rezultă că funcția $f - f_1$, i.e. funcția f_2, este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{a\}$ și nederivabilă în a. Cum f_2 este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{b\}$ și nederivabilă în b, conchidem că $a = b$. Obținem $f(x) = (x+1)|x-a|$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, de unde rezultă (Ex. 6.1.3) că $a = -1$.

($\Leftarrow$) Dacă $a = b = -1$, avem $f(x) = (x+1)|x+1|$, $x \in \mathbf{R}$ și aplicăm Ex. 6.1.3.

Generalizare. *Fie* $f : \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$, *unde* $a_i (i = \overline{1, n})$ *sînt fixați în* $\mathbf{R}$. *Atunci* f *este derivabilă pe* $\mathbf{R} \Leftrightarrow a_i = 1-n, (\forall) i = \overline{1, n}$.

6.1.5. Exercițiu. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ *distincte între ele. Să se construiască o funcție* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *cu proprietățile* : f *continuă pe* $\mathbf{R}$, *derivabilă pe* $\mathbf{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, *și nederivabilă pe* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Soluție. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = \prod_{i=1}^{n} |x - a_i|$, $x \in \mathbf{R}$

Deoarece funcția $f_i(x) = |x - a_i|$, $x \in \mathbf{R}$ este continuă pe $\mathbf{R}$ și derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{a_i\}$, rezultă că $f = \prod_i f_i$ este continuă pe $\mathbf{R}$ și derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Evident avem :

$$\frac{f(x) - f(a_1)}{x - a_1} = \frac{|x - a_1|}{x - a_1} \prod_{i=2}^{n} |x - a_i|, \ (\forall)\ x \neq a_1 ;$$

deci

$$f'_s(a_1) = \lim_{x \nearrow a_1} \frac{f(x) - f(a_1)}{x - a_1} = -\prod_{i=2}^{n} |a_1 - a_i|,$$

$$f'_d(a_1) = \prod_{i=2}^{n} |a_1 - a_i|$$

Numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ fiind distincte, avem $\prod_{i=2}^{n} |a_1 - a_i| > 0$, deci $f'_s(a_1) < 0 < f'_d(a_1)$ și deci f nu este derivabilă în a_1. Analog se arată că f nu este derivabilă în a_i $(i = \overline{2, n})$.

6.1.6. Exercițiu. *Să se construiască o funcție* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *derivabilă în* m *puncte date* $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbf{R}$ *și discontinuă pe* $\mathbf{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

Soluție. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$, dacă $x \in \mathbf{Q}$ și $f(x) = 0$, dacă $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Atunci $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, $x \neq a_k$, avem :

$$\frac{f(x) - f(a_k)}{x - a_k} = \begin{cases} (x - a_k) \prod_{i \neq k} (x - a_i)^2, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} ; \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$f'(a_k) = \lim_{x \to a_k} \frac{f(x) - f(a_k)}{x - a_k} \text{ există și este } 0.$$

Fie $x_0 \in \mathbf{R}\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, fixat. Dacă $r_n \in \mathbf{Q}$, $r_n \to x_0$ și $i_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $i_n \to x_0$, atunci $f(r_n) \to \prod_{i=1}^{m} (x_0 - a_i)^2 \neq 0$ și $f(i_n) \to 0$, deci f este discontinuă în x_0.

6.1.7. Exercițiu. *Fie $f; : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = \max\{\sin x, \lambda + \cos x\}$, $x \in \mathbf{R}$, unde λ este parametru real. Atunci f derivabilă pe $\mathbf{R} \Leftrightarrow |\lambda| \geqslant \sqrt{2}$.*

Soluție. Fie $h(x) = \sin x - \lambda - \cos x$, $x \in \mathbf{R}$. Evident avem:

$$h(x) = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \lambda =$$

$$= 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\frac{\pi}{4} - \lambda = \sqrt{2}\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right), \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Deoarece $f = \frac{1}{2}(h + |h|)$, rezultă: f derivabilă pe $\mathbf{R} \Leftrightarrow |h|$ derivabilă pe $\mathbf{R}$. Dacă $\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \geqslant 1$, avem $|h(x)| = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deci $|h|$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$; raționament analog dacă $\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \leqslant -1$. Dacă $\left|\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right| < 1$, există $x_0 - \frac{\pi}{4} \in \mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\right)$ cu $\sin\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$, deci $h(x_0) = 0$ și atunci (P.6.1.11.Cor. 1): $|h|$ derivabilă în $x_0 \Leftrightarrow h'(x_0) = 0$. Cum evident $h'(x_0) = \cos\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$, rezultă că $|h|$ nu este derivabilă în x_0.

Prin urmare: f derivabilă pe $\mathbf{R} \Leftrightarrow \left|\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right| \geqslant 1 \Leftrightarrow |\lambda| \geqslant \sqrt{2}$.

Corolar 1. *Fie $f(x) = \max\{\sin x - \lambda, \cos x + \lambda\}$, $x \in \mathbf{R}$, unde λ e un parametru real. Atunci f e derivabilă pe $\mathbf{R} \Leftrightarrow |\lambda| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.*

Soluție. f derivabilă pe $\mathbf{R} \Leftrightarrow f + \lambda$ derivabilă pe $\mathbf{R} \Leftrightarrow \max\{\sin, \cos + 2\lambda\}$ derivabilă pe $\mathbf{R} \Leftrightarrow |2\lambda| \geqslant \sqrt{2}$.

6.1.8. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = x^2 \left|\sin \frac{1}{x}\right|$, dacă $x \neq 0$ și $f(0) = 0$. Atunci f este continuă pe $\mathbf{R}$, derivabilă în 0 și nederivabilă pe nici o vecinătate a lui 0.*

Soluție. Deoarece $\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| \leqslant |x|$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, rezultă că f este derivabilă în 0 și avem $f'(0) = 0$, Presupunem că există $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, a.î. f este derivabilă pe V.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci funcţia $x \mapsto \frac{f(x)}{x^2}$, $0 < |x| < \varepsilon$, este derivabilă, deci funcţia $x \mapsto |\sin \frac{1}{x}|$, $0 < |x| < \varepsilon$, este derivabilă, absurd. Evident funcţia $|\sin|$ nu este derivabilă în punctele x pentru care $\frac{1}{x} \in \pi \mathbf{Z}$ şi $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

6.1.9. Exerciţiu. *Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ un polinom. Să se arate că nu există $-1 < a < b < +\infty$ a.î. să avem :*

$$P(x) = \ln(1 + x), \quad (\forall)\, x \in (a, b) \tag{1}$$

Soluţie. Presupunem contrariul şi fie $n = \text{grad } P$. Atunci derivînd relaţia (1) de $n + 1$ ori obţinem :

$$0 = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}, \quad (\forall)\, x \in (a, b).$$

absurd.

Observaţie. Putem înlocui ln prin sin, cos, exp. etc.

6.1.10. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel $f(x) = \text{arc tg}\frac{1+x}{1-x}$, dacă $x \neq 1$, şi $f(1) = 0$. Atunci f este discontinuă în 1, derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ şi $\lim_{x \to 1} f'(x)$ există.*

Soluţie. Evident f este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ şi avem :

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1+x^2},$$

deci

$$\lim_{x \to 1} f'(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}.$$

Deoarece

$$f(1-) = \lim_{x \nearrow 1} \text{arc tg}\frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{2}\,; \quad f(1+) = \lim \text{arc tg}\frac{1+x}{1-x} = -\frac{\pi}{2},$$

rezultă că f este discontinuă în 1.

6.1.11. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $x_0 \in I$ un punct şi $f, g : I \to \mathbf{R}$ două funcţii cu proprietăţile : f continuă în x_0 şi g derivabilă în x_0. Dacă funcţia $h = f \cdot g$ este derivabilă în x_0, rezultă de aici că f este derivabilă în x_0?*

Ind. Răspunsul este negativ, după cum arată următorul contraexemplu :

$$f(x) = |x|, \ x \in \mathbf{R}\,; \quad g(x) = x, \ x \in \mathbf{R}\,; \quad x_0 = 0.$$

Dacă însă $g(x_0) \neq 0$, atunci f este derivabilă în x_0. Într-adevăr, din $g(x_0) \neq 0$ rezultă că există V o vecinătate a lui x_0 cu $g(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in V$, deci $f|_V = \frac{h}{g}|_V$ şi cum h şi g sînt derivabile în x_0, rezultă $\frac{h}{g}|_V$ adică $f|_V$ este derivabilă în x_0.

6.1.12. Exerciţiu. *Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcţii definite astfel $f(x) = [x]\sin^2 \pi x$, $g(x) = [x]\cos^2 \pi x$. Atunci : 1° f este derivabilă pe $\mathbf{R}$; 2° g este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ şi discontinuă pe $\mathbf{Z}$.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Funcția $x \mapsto [x]$, $x \in \mathbf{R}$, fiind derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, rezultă că f și g sînt derivabile pe $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Evident $(\forall)\ n \in \mathbf{Z}$ avem : $f(x) = (n-1)\sin^2 \pi x$, dacă $n - 1 \leqslant x < n$ și $f(x) = n \sin^2 \pi x$, dacă $n \leqslant x < n + 1$, deci

$$\frac{f(x) - f(n)}{x - n} = \begin{cases} \dfrac{(n-1)\sin^2 \pi x}{x - n}, & n - 1 < x < n \\ \dfrac{n \sin^2 \pi x}{x - n}, & n < x < n + 1 \end{cases}$$

Prin trecere la limită $x \nearrow n$, resp. $x \searrow n$, deducem că $f'_s(n) = f'_d(n) = 0$, deci f este derivabilă în n și avem $f'(n) = 0$.

Deoarece $\lim \cos^2 \pi x = 1$, rezultă că $g(n-1) = n - 1$ și $g(n+) = n$, deci g nu este continuă în n.

6.1.13. Exercițiu. *Fie V o vecinătate a lui 0, $f : V \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă în 0 și $g(x) = f(|x|)$, $x \in V$. Atunci g este derivabilă în $0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$.*

Soluție. Evident avem :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}, & x \in V \cap (0, \infty) \\ \dfrac{f(-x) - f(0)}{-x - 0}, & x \in V \cap (-\infty, 0) \end{cases}$$

Cum f' este derivabilă în 0, rezultă că $g'_d(0) = f'(0)$ și $g'_s(0) = -f'(0)$. Atunci g este derivabilă în $0 \Leftrightarrow g'_s(0) = g'_d(0) \Leftrightarrow -f'(0) = f'(0) \Leftrightarrow f'(0) = 0$.

Exemple. Funcția $x \mapsto \cos |x|$, $x \in \mathbf{R}$, este derivabilă în 0, în timp ce funcția $x \mapsto \operatorname{tg} |x|$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ nu este derivabilă în 0.

6.1.14. Exercițiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime $x_0 \in A \cap A'$ un punct și $f, g : A \to \mathbf{R}$ două funcții continue în x_0 cu $f(x_0) \neq g(x_0)$. Atunci f și g sînt derivabile în $x_0 \Leftrightarrow$ funcțiile $s = f + g$ și $p = fg$ sînt derivabile în x_0.*

Soluție. ($\Leftarrow$) Presupunem că $f(x_0) < g(x_0)$. Funcțiile f și g fiind continue în x_0, există V o vecinătate a lui x_0 a.î. $f(x) < g(x)$, $(\forall)\ x \in A \cap V$. Pentru orice $x \in A \cap V$ soluțiile ecuației $t^2 - s(x)\,t + p(x) = 0$ sînt $f(x)$ și $g(x)$, deci cum $f(x) \leqslant g(x)$ avem relațiile :

$$f(x) = \frac{s(x) - \sqrt{s^2(x) - 4p(x)}}{2},\ g(x) = \frac{s(x) + \sqrt{s^2(x) - 4p(x)}}{2} \qquad (1)$$

Funcțiile s și p fiind derivabile în x_0 și

$$s^2(x_0) = 4\,p(x_0) = |f(x_0) - g(x_0)| > 0,$$

din (1) rezulttă că f și g sînt derivabile în x_0.

Observație. Dacă funcțiile f și g nu sînt continue în x_0, afirmația nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu. Fie f funcția lui Dirichlet și $g = 1 - f$. Atunci $s = f + g = 1$ și $p = f \cdot g = 0$, deci s și p sînt derivabile în timp ce f și g sînt discontinue.

6.1.15. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție și $g(x) = [x]\,f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ Să se arate afirmațiile :*

Scanned with OKEN Scanner

1° *Dacă f este continuă într-un punct $n \in \mathbf{Z}$, atunci g este continuă în $n \Leftrightarrow f(n) = 0$;*

2° *Dacă f este derivabilă într-un punct $n \in \mathbf{Z}$, atunci g este derivabilă în $n \Leftrightarrow f(n) = f'(n) = 0$;*

3 *Dacă f este derivabilă pe $\mathbf{R}$, atunci g este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ şi avem relaţia:*

$$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0, (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$$

Soluţie. 1° Evident avem $g(x) = \begin{cases} (n-1)f(x), & n-1 \leqslant x < n \\ nf(x), & n \leqslant x < n+1 \end{cases}$; deci

$$g(n-) = \lim_{x \nearrow n} g(x) = \lim_{x \nearrow n} (n-1)f(x) = (n-1)f(n)$$

$$g(n+) = \lim_{x \searrow n} g(x) = \lim_{x \searrow n} nf(x) = nf(n)$$

Atunci g este continuă în $n \Leftrightarrow g(n-) = g(n+) = g(n) \Leftrightarrow (n-1)f(n) = nf(n) \Leftrightarrow f(n) = 0$

2° Analog se deduce în cazul cînd $f(n) = 0$ că $g'_s(n) = (n-1)f'(n)$, $g'_d(n) = nf'(n)$. Deci g este derivabilă în $n \Leftrightarrow g'_s(n) = g'_d(n) \Leftrightarrow (n-1)f'(n) = nf'(n) \Leftrightarrow f'(n) = 0$.

3° Cum $g(x) = nf'(x)$, $(\forall)\ x \in (n, n+1)$, relaţia din enunţ se reduce la relaţia evidentă

$$n(f'(x)f(x) - f(x) \cdot f'(x)) = 0,\ (\forall)\ x \in (n, n+1)$$

Aplicaţie. Să se considere cazurile particulare:

$$g(x) = [x]\sin^2 \pi x;\ g(x) = [x]\cos^2 \pi x,\ x \in \mathbf{R}.$$

6.1.16. Exerciţiu. *Fie $a > 0$ şi $f, g : [-a, a] \to \mathbf{R}$ două funcţii a.î. $g(x) = |x|f(x)$, $(\forall)\ x \in [-a, a]$; presupunem că 1° $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ sau 2° f impară şi $\lim_{x \to 0} f(x)$ există. Atunci g este derivabilă în 0.*

Soluţie. Evident avem $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x} f(x)$, $(\forall)\ x \in [-a, a]$, $x \neq 0$.

1° Dacă $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, atunci $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x} f(x) = 0$, deci g este derivabilă în 0 şi avem $g'(0) = 0$.

Să observăm că dacă f este continuă în 0 şi $f(0) \neq 0$, atunci g are derivate laterale neegale în 0.

2° Dacă f este impară şi $\lim f(x)$ există, atunci

$$g'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{|x|}{x} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) \quad \text{şi}$$

$$g'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{|x|}{x} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{|-x|}{-x} f(-x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{|x|}{x} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x);$$

deci g este derivabilă în 0 şi avem $g'(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$.

6.1.17. Exerciţiu. *Fie* a, $\varepsilon > 0$, fixaţi şi $f, g : [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \to \mathbf{R}$ *două funcţii a.î.* $g(x) = (x - a) f(x)$ *şi* $\lim_{x \to a} f(x)$ *există şi este finită. Atunci* g *este derivabilă în* a *şi avem* $g'(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Soluţie. Evident avem $g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} f(x)$.

6.1.18. Exerciţiu. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime* $x_0 \in A \cap A'$ *un punct şi* $f, g : A \to \mathbf{R}$ *două funcţii a.î.* g *este mărginită într-o vecinătate a lui* x_0 *şi* $f(x) = (x - x_0)^2 \cdot g(x)$, $(\forall)\ x \in A$. *Atunci* f *este derivabilă în* x_0.

Soluţie. Cf. ipotezei $(\exists)\ M > 0$ şi V o vecinătate a lui x_0 a.î. $|g(x)| \leqslant M$, $(\forall)\ x \in V \cap A$. Evident avem :

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = |x - x_0| \cdot |g(x)| \leqslant M \cdot |x - x_0|, (\forall)\ x \in V \cap A \setminus \{x_0\},$$

deci $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ şi deci f este derivabilă în x_0.

6.1.19. Exerciţiu. *Fie* $a > 0$ *şi* $f : [-a, a] \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă. Dacă* f *este pară (resp. impară), atunci* f' *este impară (resp. pară).*

Soluţie. Fie f pară, adică $f(x) = f(-x)$, $(\forall)\ x \in [-a, a]$. Atunci evident $f'(x) = -f'(-x)$, $(\forall)\ x \in [-a, a]$, deci f' este impară.

6.1.20. Exerciţiu. *Să se arate identitatea :*

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1 - x)^2}, (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}.$$

Soluţie. Plecăm de la identitatea evidentă

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}.$$

Prin derivare se obţine :

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{-(n+1)x^n(1 - x) - (1 - x^{n+1})(-1)}{(1 - x^2)} =$$

$$= \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1 - x)^2}.$$

Corolar 1.

$$\lim_{n \to \infty} (1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}) = \frac{1}{(1 - x)^2},\ |x| < 1,$$

Observaţie. Identitatea cerută poate fi obţinută şi prin inducţie relativ la n sau prin calcul direct grupînd convenabil termenii din membrul stîng.

6.1.21. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă a.î.* $f(x + h) - f(x) = hf'(x)$, $(\forall)\ x, h \in \mathbf{R}$. *Atunci* f *este afină, deci* $(\exists)\ a, b \in \mathbf{R}$ *a.î.* $f(x) = ax + b$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Soluţie. Din ipoteză rezultă

$f(x + h) - f(x) = hf'(x)$ şi $f(h + x) - f(h) = xf'(h)$, $(\forall)\ x, h \in \mathbf{R}$.

Prin scădere deducem $-f(x) + f(h) = hf'(x) - xf'(h)$, care pentru $h = 0$ ne dă $f(x) = xf'(0) + f(0)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

6.1.22. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval. Să se construiască $f, g : I \to \mathbf{R}$ două funcţii care au proprietăţile : 1° f, g nederivabile ; 2° $f + g$ şi fg derivabile.*

Soluţie. Fie $f, g : I \to \mathbf{R}$ definite astfel :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & (\forall)\ x \in I \cap \mathbf{Q} \\ 0, & (\forall)\ x \in I \setminus \mathbf{Q} \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} 0, & (\forall)\ x \in I \cap \mathbf{Q} \\ 1, & (\forall)\ x \in I \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

Atunci funcţiile f şi g satisfac condiţiile din enunţ.

6.1.23. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f, g : I \to \mathbf{R}$ două funcţii cu proprietăţile : f derivabilă, $f > 0$, şi $g(x) = f(x) \cdot \sin x, (\forall)\ x \in I$. Atunci graficele lui $\pm f$ şi g au tangentă comună în punctele în care se intersectează.*

Soluţie. Fie $(x_0, y_0) \in G_f \cap G_g$. Atunci $f(x_0) = g(x_0)$, deci $f(x_0) = f(x_0) \cdot \sin x_0$ şi deci $\sin x_0 = 1$, încît $\cos x_0 = 0$.

Evident avem $g'(x_0) = f'(x_0) \sin x_0 + f(x_0) \cos x_0 = f'(x_0)$, deci în x_0 cele două grafice G_f şi G_g au o tangentă comună.

6.1.24. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$, unde $a_k \in \mathbf{R}$, şi $n \in \mathbf{N}$ sînt fixaţi. Dacă $|f(x))| \leqslant |\sin x|$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, atunci $|\sum_{k=1}^{n} k a_k| \leqslant 1$.*

Soluţie. Evident avem $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k \cos k x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$; deci

$$|\sum_{k=1}^{n} k a_k| = |f'(0)| = \lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\left| \frac{f(x)}{\sin x} \right| \cdot \left| \frac{\sin x}{x} \right| \right) \leqslant 1 \cdot \lim_{x \to 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 1.$$

6.1.25. Exerciţiu. *Fie $a > 0$ şi $f : [-a, a] \to \mathbf{R}$ o funcţie pară. Atunci :*
1° $f'_d(0)$ există $\Leftrightarrow f'_s(0)$ există şi avem $f'_d(0) = -f'_s(0)$;
2° Dacă f este derivabilă în 0 rezultă $f'(0) = 0$.

Soluţie. 1° Pentru $(\forall)\ x \in (0, a)$ evident avem : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{f(-x) - f(0)}{-x - 0}$, deci $\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ există $\Leftrightarrow \lim_{x \searrow 0} \frac{f(-x) - f(0)}{-x - 0}$ există. Aşadar $(\exists) f'_d(0) \Leftrightarrow (\exists) f'_s(0)$; în acest caz avem $f'_d(0) = -f'_s(0)$.

2° Dacă f este derivabilă în 0, atunci $f'_d(0) = f'(0) = f'_s(0)$ şi cum $f'_d(0) = -f'_s(0)$, deducem că $f'(0) = 0$.

Analog avem : *Dacă $f : [-a, a] \to \mathbf{R}$ este impară şi $f(0) = 0$, atunci : 1° $(\exists) f'_s(0) \Leftrightarrow (\exists) f'_d(0)$ şi avem $f'_s(0) = f'_d(0)$; 2° f derivabilă în $0 \Leftrightarrow f$ admite o derivată laterală în 0.*

6.1.26. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $a \in \overset{\circ}{I}$; $f, g : I \to \mathbf{R}$ două funcţii derivabile în a a.î. $f(a) = g(a)$ şi $f \leqslant g$. Atunci $f'(a) = g'(a)$.*

Reciproca nu este numaidecît adevărată.

Soluţie. Să notăm $\varphi = f - g$. Atunci $\varphi \leqslant 0$, $\varphi(a) = 0$, φ derivabilă în a şi avem :

$$\frac{\varphi(a + h) - \varphi(a)}{h} = \frac{\varphi(a + h)}{h} \begin{cases} \geqslant 0, & h < 0 \\ \leqslant 0, & h > 0 \end{cases}$$

deci $\varphi'_s(a) \geqslant 0$, $\varphi'_d(a) \leqslant 0$ şi deci $\varphi'(a) = 0$, prin urmare $f'(a) = g'(a)$.

Scanned with OKEN Scanner

Contraexemplu. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval cu $0 \in I$ [şi $f, g : I \to \mathbf{R}$ unde

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & (\forall)\ x \in \mathbf{Q} \cap I \\ 0, & (\forall)\ x \in I \setminus \mathbf{Q} \end{cases}, \quad g(x) = x^3, \ (\forall)\ x \in I.$$

Evident f, g sînt derivabile în 0 şi $f(0) = g(0) = 0$. Totuşi pentru nici o vecinătate V a lui 0, f şi g nu sînt comparabile între ele.

Observaţia 1. Soluţia Ex. 6.1.26. rezultă şi din teorema lui Fermat.

Observaţia 2. Dacă $a \in I \setminus \mathring{I}$ Ex. 6.1.26. nu este numaidecît adevărat.

6.1.27. Exerciţiu. *Să se construiască o funcţie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *cu proprietăţile*: 1° $(\exists)\ A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime infinită a.î.* f *este derivabilă pe* A *şi* $f(a) = 1$, $(\forall)\ a \in A$; 2° $|f|$ *nu este derivabilă în nici un punct.*

Soluţie. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = \arcsin(\sin x)$, dacă $x \in \mathbf{Q}$ şi $f(x) = \sin x$, dacă $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ (fig. 15).

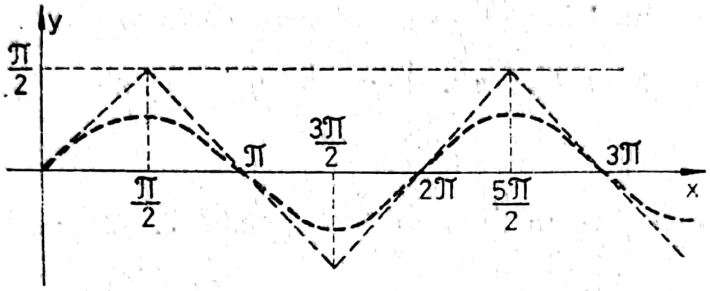


Fig. 15

Evident f este derivabilă pe mulţimea $\pi\mathbf{Z}$ şi discontinuă pe $R \setminus \pi Z$. Este clar că şi $|f|$ este discontinuă pe mulţimea $\mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$.

Deoarece $f'(k\pi) = (-1)^k$ şi $f(k\pi) = 0$, $(\forall)\ k \in \mathbf{Z}$, deducem că $|f|$ nu este derivabilă nici în punctele de forma $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, deci $|f|$ este nicăieri derivabilă pe $\mathbf{R}$.

Drept mulţime A putem lua mulţimea $2\pi\mathbf{Z}$

Dacă în definiţia lui f înlocuim sin cu $|\sin|$, atunci f nu este derivabilă în nici un punct şi este continuă numai pe A.

6.1.28. Exerciţiu. *Să se construiască o funcţie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *care să fie continuă şi derivabilă numai într-un singur punct* $x_0 \in \mathbf{R}$.

Soluţie. Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ fixat, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcţia lui Dirichlet şi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcţia $f(x) = (x - x_0)^2 g(x)$. Evident avem :

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = |(x - x_0)\, g(x)| \leqslant |x - x_0|, \quad (\forall)\ x \neq x_0.$$

De aici rezultă că f este derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) = 0$.

Să presupunem că f ar fi continuă într-un punct $a \in \mathbf{R} \setminus \{x_0\}$ şi fie $(x_n)_{n \geqslant 1}$ din $\mathbf{Q}$ $(x'_n)_{n \geqslant 1}$ din $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ două şiruri care converg la x_0. Atunci :

$$f(x_n) = (x_n - x_0)^2;\ f(x'_n) = 0, \ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

deci

$$0 = \lim_{n \to \infty} f(x'_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = (a - x_0)^2.$$

absurd, deoarece $a \neq x_0$.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare f este discontinuă în fiecare punct din $\mathbf{R} \setminus \{x_0\}$.

6.1.29. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $c \in \mathring{I}$ un punct, $f, g : I \to \mathbf{R}$ două funcţii derivabile şi fie $h : I \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel $h(x) = f(x)$, dacă $x \in I$, $x < c$ şi $h(x) = g(x)$, dacă $x \in I$, $x \geqslant c$. Atunci h este derivabilă în $c \Leftrightarrow f(c) = g(c)$ şi $f'(c) = g'(c)$.*

Soluţie. ($\Rightarrow$) h derivabilă în $c \Rightarrow h(c-) = h(c+) = h(c)$. Cum avem, evident, $h(c-) = \lim\limits_{x \nearrow c} f(x) = f(c)$ şi analog $h(c+) = g(c)$, rezultă $f(c) = g(c)$. De asemenea avem $h'_s(c) = h'_d(c)$. Deoarece

$$h'_s(c) = \lim_{x \nearrow c} \frac{f(x) - g(c)}{x - c} = \lim_{x \nearrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

şi analog $h'_d(c) = g'(c)$, conchidem că $f'(c) = g'(c)$ etc.

6.1.30. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă şi periodică. Atunci derivata sa f' este de asemenea periodică şi are aceeaşi perioadă.*

Soluţie. Funcţia f fiind periodică $(\exists)\ T > 0$ a.î.

$$f(x + T) = f(x),\ (\forall) x \in \mathbf{R} \qquad (1).$$

Derivînd relaţia (1) în raport cu x, obţinem (T. 6.1.10) $f'(x + T) = f'(x)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, deci f' este periodică.

Observaţie. Reciproca Ex. 6.1.30. nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu. Fie $f(x) = x + \sin x$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci f' este periodică, deşi f nu este periodică.

6.1.31. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval $x_0 \in \mathring{I}$ şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie care nu este derivabilă în x_0, însă admite derivate laterale. Dacă $f'_s(x_0) \cdot f'_d(x_0) < 0$, atunci x_0 este extrem local strict.*

Soluţie. Să presupunem că $f'_s(x_0) < 0$ şi $f'_d(x_0) > 0$.

Deoarece $f'_s(x_0) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$, există $\delta_1 > 0$ a.î.

$$x_0 - \delta_1 \in I \text{ şi } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0,\ (\forall)\ x \in (x_0 - \delta_1,\ x_0). \qquad (1)$$

Analog există $\delta_2 > 0$ a.î.

$$x_0 + \delta_2 \in I \text{ şi } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,\ (\forall)\ x \in (x_0,\ x_0 + \delta_2) \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$f(x) > f(x_0),\ (\forall)\ x \in (x_0 - \delta_1,\ x_0 - \delta_2) \setminus \{x_0\},$$

deci x_0 este minim local strict.

6.1.32. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie. Dacă f este derivabilă într-un punct $x_0 \in \mathring{I}$ atunci $(\forall)$ şirurile $(a_n)_{n \geqslant 1}$ şi $(b_n)_{n \geqslant 1}$ din I a.î. $a_n \nearrow x_0$ şi $b_n \searrow x_0$ rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x_0)$.*

Soluţie. Evident pentru $(\forall)\ n \geqslant 1$ avem identitatea

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{f(b_n) - f(x_0)}{b_n - x_0} \cdot \frac{b_n - x_0}{b_n - a_n} + \frac{f(x_0) - f(a_n)}{x_0 - a_n} \cdot \frac{x_0 - a_n}{b_n - a_n}.$$

Cum $\lambda_1 = \frac{b_n - x_0}{b_n - a_n} > 0$, $\lambda_2 = \frac{x_0 - a_n}{b_n - a_n} > 0$ și $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, din P. 2.1.32. deducem:

$$\min\left\{\frac{f(x_0) - f(a_n)}{x_0 - a_n}, \frac{f(b_n) - f(x_0)}{b_n - x_0}\right\} \leqslant \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\frac{f(x_0) - f(a_n)}{x_0 - a_n}, \frac{f(b_n) - f(x_0)}{b_n - x_0}\right\} \tag{1}$$

Prin ipoteză f este derivabilă în x_0, deci

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x_0) - f(a_n)}{x_0 - a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(b_n) - f(x_0)}{b_n - x_0} = f'(x_0).$$

Atunci din (1) rezultă că $\lim_{n \to \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$ există și este egală cu $f'(x_0)$

6.1.33. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție periodică și de clasă $\mathcal{C}^1$. Atunci f este lipschitziană.*

Soluția 1. f fiind periodică, rezultă (Ex. 6.1.30.) că f' este periodică, deci, f' fiind continuă, avem evident că f' este mărginită. Aplicăm mai departe (T. 6.3.4. Cor. 6.).

Soluția 2. Fie $T > 0$ o perioadă a lui f. Evident funcția $f|_{[0,T]}$ satisface condițiile teoremei 6.3.4 Cor. 6, deci $(\exists)$ $\lambda > 0$, a.î.

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \lambda |x_1 - x_2|, \quad (\forall)\ x_1, x_2 \in [0, T]$$

Fie acum $x, y \in \mathbf{R}$ arbitrari. Atunci există $n, m \in \mathbf{Z}$ cu $x + nT \in [0, T]$ și $y + mT \in [0, T]$, deci

$$|f(x + nT) - f(y + mT)| \leqslant \lambda |x - y - (m - n) T|,$$

de unde rezultă, în ipoteza $m > n$, că

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \lambda |x - y|,$$

prin urmare f este λ - lipschitziană.

Observație. Nu orice funcție derivabilă este numaidecît lipschitziană.

Contraexemplu Fie $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = x^p \sin \frac{1}{x}$, dacă $x \in (0, 1]$ și $f(0) = 0$, unde $1 < p < 2$ este fixat. Atunci f este derivabilă și nu este lipschitziană, deoarece pentru $a_n := \frac{1}{2n\pi}$ și $b_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$,

avem $\frac{|f(a_n) - f(b_n)|}{|a_n - b_n|} \to \infty$ $(n \to \infty)$.

6.1.34. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $a \in \mathring{I}$ și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție care are derivate laterale însă nu are derivată în a. Atunci $(\forall)/(\exists)$, $n \geqslant 2$ $(f)^n$ este derivabilă în $a \Leftrightarrow f(a) = 0$.*

Soluție. Deoarece f are derivate laterale în a rezulta (P.6.1.4.) că f este continuă în a. Evident pentru $(\forall)$ $x \in I$, $x \neq a$ și $n \geqslant 2$ avem $(f^n := (f)^n)$

$$\frac{f^n(x) - f^n(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} [f^{n-1}(x) + f^{n-2}(x) f(a) + \ldots + f^{n-1}(a)],$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde prin trecere la limită cu x către a, obţinem :

$$(f^n)'_s(a) = f'_s(a)\, nf^{n-1}(a),\ (f^n)'_d(a) = f'_d(a)\, nf^{n-1}(a),$$

deci

$$(f^n)'_s(a) - (f^n)'_d(a) = [f'_s(a) - f'_d(a)]\, nf^{n-1}(a)$$

şi deci f^n derivabilă în $a \Leftrightarrow [f'_s(a) - f'_d(a)]\, nf^{n-1}(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0$ (deoarece $f'_s(a) - f'_d(a) \neq 0$).

6.1.35. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Dacă $x_0 \in I$ şi $\lim\limits_{\mathbf{Q} \ni x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există şi este finită, atunci f este derivabilă în x_0.*

Soluţie. Să considerăm funcţia $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \in I \setminus \{x_0\}$, care este evident continuă. Fixăm $\varepsilon > 0$ şi fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un şir din $I \setminus \{x_0\}$ convergent la x_0. Atunci, cum g este continuă în x_n, există $0 < \eta_{\varepsilon;n} < \dfrac{1}{2^n}$ a.î.

$$|g(y) - g(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\, y \in I,\ |y - x_n| < \eta_{\varepsilon;n}$$

Fie $r_n \in \mathbf{Q} \cap (x_n - \eta_{\varepsilon;n}, x_n + \eta_{\varepsilon;n})$ fixat, $n \geq 1$. Evident avem

$$|r_n - x_0| \leq |r_n - x_n| + |x_n - x_0| < \frac{1}{2^n} + |x_n - x_0| \to 0\ (n \to \infty),$$

deci $l = \lim\limits_{\mathbf{Q} \ni x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{n \to \infty} g(r_n)$. Aşadar pentru ε considerat, există $n_\varepsilon \geq 1$ a.î.

$$|g(r_n) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\, n \geq n_\varepsilon.\ \text{Atunci}$$

$$|g(x_n) - l| \leq |g(x) - g(r_n)| + |g(r_n) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ (\forall)\ n \geq n_\varepsilon,$$

deci $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = l$. Cum $(x_n)_{n \geq 1}$ a fost un şir arbitrar din $I \setminus \{x_0\}$, convergent la x_0, deducem că g are limita l în punctul x_0, adică f este derivabilă în x_0.

Observaţia 1. Putem înlocui $\mathbf{Q}$ cu o mulţime densă în I.

Observaţia 2. Dacă f nu este continuă în x_0 afirmaţia nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu : Funcţia lui Dirichlet.

6.1.36. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $x_0 \in \mathring{I}$ un punct şi $f, g : I \to \mathbf{R}$ două funcţii cu proprietăţile : 1° f admite derivate laterale finite însă nu este derivabilă în x_0 ; 2° g este continuă pe I şi derivabilă în x_0. Atunci funcţia $f.g$ este derivabilă în $x_0 \Leftrightarrow g(x_0) = 0$.*

Soluţie. ($\Rightarrow$) Fie $\varphi = f.g$. Evident avem :

$$\varphi'_s(x_0) = f'_s(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0),\ \varphi'_d(x_0) = f'_d(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0).$$

Cum φ este derivabilă în x_0, rezultă că $\varphi'_s(x_0) = \varphi'_d(x_0)$, deci

$$(f'_d(x_0) - g'_s(x_0))\, g(x_0) = 0 \text{ şi deci } g(x_0) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

($\Leftarrow$) Dacă $g(x_0) = 0$, rezultă imediat că există $g_1 : I \to \mathbf{R}$ continuă a.î. $g(x) = (x - x_0)\, g_1(x)$, $(\forall)\ x \in I$. Atunci

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = f(x)\, g_1(x),\ (\forall)\ x \in I \setminus \{x_0\};$$

deci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(x)\, g_1(x) = f(x_0)\, g_1(x_0)$$

și deci φ este derivabilă în x_0.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$ și $\varphi : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă. Atunci funcția $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|\, \varphi(x)$, $x \in I$, este derivabilă $\Leftrightarrow \varphi(a_k) = 0$, $(\forall)\ k = \overline{1, n}$.*

Soluție. Fie $\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a_k|$, $x \in I$. Se vede imediat că

$$\psi'_d(a_k) = 2k - n;\ \psi'_s(a_k) = 2(k-1) - n,$$

deci ψ nu este derivabilă în x_0. Cum f este evident derivabilă pe $I \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$, rezultă că f este derivabilă pe $I \Leftrightarrow f$ este derivabilă în a, $(\forall)\ k = \overline{1, n} \Leftrightarrow \varphi(a_k) = 0$, $(\forall)\ k = \overline{1, n}$.

Corolar 2. *Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ un polinom. Atunci numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt rădăcini ale ecuației $P(x) = 0 \Leftrightarrow$ funcția $f(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a_k|\ P(x)$, $x \in \mathbf{R}$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$.*

6.1.37. Definiție. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție și $x \in \mathring{I}$. Spunem că f admite *derivată simetrică* în x dacă $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ există și este finită. Această limită se numește *derivata simetrică* a lui f în x și se notează cu $Df(x)$. Prin extensiune vom scrie $Df(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) dacă $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ există și este egală cu $+\infty$ (resp. $-\infty$).

6.1.38. Exerciții. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție; atunci:*

1° Dacă $x \in \mathring{I}$ și f are derivate laterale în x, rezultă că f are derivată simetrică în x și avem $Df(x) = \frac{1}{2}[f'_s(x) + f'_d(x)]$.

2° Dacă $x_0 \in \mathring{I}$ și $f'(x)$ există (finită sau infinită), rezultă că $Df(x)$ există și este egală cu $f'(x)$.

3° Dacă $x_0 \in \mathring{I}$ și $Df(x_0)$ există, nu rezultă numaidecît că $f'(x_0)$ există.

4° Dacă f este monotonă și $Df(x)$ există, $(\forall)\ x \in I$, rezultă că Df păstrează același semn pe $\mathring{I}$.

5° Dacă f este monotonă și $Df(x)$ există și este nulă, $(\forall)\ x \in \mathring{I}$, rezultă că f e constantă pe $\mathring{I}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. 1° Fixăm $x \in \mathring{I}$, atunci $\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} =$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right], \quad (\forall)\ h>0 \text{ cu } x \pm h \in I.$$

Deoarece $f'_s(x)$, $f'_d(x)$ există și sînt finite, expresia din dreapta are limită și este egală cu $\frac{1}{2}[f'_d(x)+f'_s(x)]$. Așadar $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ există este finită și este egală cu $\frac{1}{2}f'_d(x)+\frac{1}{2}f'_s(x)$; deci f admite derivată simetrică în x și avem

$$Df(x) = \frac{1}{2}f'_d(x) + \frac{1}{2}f'_s(x).$$

2° Același raționament.

3° Fie $f: I \to \mathbf{R}$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} |x-x_0|, & \text{dacă } x \in I \wedge |x-x_0| < \varepsilon \\ \text{arbitrară}, & \text{dacă } x \in I \wedge |x-x_0| \geqslant \varepsilon \end{cases}, \text{ unde } x_0 \in \mathring{I} \text{ este fixat.}$$

Atunci $f'(x_0)$ nu există în timp ce $Df(x_0)$ există și este nulă.

De asemenea dacă f este funcția lui Dirichlet, atunci $Df(x)=0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{Q}$, și evident f este discontinuă, deci nederivabilă pe $\mathbf{R}$.

4° Fie $x \in \mathring{I}$ fixat și $h_0>0$ a.î. $x \pm h_0 \in I$ și să presupunem că f este monoton crescătoare. Atunci $f(x-h) \leqslant f(x+h)$, $(\forall)\ h \in (0, h_0)$, deci

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \geqslant 0, \quad (\forall)\ h \in (0, h_0).$$

Trecînd la limită cu $h \to 0$ și ținînd seama că $Df(x)$ există, deducem că $Df(x) \geqslant 0$.

5° Să arătăm că $f'(x)$ există și este nulă, $(\forall)\ x \in \mathring{I}$.

Într-adevăr dacă f este monoton crescătoare, $x \in \mathring{I}$ este fixat și $h_0>0$ a.î. $x \pm h_0 \in I$, atunci

$$\left.\begin{aligned} 0 &\leqslant \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant 2\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \\ 0 &\leqslant \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \leqslant 2\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \end{aligned}\right\}, \quad (\forall)\ h \in (0, h_0).$$

Trecînd la limită cu $h \to 0$ și ținînd seama că $Df(x)$ există și este 0, deducem că $f'_d(x)$, $f'_s(x)$ există și sînt egale cu 0. Deci $f'(x)$ există și este egală cu 0.

Prin urmare f' este nulă pe $\mathring{I}$, deci f este constantă pe $\mathring{I}$.

6.1.39. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $a \in I$ un punct și $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție strict monotonă derivabilă în a cu $f(a) \neq 0$. Atunci:*

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)}{f(a)}\right]^{1/h} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

Ind. Punem $\varphi(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{f(a)}$ și $\Delta(f;h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Atunci

$$\left[\frac{f(a+h)}{f(a)}\right]^{1/h} = \{[1+\varphi(h)]^{\frac{1}{\varphi(h)}}\}^{f(a)\cdot\Delta(f;h)}, \ (\forall)\ h \text{ a.î. } a+h \in I.$$

Trecem mai departe la limită după h, $h \to 0$.

6.1.40. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}_+$ un interval. Să se determine funcțiile continue $f: I \subseteq \mathbf{R}$ care satisfac relația:*

$$f(x) - f(y) = (x-y)\,f(x)\,f(y), \ (\forall),\ x, y \in I.$$

Soluție. Dacă $(\exists)\ a \in I$ a.î. $f(a) = 0$, atunci $f = 0$.

Presupunem $f(x) \neq 0$ $(\forall)\ x \in I$. Dacă trecem la limită cu y către x în relația

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f(x)\,f(y)\ x, y \in I,\ x \neq y,$$

obținem $f'(x) = [f(x)]^2$, $(\forall)\ x \in I$, de unde rezultă evident $f(x) = -\dfrac{1}{x+c}$, $(\forall)\ x \in I$ (c constantă oarecare).

6.1.41. Exercițiu. *Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = \max\{|x|, |1-x^2|\}$. Să se determine punctele x în care f este continuă, respectiv derivabilă.*

Soluție. Fie $f_1(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$; $f_2(x) = |1-x^2|$, $x \in \mathbf{R}$. Evident avem

$$f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|. \tag{1}$$

Cum f_1 și f_2 sînt continue pe $\mathbf{R}$, din (1) rezultă că f este continuă pe $\mathbf{R}$. Graficul lui f este reprezentat în fig. 16

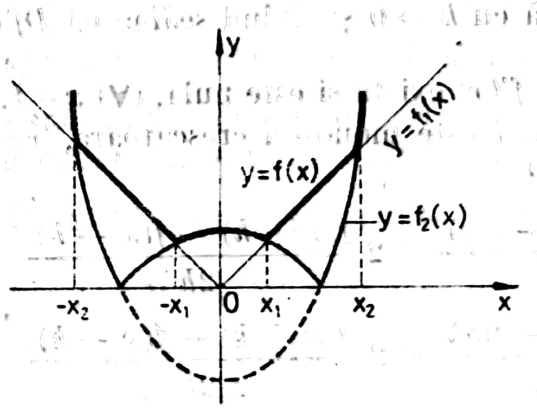


Fig. 16

Graficele lui f_1 și f_2 se intersectează în 4 puncte distincte determinate după cum urmează:

$$x = 1 - x^2,\ x \in (0,1),\ \text{deci } x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2};$$

$$x = x^2 - 1,\ x \in (1, \infty),\ \text{deci } x_2 = \frac{+1+\sqrt{5}}{2};$$

Scanned with OKEN Scanner

și în punctele $-x_1$ și $-x_2$. Atunci

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{dacă } |x| \leqslant x_1 \\ |x|, & \text{dacă } x_1 < |x| < x_2 \\ x^2 - 1, & \text{dacă } |x| \geqslant x_2, \end{cases}$$

de unde deducem imediat că f este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{-x_2, -x_1, x_1, x_2\}$ și nederivabilă în punctele $-x_2$, $-x_1$, x_1, x_2, unde admite derivate laterale finite.

6.1.42. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = |1 - x^2|$, dacă $x \in \mathbf{Q}$ și $f(x) = |1 - x^4|$, dacă $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Să se determine punctele x în care f este continuă, respectiv derivabilă.*

Soluție. Să presupunem că f este continuă în $x_0 \in \mathbf{R}$ și fie $r_n \in \mathbf{Q}$, $r_n \to x_0$; $i_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $i_n \to x_0$. Atunci $f(r_n) \to f(x_0)$ și $f(i_n) \to f(x_0)$. Cum avem $f(r_n) = |1 - r_n^2| \to |1 - x_0^2|$ și $f(i_n) = |1 - i_n^4| \to |1 - x_0^4|$, rezultă că $|1 - x_0^2| = |1 - x_0^4|$, deci $x_0 \in \{-1, 0, +1\}$. De aici rezultă că f este *discontinuă* pe mulțimea $\mathbf{R} \setminus \{-1, 0, +1\}$. Să vedem ce se întîmplă în punctele -1, 0, 1. Fie $x_n \in \mathbf{R}$, $x_n \to 0$, arbitrar. Atunci

$$f(x_n) = \begin{cases} |1 - x_n^2|, & \text{dacă } x_n \in \mathbf{Q} \\ |1 - x_n^4|, & \text{dacă } x_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

Evident avem $f(x_n) \to 1 = f(0)$, deci f este *continuă* în 0. Analog se vede că f este *continuă* în -1 și $+1$.

În fine, să arătăm că f este derivabilă *numai* în punctul $x = 0$. Fie în acest scop $(x_n)_{n \geqslant 1}$ din $\mathbf{R}^*$, $x_n \to 0$, fixat. Evident putem presupune $|x_n| \leqslant 1$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Atunci

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \begin{cases} \dfrac{|1 - x_n^2| - 1}{x_n} = -x_n, & \text{dacă } x_n \in \mathbf{Q} \\ \dfrac{|1 - x_n^4| - 1}{x_n} = -x_n^3, & \text{dacă } x_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

deci $\dfrac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} \to 0 (n \to \infty)$ și deci f derivabilă în 0 și $f'(0) = 0$.

Analog se arată că f nu este derivabilă în punctele -1 și $+1$.

Observație. Continuitatea lui f în punctele -1, 0, $+1$ rezultă imediat și din P. 5.5.10. Cor. 1.

6.1.43. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel:*

$$f(x) = |x - x^2| + |x^2 - x^3| + |x^3 - x|, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Să se determine punctele $x \in \mathbf{R}$ în care f este derivabilă.

Soluție. Evident avem: $f(x) = 2(f_1(x) - f_2(x))$, $x \in \mathbf{R}$, unde $f_1(x) = \max\{x, x^2, x^3\}$ și $f_2(x) = \min\{x, x^2, x^3\}$. Atunci

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ x^3, & x > 1 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^3, & x \leqslant -1 \\ x, & -1 < x \leqslant 0 \\ x^3, & 0 < x \leqslant 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

Evident f_1 este derivabilă pe $\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$ și nederivabilă în $x=0$ și $x=1$. De asemenea f_2 este derivabilă pe $\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\}$ și nederivabilă în punctele $x=-1$, $x=0$, $x=1$. Așadar f este derivabilă pe $\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\}$. Cum f_1 este derivabilă în $x=-1$ și f_2 este nederivabilă în $x=-1$, rezultă că f este nederivabilă în $x=-1$.

Mai departe avem :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x-x^2|+|x^2-x^3|+|x^3-x|}{x}=$$

$$=\frac{|x|}{x}(|1-x|+|x|\cdot|1-x|+|1-x^2|),\quad (\forall)\ x\neq 0,$$

deci $f'_s(0)=-2$, $f'_d(0)=2$ și deci f nu este derivabilă în 0.

Analog avem :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{|x|\cdot|x-1|}{x-1}(1+|x|+|x+1|),\quad (\forall)x\neq 1.$$

deci $f'_s(1)=-4$, $f'_d(1)=+4$ și deci f nu este derivabilă în 1.

Observație. Ex. 6.1.43. poate fi generalizat considerînd f de forma :

$$f(x)=|x-x^2|+|x^2-x^3|+\ \ldots\ +|x^n-x|,\quad x\in\mathbf{R}.$$

6.1.44. Exercițiu. *Să se determine* $a,\ b\in\mathbf{R}$ *a.î. funcția* $f(x)=ae^x+b$, *dacă* $x\geqslant 0$ *și* $f(x)=bx+a$, *dacă* $x<0$, *să fie derivabilă în* $x=0$.

Ind. $f(0+)=a+b$, $f(0-)=a$, deci f este continuă în $0\Leftrightarrow a+b=a\Leftrightarrow b=0$, a arbitrar. Mai departe avem $f'(x)=ae^x$, dacă $x>0$ și $f'(x)=0$, dacă $x<0$, deci $f'_d(0)=a$ și $f'_s(0)=0$. Prin urmare f este derivabilă în $0\Leftrightarrow f'_s(0)=f'_d(0)\Leftrightarrow a=0$.

6.1.45. Exercițiu. *Fie* $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x)=\ln^3 x$, *dacă* $x\in(0,e,]$ *și* $f(x)=ax+b$ *dacă* $x\in(e,\infty)$. *Să se determine* a *și* b *a.î.* f *să fie derivabilă în* $x=e$.

Ind. Avem $f(e-)=1$, $f(e+)=ae+b$, deci f este continuă în $e\Leftrightarrow 1=ae+b$. Atunci f este derivabilă în $e\Leftrightarrow b=1-ae$ și $f'_s(e)=f'_d(e)\in\mathbf{R}$. Însă $f'_s(e)=(\ln^3 x)'_{x=e}=\frac{3}{e}$ și $f'_d(e)=\lim\limits_{x\searrow e}\frac{ax+b-1}{x-e}=\lim\limits_{x\searrow e}\frac{ax-ae}{x-e}=a$.

Așadar f este derivabilă în $e\Leftrightarrow a=\frac{3}{e}$ și $b=-2$.

6.1.46. Exercițiu. *Fie* $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x)=a^{\frac{1}{|x|}}$, *dacă* $0<|x|\leqslant 1$ *și* $f(0)=0$, *unde* $a\in(0,1)$ *este fixat. Atunci* f *este derivabilă în* 0 *și avem* $f'(0)=0$.

Ind. f este pară și $f'_d(0)=\lim\limits_{t\to\infty}ta^t=0$.

6.1.47. Exercițiu. *Să se determine punctele de continuitate și derivabilitate ale funcției* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *definită astfel* $f(x)=x$, $(\forall)\ x\in\mathbf{Q}$ *și* $f(x)=\sin x$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$.

Ind. f continuă în $x\Leftrightarrow f$ derivabilă în $x\Leftrightarrow x=0$; $f'(0)=1$.

6.1.48. Exercițiu. *Să se construiască două funcții derivabile neidentic nule* $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *a.î. funcția* fg *este identic nulă.*

Ind. $f(x)=x^2$, $(\forall)\ x\geqslant 0$ și $f(x)=0$, $(\forall)\ x<0$; $g(x)=0$, $(\forall)\ x\geqslant 0$ și $g(x)=x^2$, $(\forall)\ x<0$.

Scanned with OKEN Scanner

6.1.49. Exerciţiu. *Să se construiască o funcţie* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *continuă şi derivabilă într-un singur punct* $x_0 \in \mathbf{R}$ *a.î.* $f'(x_0) = -1$.

Ind. $f(x) = -x + (x - x_0)^2 f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, unde f este funcţia Dirichlet (Ex. 6.1.28.)

6.1.50. Exerciţiu. *Să se construiască două funcţii* $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *care nu sînt derivabile în nici un punct şi a.î.* $\max\{f, g\}$ *şi* $\min\{f, g\}$ *sînt derivabile în fiecare punct.*

Ind. $f_1(x) = x^2 f(x)$, $f_2(x) = -x^2 f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, unde f este funcţia Dirichlet.

6.1.51. Exerciţiu. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval* $x_0 \in I$ *un punct şi* $f, g: I \to \mathbf{R}$ *două funcţii cu proprietăţile:*

1° *f derivabilă în* x_0; 2° *g are limită finită în* x_0 *şi* 3° $f(x_0) = g(x_0) = 0$. *Atunci funcţia fg este derivabilă în* x_0.

6.1.52. Exerciţiu. *Fie* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă. Atunci există* $f_n: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *un şir de funcţii derivabile a.î.* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Ind. Se ia $f_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ şi $n \in \mathbf{N}$.

6.1.53. Exerciţiu. *Fie* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel:*

$$f(x) = \begin{cases} \max\{x, x^2, x^3\}, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q} \\ \min\{x, x^2, x^3\}, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Să se determine punctele de continuitate şi de derivabilitate ale funcţiei f.

Ind. Se explicitează f şi avem: $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{Q}$, $x \leqslant 0$; $f(x) = x$, $x \in \mathbf{Q}$, $0 < x < 1$; $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{Q}$, $x \geqslant 1$; $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $x < -1$; $f(x) = x$, $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $-1 \leqslant x < 0$; $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $0 < x < 1$ şi $f(x) = x$, $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $x \geqslant 1$.

Obţinem că f este continuă în $x_0 \Leftrightarrow x_0 \in \{0, 1\}$. Să observăm că f este nicăieri derivabilă.

6.1.54. Exerciţiu. *Fie* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) = x^p$, *dacă* $x \in \mathbf{Q}^*$ *şi* $f(x) = 0$, *dacă* $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}^*$. *Atunci f are proprietăţile:*

1° *0 este punct de discontinuitate de speţa a doua* $\Leftrightarrow p \leqslant -1$;

2° *f este continuă în* $0 \Leftrightarrow p \geqslant 1$;

3° *f este derivabilă în* $0 \Leftrightarrow p \geqslant 2$.

Ind. 1° Fie $p \leqslant -1$. Dacă $r_n \in \mathbf{Q}_+$, $r_n \to 0$, avem $f(r_n) \to \infty$; dacă $i_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $i_n \to 0$, avem $f(i_n) \to 0$.

2° Fie $p \geqslant 1$. Atunci $|f(x) - f(0)| \leqslant |x|^p \to 0$ $(x \to 0)$.

3° Dacă $x \neq 0$, Atunci $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} x^{p-1} f(x) \text{ dacă } p > 1 \\ \dfrac{f(x)}{x^{1-p}} \quad \text{dacă } p \leqslant 1; \end{cases}$

deci

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \ (\exists) \text{ şi este finită} \Leftrightarrow p > 1.$$

6.1.55. Exerciţiu. *Să se calculeze derivata funcţiei* $f(x) = x^n$, $x \in \mathbf{R}$, *prin inducţie relativ la n.*

Ind. $(x^2)' = (x \cdot x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Fie $n \geqslant 1$ cu proprietatea că $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Atunci

$$(x^{n+1})' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n = (n + 1)x^n, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \text{ etc.}$$

Scanned with OKEN Scanner

6.1.56. Exerciţiu. *Să se arate că funcţiile* $f(x)=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$ şi $g(x)=\dfrac{\operatorname{arc\,ch} x}{\sqrt{x^2-1}}$, $|x|>1$ *verifică relaţia :*

$$(1-x^2)y'-xy+1=0,\ (\forall)\ x\in D_f\ (resp.\ D_g)$$

6.1.57. Exerciţiu. *Să se arate că produsul dintre o funcţie continuă şi o funcţie derivabilă nu este numaidecît derivabilă.*

6.1.58. Exerciţiu. *Să se construiască o funcţie monotonă şi derivabilă* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *pentru care* f' *nu este monotonă (eventual pe nici un interval nedegenerat).*

Ind. Se consideră $f(x)=x+\sin x$, $x\in\mathbf{R}$, sau se caută f pentru care f' este continuă şi nederivabilă în nici un punct (v. P.12.2.18).

6.1.59. Exerciţiu. *Fie* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel :* $f(x)=mx$, *dacă* $x\in\mathbf{Q}$ *şi* $f(x)=ax^2+bx+c$, *dacă* $x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, *unde* $a,\ b,\ c\in\mathbf{R}$ *sînt fixaţi şi* $a>0$. *Să se determine* m *a.i.* f *să admită puncte de derivabilitate.*

Ind. Dacă m şi x satisfac sistemul : $2ax+b=m$, $ax^2+bx+x=mx$, atunci f este derivabilă într-un singur punct : $x_0=\dfrac{m-b}{2a}$ şi este discontinuă pe $\mathbf{R}\setminus\{x_0\}$.

6.1.60. Exerciţiu. *Să se calculeze limitele :*

1° $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}\ (a\in\mathbf{R}_+^*)$;

2° $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^p-1}{x^q-1}\ (p,\ q\in\mathbf{R}_+^*)$; 3° $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^p-a^p}{x^q-a^q}\ (a,\ q,\ p\in\mathbf{R}_+^*)$.

Ind. 1° Limita dată este $(x^x)'_{x=a}$, deci este egală cu $(1+\ln a)\,a^a$.

2°–3°. Ţinem seama că $(x^p)'=px^{p-1}$, deci

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^p-x_0^p}{x-x_0}=px_0^{p-1},\ (\forall)\ p,\ x_0\in\mathbf{R}_+^*.$$

6.1.61. Exerciţiu. *Să se calculeze :*

1° $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}^n x-1}{2\sin^2 x-1}$; 2° $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^{p+q}x}{\sqrt{(1-\sin^p x)(1-\sin^q x)}}\ (p,\ q\in\mathbf{R}_+^*)$;

3° $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1}$.

Ind. 1° $\dfrac{\operatorname{tg}^n x-1}{2\sin^2 x-1}=\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{2\left(\sin x-\sin\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}^{n-1}x+\operatorname{tg}^{n-2}x+\ldots+\operatorname{tg}x+1}{\sin x+\sin\frac{\pi}{4}}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}x-1}{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}}{\dfrac{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}}=\frac{\operatorname{tg}'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2° Punem sin $x = t$; atunci limita dată este egală cu

$$\lim_{t\to 1}\frac{1-t^{p+q}}{\sqrt{(1-t^p)(1-t^q)}}=\lim_{t\to 1}\frac{\dfrac{t^{p+q}-1}{t-1}}{\sqrt{\dfrac{t^p-1}{t-1}\cdot\dfrac{t^q-1}{t-1}}}=\frac{p+q}{\sqrt{pq}},$$

deoarece

$$(x^a)'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^a-x^a}{x-a}=ax^{a-1}.$$

$$3^\circ\ \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1}-\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{arc\ tg}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1}=$$

$$=\left(\operatorname{tg}\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'_{x=1}-\left(\operatorname{arc\ tg}\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'_{x=1}=1-1=0.$$

6.2. Derivate de ordin superior

6.2.1. Exerciţiu. *Să se determine expresia derivatei de ordinul n a funcţiei* $f(x)=e^{-x^2}x\in\mathbf{R}$.

Soluţie. Să arătăm relaţia:

$$f^{(n)}(x)=P_n(x)e^{-x^2},\ (\forall)\ x\in\mathbf{R}\wedge n\in\mathbf{N},\tag{1}$$

unde $P_n\in\mathbf{R}[X]$ şi grad $P_n=n$. Evident avem:

$$f'(x)=-2xe^{-x^2},\ (\forall)\ x\in\mathbf{R};\quad f''(x)=(4x^2-2)e^{-x^2},\ (\forall)\ x\in\mathbf{R}$$

Fie $n\geqslant 1$ cu proprietatea că relaţia (1) este adevărată. Atunci

$$f'(x)=P_n'(x)e^{-x^2}-2xP_n(x)e^{-x^2}=P_{n+1}(x)e^{-x^2},\ (\forall)\ x\in\mathbf{R}.$$

Aplicăm mai departe principiul inducţiei.

6.2.2. Exerciţiu. *Să se determine expresia derivatei de ordinul n a funcţiei* $f(x)=\dfrac{1}{x-a}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{a\}$.

Soluţie. $f'(x)=-1\cdot(x-a)^{-2}$, $f''(x)=1.2.(x-a)^{-3}$ şi în general $(\forall)\ n\geqslant 1$ avem relaţia:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\,(x-a)^{-n-1},\ (\forall),\ x\in\mathbf{R}\setminus\{x\},$$

cum se poate verifica uşor prin inducţie.

Corolar 1. *Să se calculeze expresia derivatei de ordinul n a funcţiei* $f(x)=\dfrac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_k)}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Din T.4.9.9. rezultă că $(\exists)\ C_j \in \mathbf{R}\ (j = \overline{1, k})$ a.i. $f(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{C_j}{x - a_j}$.

Atunci (Ex. 6.2.1.) avem :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \sum_{j=1}^{k} C_j (x - a_j)^{-n-1},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

6.2.3. Exercițiu. *Fie funcția* $f(x) = |x|^n$, $x \in \mathbf{R}$ $(n$ *— impar). Atunci* $f \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbf{R}) \setminus \mathcal{C}^n(\mathbf{R})$.

Soluție. Din P. 6.1.5. rezultă că f este indefinit derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ și avem :

$$f^{(i)}(x) = \begin{cases} n(n-1)\ldots(n-i+1)|x|^{n-i}\dfrac{|x|}{x}, & i = \overline{1, n} \\ 0, & i \geqslant n+1 \end{cases}$$

Cum $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, avem $f'(0)=0$ și la fel $f''(0)=0, \ldots f^{(n-1)}(0)=0$.

Prin urmare $f \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbf{R})$.

Deoarece $(f^{(n-1)})'_s(0) = -n!$ și $(f^{(n-1)})'_d(0) = n!$, rezultă că $f^{(n-1)}$ nu este derivabilă în 0 și deci $f \notin \mathcal{C}^n(\mathbf{R})$.

6.2.4. Exercițiu. *Fie funcția* $f(x) = x^n \sin \frac{1}{x}$, *dacă* $x \in \mathbf{R}^*$ *și* $f(0) = 0$

Atunci $f \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R}) \setminus \mathcal{C}^{k+1}(\mathbf{R})$, *unde* $k = \left[\frac{n-1}{2}\right]$

Soluție. Funcția f este indefinit derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ și avem :

$$f'(x) = nx^{n-1}\sin\frac{1}{x} - x^{n-2}\cos\frac{1}{x}$$

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}\sin\frac{1}{x} - 2(n-1)x^{n-3}\cos\frac{1}{x} - x^{n-4}\sin\frac{1}{x}$$

. . . . . .

$$f^{(i)}(x) = n(n-1)\ldots(n-i+1)x^{n-i}\sin\frac{1}{x} - \ldots + x^{n-2i}\cos\frac{1}{x}\left(\text{sau } \sin\frac{1}{x}\right)$$

Dacă $0 \leqslant i \leqslant \frac{n-1}{2}$, adică $n - 2i \geqslant 1$, atunci $\lim_{x \to 0} f^{(i)}(x) = 0$, deci $f^{(i)}(0)$ există și deci $f \in \mathcal{C}^i\mathbf{R})$. Prin urmare $f \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R})$, $k = \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

Dacă $i = k + 1$, $k = \left[\frac{n-1}{2}\right]$, atunci $n - 2i$ este -1 sau -2, deci $\lim_{x \to 0} f^{(i)}(x)$ nu există și deci $f^{(i)}$ nu este continuă în 0. Prin urmare $f \notin \mathcal{C}^i(\mathbf{R})$.

6.2.5. Exercițiu. *Fie* $n \in \mathbf{N}$ *și* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval mărginit. Să se construiască* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție de clasă* $\mathcal{C}^n$ *care nu se anulează pe* $\mathring{I}$ *și care se anulează pe* $\mathbf{R} \setminus \mathring{I}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ capetele intervalului I și $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = (x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}$, dacă $x \in (a, b)$ și $f(x) = 0$, dacă $x \notin (a, b)$.

Evident f este indefinit derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{a, b\}$ și pentru $0 \leqslant i \leqslant n$, avem :

$$f^{(i)}(x) = \begin{cases} [(x-a)(x-b)]^{n-i+1} P_i(x), & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

unde P_i este un polinom de grad i.

Deoarece

$$\lim_{x \searrow a} f^{(i)}(x) = \lim_{x \searrow a} [(x-a)(x-b)]^{n-i+1} P_i(x) = 0$$

și $\lim_{x \nearrow a} f^{(i)}(x) = 0$, rezultă că $f^{(i)}(a)$ există și este 0, pentru $(\forall)\ 0 \leqslant i \leqslant n$. De asemenea de aici deducem că $f^{(i)}$ este continuă în a, $(\forall)\ 0 \leqslant i \leqslant n$.

Cum în punctul $x = b$ putem raționa analog, rezultă că $f \in \mathcal{C}^n(\mathbf{R})$.

6.2.6. Exercițiu. *Fie $\mathcal{C}_n$ mulțimea funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de forma $f(x) = P(x)e^x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, unde P este un polinom de grad n. Daacă $f \in \mathcal{C}_n$, atunci $f^{(k)} \in \mathcal{C}_n$, $(\forall)\ k \geqslant 1$.*

Soluție. Dacă $f(x) = P(x)\ e^x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ și P este un polinom de grad n, atunci

$$f'(x) = [P'(x) + P(x)]\ e^x, (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Deoarece $P' + P$ este evident un polinom de gradul n, avem $f' \in \mathcal{C}_n$. Este clar că

$$f''(x) = [P''(x) + 2P'(x) + P(x)]\ e^x, (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

. . . . . .

$$f^{(k)}(x) = [P^{(k)}(x) + C_k^1 P^{(k-1)}(x) + \ldots + C_k^k P(x)]\ e^x, (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

și, deoarece $P^{(k)} + C_k^1 P^{(k-1)} + \ldots + C_k^k P$ este un polinom de gradul n, avem $f^{(k)} \in \mathcal{C}_n$.

6.2.7. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel*

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin x + \cos x, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ ax^2 + bx + c, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} \quad (a, b, c \in \mathbf{R}).$$

Să se determine a, b, c a.î. f să fie de două ori derivablilă pe $\mathbf{R}$.

Soluție. Evident f este de două ori derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ și avem :

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \cos x - \sin x, & \text{dacă } x > 0 \\ 2ax + b, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Cum $f(0+) = f(0) = 1$ și $f(0-) = c$, din condiția de continuitate în 0 (T.5.5.6. Cor. 2) $f(0+) = f(0-) = f(0)$, rezultă $c = 1$. Mai departe avem :

$$f'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{(2 \sin x + \cos x) - 1}{x - 0} = 2, \quad f'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{(ax^2 + bx + 1) - 1}{x} = b,$$

din condiția de derivabilitate în 0 (P.6.1.8.) $f'_s(0) = f'_d(0)$, rezultă că $b = 2$. Am obținut relația

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \cos x - \sin x, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ 2ax + 2, & \text{dacă } x < 0, \end{cases}$$

de unde ca și mai sus deducem $(f')'_d(0) = -1$, $(f')'_s(0) = 2a$, deci f fiind de două derivabilă în 0, avem $-1 = (f')'_d(0) = (f')'_s(0) = 2a$, adică $a = -\frac{1}{2}$.

6.2.8. Exercițiu. *Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^{(n)}\lambda x = 0$, $(\forall)$, $x \in \mathbf{R}$ *și* $\lambda \in (-1, 1)$.

Soluție. Să punem $f(x) = \sin \lambda x$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}$ avem :

$$f'(x) = \lambda \cos \lambda x, \quad f''(x) = -\lambda^2 \sin \lambda x, \ldots, f^{(n)}(x) = \pm \lambda^n \sin \lambda x$$

$$\text{sau } f^{(n)}(x) = \pm \lambda^n \cos \lambda x, \ (\forall) \ x \in \mathbf{R},$$

de unde deducem $|f^{(n)}(x)| \leqslant |\lambda|^n$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R} \wedge n \in \mathbf{N}$.

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n = 0$.

6.2.9. Exercițiu. *Să se calculeze expresia derivatelor de ordinul n ale funcțiilor :*

1° $\mathbf{R} \ni x \mapsto x^3 e^x$; 2° $\mathbf{R} \ni x \mapsto x^2 \sin x$.

Soluție. Aplicînd formula lui Leibniz (P.6.2.3.), obținem :

$$1^\circ \ (x^3e^x)^{(n)} = (e^x)^{(n)}x^3 + C_n^1(e^x)^{(n-1)}(x^3)' + C_n^2(e^x)^{n-2}(x^3)'' + C_n^3(e^x)^{(n-3)}(x^3)''' =$$

$$= (x^3 + 3x^2C_n^1 + 6xC_n^2 + 6\,C_n^3)e^x.$$

$$2^\circ \ (x^2 \sin x)^{(n)} = (\sin x)^{(n)}x^2 + C_n^1(\sin x)^{(n-1)}(x^2)' + C_n^2(\sin x)^{(n-2)}(x^2)'' =$$

$$= x^2 \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2nx \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + n(n-1)\sin\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right).$$

6.2.10. Exercițiu. *Fie* $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ *o funcție de trei ori derivabilă și* $g(x) = f(x \sin x)$, $x \in [-1, 1]$. *Să se calculeze* g'''.

Ind. $\varphi(x) = x \sin x$, $x \in [-1, 1]$. Atunci

$$g'(x) = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x); \quad g''(x) = f''(\varphi(x)) \cdot \varphi'^2(x) + f'(x) \cdot \varphi''(x);$$

$$g'''(x) = f'''(\varphi(x))\,\varphi'^3(x) + f''(\varphi(x)) \cdot 2\varphi'(x)\,\varphi''(x) +$$

$$+ f''(\varphi(x))\varphi''(x) + f'(\varphi(x))\,\varphi'''(x)).$$

$$\varphi'(x) = \sin x + x \cos x; \quad \varphi''(x) = 2\cos x - x \sin x;$$

$$\varphi'''(x) = -4 \sin x - x \cos x \text{ etc.}$$

6.2.11. Exercițiu. *Să se stabilească relația*

$$(e^{-x^2})^{(n)}(0) = -2(n-1)(e^{-x^2})^{(n-2)}(0), \quad (\forall)\ n \geqslant 2.$$

Ind. Ținem seama de expresia derivatei $(e^{-x^2})^{(n)}$ din Ex. 6.2.1.

6.2.12. Exercițiu. *Să se construiască o funcție nepolinomială* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *de trei ori derivabilă pe* $\mathbf{R}^*$ *și cu* $f'''(x) = 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}^*$.

Ind. Fie $f(x) = x^2 \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci $f'(x) = 2|x|$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$ etc.

6.2.13. Exercițiu. *Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției*

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}.$$

Ind. Se observă că $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right)$, $(\forall)$ $x \in D_f$, deci

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{2}[(x+1)^{-n-1} - 2(x+2)^{-n-1} + (x+3)^{-n-1}], \quad (\forall)\ x \in D_f.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.2.14. Exerciţiu. *Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiei*

$$f(x) = \ln(1 + x),\ x \in (-1, \infty).$$

Ind. Se obţine $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$, $(\forall)\ x \in D_f$.

6.2.15. Exerciţiu. *Fie funcţia* $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$, $x \in \mathbf{R}$. *Atunci*

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n(x - n - 1)e^{-x},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \text{ şi } n \geqslant 1.$$

6.2.16. Exerciţiu. *Fie funcţia* $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x \in \mathbf{R}^*$. *Atunci*

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}e^{\frac{1}{x}}x^{-2(n+1)}P_n(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}^*,$$

unde P_n *este un polinom de gradul n definit recursiv astfel:*

$$P_n(x) = (1 + 2nx)P_{n-1}(x) - x^2P'_{n-1}(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}^*$$

Să se arate că P_n *verifică relaţia:*

$$x^2P''_n(x) - (1 + 2nx)P'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

6.3. Teoremele lui Fermat şi Rolle

6.3.1. Exerciţiu. *Să se arate că în teorema lui Fermat* (T. 6.3.1.) *condiţia ca punctul* x_0 *să fie interior intervalului I este esenţială.*

Soluţie. Fie funcţia $f(x) = x$, $x \in [0,1]$. Atunci 0 (resp. 1) este punct de maxim (resp. minim) pentru f şi avem $f'(0) \neq 0$ şi $f'(1) \neq 0$. Să considerăm o altă funcţie: $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$; atunci 1 (resp. 0) este punct de maxim (resp. minim) pentru f şi avem $f'(1) \neq 0$ şi $f'(0) = 0$.

6.3.2. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) = x^2\left(1 + \sin\dfrac{1}{x}\right)$, *dacă* $x \neq 0$ *şi* $f(0) = 0$: *Atunci* $f \geqslant 0$, $f(0) = f'(0) = 0$ *şi în fiecare vecinătate a lui 0 atît f cît şi f' se anulează de o infinitate de ori.*

Soluţie. Observăm că f este derivabilă şi avem $f(x_k) = 0$, dacă $\dfrac{1}{x_k} = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ şi $k \in \mathbf{Z}$. Aplicăm mai departe teorema lui Rolle pe fiecare interval de forma $[x_{k+1}, x_k]$, pentru $k \in \mathbf{N}$.

6.3.3. Exerciţiu. *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcţii continue pe* $[a, b]$, *derivabile pe* (a, b) *şi* $f(a) = f(b) = 0$. *Atunci* $(\exists)\ c \in (a, b)$ *a.î.* $f'(c) + f(c) \cdot g'(c) = 0$.

Soluţie. Fie $h := fe^g$. Evident h e ocontinuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) şi $h(a) = h(b) = 0$. Atunci (T. 6.3.2.) $(\exists)\ c \in (a, b)$ a.î. $h'(c) = 0$. Cum avem:

$$h'(x) = f'(x)e^{g(x)} + f(x)\,g'(x)e^{g(x)},\ (\forall)\ x \in (a, b),$$

rezultă $f'(c)e^{g(c)} + f(c)\ g'(c)e^{g(c)} = 0$, deci $f'(c) + f(c)\,g'(c) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

6.3.4. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie indefinit derivabilă care are o infinitate de zerouri. Atunci $(\forall)\ x \geqslant 1$, funcţia $f^{(n)}$ are o infinitate de zerouri.*

Soluţie. Fie $m \geqslant 1$ fixat şi $x_0, x_1, \ldots, x_m \in I$, $m+1$ zerouri distincte ale lui f ordonate crescător. Atunci (T.6.3.2. Cor. 1) f' are cel puţin m zerouri. Cum m a fost arbitrar, rezultă că f' are o infinitate de zerouri. Luînd în locul lui f funcţia f', rezultă că $(f')'$ are o infinitate de zerouri. Aplicăm mai departe principiul inducţiei.

6.3.5. Exerciţiu. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă cu proprietatea $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, $(\forall)\ x \in (a, b)$. Atunci $(\exists)\ \bar{f} : \mathbf{R} \to [f(a), f(b)]$ derivabilă a.î. $\bar{f}(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in [a, b] \Leftrightarrow f'(a) = f'(b) = 0$.*

Soluţie. ($\Rightarrow$) Fie $\bar{f} : \mathbf{R} \to [f(a), f(b)]$ o funcţie derivabilă care prelungeşte pe f. Atunci $\bar{f}(x) \geqslant f(a) = \bar{f}(a)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deci a este punct de minim pentru $\bar{f}$ şi deci (T.6.3.1.) $\bar{f}'(a) = 0$. Cum $\bar{f}'(a) = \bar{f}'_d(a) = f'(a)$, rezultă că $f'(a) = 0$. Analog avem $f'(b) = 0$.

($\Leftarrow$) Dacă $f'(a) = f'(b) = 0$, definim $\bar{f} : \mathbf{R} \to [f(a), f(b)]$ astfel $\bar{f}(x) = f(a)$, $(\forall)\ x < a$, $\bar{f}(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in [a, b]$ şi $\bar{f}(x) = f(b)$, $(\forall)\ x > b$. Evident $\bar{f}$ este derivabilă şi $\bar{f}$ prelungeşte pe f.

Corolar 1. *Fie $n \in \mathbf{N}$ şi $a, b \in \mathbf{R}_+$, $a < b$. fixaţi. Atunci nu există o funcţie $\bar{f} : \mathbf{R} \to [a^n, b^n]$ derivabilă a.î. $\bar{f}(x) = x^n$, $(\forall)\ x \in [a, b]$.*

Observaţie. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă cu proprietatea că $f(a)$ şi $f(b)$ sînt în interiorul intervalului $[\alpha, \beta] = f([a, b])$. Atunci $(\exists)\ \bar{f} : \mathbf{R} \to [\alpha, \beta]$ derivabilă care prelungeşte pe f.

6.3.6. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval de capete, $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$ şi $f_1, f_2, \ldots, f_n : I \to \mathbf{R}$ n funcţii derivabile şi nenule pe $\mathring{I}$ a.î. funcţia produs $f_1, f_2, \ldots, f_n$ are limite egale în punctele a şi b. Atunci $(\exists)\ c \in (a, b)$ a.î.*

$$\frac{f_1'(c)}{f_1(c)} + \frac{f_2'(c)}{f_2(c)} + \ldots + \frac{f_n'(c)}{f_n(c)} = 0.$$

Soluţie. Fie funcţia $f = f_1 f_2 \ldots f_n$. Din ipoteză rezultă că f este derivabilă, nenulă, iar $f(a+)$ şi $f(b-)$ există şi sînt egale. Atunci (P.7.3.10 Cor. 1) există $c \in (a, b)$ a.î. $f'(c) = 0$. Evident avem:

$$f'(x) = f_1'(x) f_2(x) \ldots f_n(x) + \ldots + f_1(x) f_2(x) \ldots f_n'(x),\ (\forall)\ x \in \mathring{I},$$

deci

$$f_1'(c) f_2(c) \ldots f_n(c) + \ldots + f_1(c) f_2(c) \ldots f_n'(c) = 0,$$

de unde prin împărţire la $f_1(c) \cdot f_2(c) \ldots f_n(c)$ obţinem relaţia căutată.

Corolar 1. *Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ n funcţii continue pe $[a, b]$, nenule şi derivabile pe (a, b) şi cu $f_1(a) f_2(a) \ldots f_n(a) = f_1(b) f_2(b) \ldots f_n(b)$. Atunci*

$$(\exists)\ c \in (a, b)\ \text{a.î.}\ \frac{f_1'(c)}{f_1(c)} + \frac{f_2'(c)}{f_2(c)} + \ldots + \frac{f_n'(c)}{f_n(c)} = 0.$$

Observaţie. Condiţia $f_1(a) f_2(a) \ldots f_n(a) = f_1(b) f_2(b) \ldots f_n(b)$ din Cor. 1 este îndeplinită spre exemplu, dacă $(\exists)\ i, j \in \overline{1, n}$ a.î. $f_i(a) = f_j(b) = 0$. Condiţia ca funcţia $f_1 f_2 \ldots f_n$ să aibă limite egale în punctele a şi b din Ex. 6.3.6. este îndeplinită, spre exemplu, dacă funcţiile $f_i (i = \overline{1, n})$ au limite finite în a şi b şi $(\exists)\ i, j \in \overline{1, n}$ a.i. $f_i(a+) = f_j(b-) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

6.3.7. Exerciţiu. *Să se arate că teorema lui Rolle rămîne adevărată dacă* $f'(x) = +\infty$ *sau* $f'(x) = -\infty$ *pentru un număr finit de puncte din* (a, b).

Soluţie. Teorema lui Rolle se deduce din teorema lui Fermat. Or evident teorema lui Fermat este adevărată dacă înlocuim condiţia de derivabilitate în punctul de extrem local $x_0 \in \mathring{I}$ prin condiţia : $f'(x_0)$ există, finită sau infinită.

6.3.8. Exerciţiu. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$ *a.î.* $a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x \geqslant n$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. *Atunci* $a_1 \cdot a_2 \ldots a_n = 1$.

Soluţie. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x$. Evident $f(0) = n$ şi f derivabilă. Deoarece $f(x) \geqslant n$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, avem că 0 este punct de minim pentru f. Atunci din teorema lui Fermat rezultă că $f'(0) = 0$. Însă

$$f'(x) = a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \ldots + a_n^x \ln a_n, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

deci

$$f'(0) = a_1^0 \ln a_1 + a_2^0 \ln a_2 + \ldots + a_n^0 \ln a_n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln (a_1 a_2 \ldots a_n) = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 \ldots a_n = 1.$$

6.3.9. Exerciţiu. *Fie* $f : I = [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă pe* I, *derivabilă pe* $\mathring{I}$, $f(a) = f(b) = 0$ *şi* $f(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in \mathring{I}$. *Atunci* $(\forall)\ \lambda \in \mathbf{R}$, *există* $\xi \in \mathring{I}$ *a.î.* $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \lambda$.

Soluţie. Aplicăm T. 6.3.2. funcţiei $x \overset{\varphi}{\mapsto} e^{-\lambda x} f(x)$, $(\forall)\ x \in I$. Există deci $\xi \in \mathring{I}$ a.î. $\varphi'(\xi) = 0$, adică $e^{-\lambda x} f'(x) - \lambda e^{-\lambda x} f(x)|_{x=\xi} = 0$ sau $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \lambda$.

6.3.10. Exerciţiu. *Fie* $f, g : I = [a.b] \to \mathbf{R}$ *două funcţii care posedă derivate de ordinul doi şi care se anulează în* a *şi* b. *Atunci există* $\xi \in \mathring{I}$ *a.î.*

$$f''(\xi)g(\xi) + 2f'(\xi)\,g'(\xi) + f(\xi)g''(\xi) = 0.$$

Soluţie. Considerăm funcţia $\varphi(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, $x \in I$. Evident φ satisface condiţiile teoremei lui Rolle. Există deci $\xi \in \mathring{I}$ a.î. $\varphi'(\xi) = 0$. Cum

$$\varphi'(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + g''(x)f(x), (\forall)\ x \in I$$

deducem imediat condiţiadin enunţ.

6.3.11. Exerciţiu. *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcţii continui pe* $[a, b]$, *derivabile pe* (a, b) *cu* $g(x) \neq 0 \neq g'(x)$, $(\forall)\ x \in [a, b]$ *şi* $\dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{f(b)}{g(b)}$. *Atunci există* $\xi \in (a, b)$ *a.î.* $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Soluţie. Funcţia $h : = \dfrac{f}{g}$ este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) şi $h(a) = h(b)$. Atunci cf. T. 6.3.2. există $\xi \in (a, b)$ a.î. $h'(\xi) = 0$. Cum avem :

$$h'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}, \quad (\forall)\ x \in (a, b),$$

deducem că $f'(\xi)\ g(\xi) - f(\xi)\ g'(\xi) = 0$.

6.3.12. Exerciţiu. *Fie* $f : I = [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcţie mărginită pe* I *şi derivabilă pe* $\mathring{I}$. *Atunci există* $\xi \in \mathring{I}$ *a.î.* $f'(\xi) = \dfrac{a + b - 2\xi}{(\xi - a)(\xi - b)}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie funcția $g(x) = (x-a)(x-b)e^{f(x)}$, $x \in I$. Deoarece $\lim_{x \searrow a} g(x) = \lim_{x \nearrow b} g(x) = 0$, rezultă că g este continuă în a și b. Cum g este derivabilă pe $\mathring{I}$ și $g(a) = g(b) = 0$, cf. T. 6.3.2. există $\xi \in \mathring{I}$ a.î. $g'(\xi) = 0$. Însă avem

$$g'(x) = (x-b)e^{f(x)} + (x-a)e^{f(x)} + (x-a)(x-b)e^{f(x)} \cdot f'(x) \quad (\forall)\ x \in \mathring{I},$$

deci

$$g'(\xi) = [(\xi - b) + (\xi - a) + (\xi - a)(\xi - b)f'(\xi)]e^{f(\xi)} = 0.$$

Simplificînd cu $e^{f(\xi)}$, deducem relația din enunț.

6.3.13. Exercițiu. *Fie $f : I = [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe I, derivabilă pe $\mathring{I}$ și cu $f(a) = f(b) = 0$. Dacă f' este monoton crescătoare (resp. descrescătoare), atunci $f \leqslant$ (resp. $\geqslant$) 0.*

Soluție. Cf. T. 5.5.17. Cor 1 există $c \in I$ a.î. $f(c) \geqslant f(x)$, $(\forall)\ x \in I$. Dacă $f \not\leqslant 0$, atunci $f(c) > 0$, deci $c \in \mathring{I}$ și deci din T. 6.3.1. avem $f'(c) = 0$. Dacă f' este monoton crescătoare, avem $f'(x) \leqslant f'(c) = 0$, $(\forall)\ x \in (a, c)$, deci f este monoton descrescătoare pe $[a, c]$, încît $f(c) \leqslant f(a) = 0$, absurd. Rămîne că $f \leqslant 0$.

Observație. Ex. 6.3.13. rezultă și din P. 7.1.5.

6.3.14. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f, g : I \to \mathbf{R}$ două funcții derivabile a.î. $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I$. Atunci între două zerouri ale lui f (resp. g) se află cel puțin un zerou al lui g (resp. f)*

Soluție. Fie $x_1, x_2 \in I$ fixați cu $x_1 < x_2$ a.î. $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Dacă $g(x_1) = 0$, atunci $f'(x_1)g(x_1) - f(x_1)g'(x_1) = 0$, absurd, deci $g(x_1) \neq 0$ și analog $g(x_2) \neq 0$.

Să presupunem că $g(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in (x_1, x_2)$ și să considerăm funcția $\varphi(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $(\forall)\ x \in [x_1, x_2]$. Evident φ satisface condițiile teoremei lui Rolle, deci există $c \in [x_1, x_2]$ a.î. $\varphi'(c) = 0$. Cum avem :

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad (\forall)\ x \in [x_1, x_2],$$

rezultă $f'(c)g(c) - f(c)g'(c) = 0$, absurd.

Prin urmare există cel puțin un $x_3 \in (x_1, x_2)$ a.î. $g(x_3) = 0$, adică între două zerouri ale lui f există cel puțin un zerou a lui g. Cum f și g sînt simetrice una față de alta, putem inversa rolul lui f cu g.

Corolar 1. *În același cadru avem : între două zerouri consecutive ale lui f se află exact un zerou a lui g.*

Corolar 2. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval de lungime $\geqslant 3\dfrac{\pi}{2}$ și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă a.î. $f'(x)\cos x + f(x)\sin x \neq 0$, $(\forall)\ x \in I$. Atunci f posedă cel puțin un zerou în orice interval $J \subseteq I$ cu $|J| \geqslant \dfrac{3\pi}{2}$.*

6.3.15. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe I și derivabilă pe $\mathring{I}$. Atunci între două zerouri ale lui f există cel puțin un zerou al lui $\lambda f + f'$, pentru $(\forall)\ \lambda \in \mathbf{R}$.*

Soluție. Considerăm funcția $g(x) = e^{\lambda x}f(x)$, $x \in I$ și fie $x_1, x_2 \in I$ două zerouri ale lui f. Evident g este continuă pe $[x_1, x]$, derivabilă pe (x_1, x_2) și $g(x_1) = g(x_2) = 0$. Atunci (T. 6.3.2.) există $\xi \in (x_1, x_2)$ a.î. $g'(\xi) = 0$. Însă

$$g'(x) = e^{\lambda x}f'(x) + \lambda e^{\lambda x}f(x), \quad (\forall)\ x \in I,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$0 = g'(\xi) = e^{\lambda\xi}[f'(\xi) + f(\xi) \Leftrightarrow f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0.$$

6.3.16. Exerciţiu. *Fie $a > 0$. Atunci $a = e$ dacă şi numai dacă este îndeplinită una din inegalităţile 1° - 5°, unde :*

1° $a^x \geqslant x + 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$; 2° $a^x \geqslant ax$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$;

3° $a^x \geqslant x^x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$; 4° $x^x \geqslant \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$;

5° $x^{\frac{1}{x}} \leqslant a^{\frac{1}{x}}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$.

Soluţie. Să arătăm spre exemplu afirmaţia :

$$a = e \Leftrightarrow a^x \geqslant x + 1, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

Implicaţia ($\Rightarrow$) a fost arătată în T.6.3.4. Exemplul 2. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) := a^x - (x + 1)$. Din ipoteză rezultă $f \geqslant 0$. Cum $f(0) = 0$, avem că 0 este un punct de minim al lui f. Aplicînd T.6.3.1 rezultă $f'(0) = 0$. Însă $f'(x) = a^x \ln a - 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deci $f'(0) = \ln a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = e$.

6.3.17. Exerciţiu. *Dacă $a_k, b_k \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, atunci există $x_0 \in (0, 2\pi)$ a.î.* $\sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx_0 + b_k \cos kx_0) = 0$.

Soluţie. Fie funcţia $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(-a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $x \in I := [0, 2\pi]$. Evident f este derivabilă pe I şi avem $f(0) = f(2\pi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} a_k$, deci cf. T.6.3.2. există $x_0 \in \mathring{I}$ a.î. $f'(x_0) = 0$. Însă

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx), \quad (\forall)\ x \in I,$$

deci

$$f'(x_0) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx_0 + b_k \cos kx_0) = 0$$

6.3.18. Exerciţiu. *Fie $f_i : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(i = \overline{0, n})$ $n + 1$ funcţii continui pe $[a, b]$ şi derivabile pe (a, b). Dacă $a \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \ldots \leqslant \alpha_n = b$, atunci $(\forall)\ i = \overline{1, n}$, există $\xi \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$ a.î.*

$$\begin{vmatrix} f_0'(\xi) & f_1'(\xi) & \ldots & f_n'(\xi) \\ f_0(\alpha_1) & f_1(\alpha_1) & \ldots & f_n(\alpha_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_0(\alpha_n) & f_1(\alpha_n) & \ldots & f_n(\alpha_n) \end{vmatrix} = 0$$

Ind. Aplicăm teorema lui Rolle funcţiei următoare

$$\varphi(x) := \begin{vmatrix} f_0(x) & f_1(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_0(\alpha_1) & f_1(\alpha_1) & \ldots & f_n(\alpha_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_0(\alpha_n) & f_1(\alpha_n) & \ldots & f_n(\alpha_n) \end{vmatrix}, \quad x \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}].$$

Scanned with OKEN Scanner

6.3.19. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie. Dacă $x_0 \in \mathring{I}$ este un punct de maxim local pentru f şi $f'_s(x_0)$ (resp. $f'_d(x_0)$) există, atunci $f'_s(x_0) \geqslant 0$ (resp. $f'_d(x_0) \leqslant 0$.*

Ind. Se reia demonstraţia dată teoremei lui Fermat.

6.3.20. Exerciţiu. *Să se cerceteze dacă sînt îndeplinite condiţiile de aplicabilitate ale teoremei lui Rolle pentru funcţiile :*

1° $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$; 2° $f(x) = |x|^3$, $x \in [-1, 1]$; 3° $f(x) = |x-1|$, $x \in [0, 2]$; 4° $f(x) = x - |x+1|$, $x \in [-1, 1]$.

Ind. 1° Da ; 2° Da ; 3° Nu ; f nu este derivabilă în 1 ; 4° Da.

6.3.21. Exerciţiu. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcţii derivabile cu $g'(x) \neq 0$, $(\forall)$ $x \in [a, b]$. Atunci există $c \in (a, b)$ a.î. $\dfrac{f(a) - f(c)}{g(c) - g(b)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.*

Ind. Aplicăm teorema lui Rolle funcţiei

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{[f(x) - f(a)]\,[g(x) - g(a)]}{g(b) - g(a)}, \quad x \in [a, b].$$

6.4. Teorema lui Lagrange şi consecinţele sale

6.4.1. Exerciţiu. *Fie $y = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbf{R}$, ecuaţia unei parabole. Atunci vîrful parabolei are coordonatele $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$, unde $\Delta = b^2 - 4ac$.*

Soluţie. Fie funcţia $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbf{R}$. Evident avem $f'(x) = 2ax + b$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$. Să luăm spre exemplu $a > 0$. Atunci $f'(x) < 0$, dacă $x < -\dfrac{b}{2a}$ şi $f'(x) > 0$, dacă $x > -\dfrac{b}{2a}$; deci f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$ şi strict crescătoare pe $\left(-\dfrac{b}{2a}, \infty\right)$. Prin urmare vîrful parabolei date este punctul $P\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$. Calculăm mai departe $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ etc.

Corolar 1. *Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Atunci $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$). $(\forall)$ $x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow a > 0$ (resp. $a < 0$) şi $b^2 - 4ac \leqslant 0$.*

Soluţie. Ţinem seamă de Ex. 6.4.1. şi de faptul că $a > 0$ (resp. $a < 0$) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{|x| \to \infty} (ax^2 + bx + c) > 0$ (resp. < 0).

6.4.2. Exerciţiu. *Fie funcţia $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in \mathbf{R}$, unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ şi $\alpha \neq 0$. Atunci punctul c din teorema lui Lagrange (T. 6.3.4.) aplicată funcţiei f şi intervalului $[a, b]$ este unic determinat şi avem $c = \dfrac{1}{2}(a + b)$.*

Soluţie. Într-adevăr relaţia $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$ se scrie

$$\alpha b^2 + \beta b + \gamma - (\alpha a^2 + \beta a + \gamma) = (b - a)(2\alpha c + \beta),$$

deci

$$\alpha(b^2 - a^2) + \beta(b - a) = (b - a)(2\alpha c + \beta)$$

Simplificăm cu $b - a$ şi obţinem $c = \dfrac{1}{2}(a + b)$.

Scanned with OKEN Scanner

Corolar 1. *Fie f o funcție polinomială de grad 2. Atunci*

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad (\forall)\ a, b \in \mathbf{R}.$$

6.4.3. Exercițiu. *Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}^*$ și $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită atsfel $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (ax - a_i)^2$. Atunci f posedă un punct de minim global, iar valoarea lui f în acest punct nu depinde de a.*

Soluție. Evident f este derivabilă și avem :

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} 2a\,(ax - a_i) = 2n\,a^2\left(x - \frac{1}{na}\sum_{i=1}^{n} a_i\right), \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

deci $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{na}\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Deoarece $f'(x) < 0$, dacă $x < x_0$ și $f'(x) > 0$, dacă $x > x_0$, rezultă că x_0 este punct de minim absolut și acesta este unic determinat.

În fine să observăm că

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i - a_i\right)^2,$$

deci $f(x_0)$ nu depinde de a.

6.4.4. Exercițiu. *Fie $a, b \in \mathbf{R}_+^*$, $a < b$ și $f(x) := \dfrac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}$, $x \in \mathbf{R}_+^*$. Atunci f este strict crescătoare.*

Soluție. Evident f este derivabilă și avem :

$$f'(x) = \frac{a(bx+1)\ln(bx+1) - b(ax+1)\ln(ax+1)}{(ax+1)(bx+1)\ln^2(bx+1)}, \quad x \in \mathbf{R}_+^*.$$

Fie $g(x) = a(bx+1)\ln(bx+1) - b(ax+1)\ln(ax+1)$, $x \in \mathbf{R}_+$. Atunci

$$g'(x) = ab\ln(bx+1) + ab - (ba\ln(ax+1) + ba) = ab\ln\frac{bx+1}{ax+1} > 0,$$

deci g este strict crescătoare și cum $g(0) = 0$ rezultă că $g(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$, de unde deducem că $f'(x) > 0$ $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$, deci f este strict crescătoare.

6.4.5. Exercițiu. *Fie funcția $f: [0,1] \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Aplicînd formula lui Lagrange funcției f și intervalului $[0, x]$, se obține $\theta = \theta(x)$. Să se calculeze* $\lim\limits_{x \searrow 0} \theta(x)$.

Soluție. Formula lui Lagrange se scrie

$$f(x) - f(0) = x f'(\theta x), \quad \text{unde} \quad \theta = \theta(x) \in (0,1).$$

Cum $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $(\forall)\ x \in [0,1]$, avem :

$$\frac{1}{x+1} - 1 = -x \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^2}, \ (\forall)\ x \in (0,1) \Leftrightarrow \theta = \theta(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, \ (\forall)\ x \in (0,1).$$

Evident avem $\lim\limits_{x \searrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

6.4.6. Exerciţiu. *Să se arate inegalităţile :*

1° $|\sin a - \sin b| \leqslant |a - b|$, $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}$;

2° $|\cos a - \cos b| \leqslant |a - b|$, $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}$;

3° $|\operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} b| \leqslant |a - b|$, $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}$:

4° $pa^{p-1}(b - a) < b^p - a^p < p\,b^{p-1}(b - a)$, $(\forall)\ 0 < a < b \wedge p \geqslant 1$.

Soluţie. Se aplică T. 6.3.4. funcţiilor sin, cos, arc tg şi x^p, $x \in \mathbf{R}$.

1° $|\sin a - \sin b| = |a - b| \cdot |\cos c| \leqslant |a - b|$

3° $|\operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} b| = |a - b| \dfrac{1}{1 + c^2} < |a - b|$

4° $b^p - a^p = (b - a)\,pc^{p-1}$, unde $a < c < b$, deci $a^{p-1} < c^{p-1} < b^{p-1}$ etc.

6.4.7. Exerciţiu. *Să se arate inegalităţile :*

1° $na^{n-1} < \dfrac{b^n - a^n}{b - a} < nb^{n-1}$, $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}_+$, $a < b$;

2° $\dfrac{b - a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \dfrac{b - a}{\cos^2 b}$, $(\forall)\ a, b \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $a < b$;

3° $\dfrac{a - b}{\sin^2 a} < \operatorname{ctg} b - \operatorname{ctg} a < \dfrac{a - b}{\sin^2 b}$, $(\forall)\ a, b \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $a < b$;

4° $\operatorname{tg} a < \dfrac{\ln \cos b - \ln \cos a}{a - b} < \operatorname{tg} b$, $(\forall)\ a, b \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $a < b$.

Ind. Aplicăm teorema lui Lagrange funcţiilor :

$f(x) = x^n$, $x \in [a, b]$; $g = \operatorname{tg}|_{[a,b]}$; $h = \operatorname{ctg}|_{[a,b]}$; $k(x) = \ln \cos|_{[a,b]}$.

6.4.8. Exerciţiu. *Să se arate inegalităţile :*

1° $\sin x < (resp.\ \leqslant)\ \operatorname{sh} x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}^*$ $(resp.\ x \in \mathbf{R})$;

2° $\dfrac{\operatorname{tg} x_1}{\operatorname{tg} x_2} < \dfrac{x_1}{x_2}$, $(\forall)\ x_1, x_2 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $x_1 < x_2$.

Ind. 1° Se arată că $\sin x < x < \operatorname{sh} x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}^*$.

2° Fie $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Se arată că $f'(x) = \dfrac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x} > 0$, $(\forall)\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, deci f este strict crescătoare etc.

6.4.9. Exerciţiu (Huygens). *Să se arate inegalitatea :*

$$2 \sin x + \operatorname{tg} x > 3x, \quad (\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Soluţie. Fie $f(x) = 2 \sin x - \operatorname{tg} x - 3x$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Atunci

$$f'(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{(1 + 2 \cos x)(1 - \cos x)^2}{\cos^2 x} > 0, \quad (\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

deci f este strict crescătoare şi deci

$$0 = f(0) < f(x), \quad (\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

6.4.10. Exercițiu. *Să se arate că* $ex < e^x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Soluție. Fie $f(x) = e^x - ex$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci $f'(x) = e^x - e$, $(\forall)\ (x) \in \mathbf{R}$; deci $f'(x) < 0$, dacă $x < 1$ și $f'(x) > 0$, dacă $x > 1$. Prin urmare $f(x) > f(1) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ etc.

6.4.11. Exercițiu. *Să se stabilească inegalitatea:*

$$e^x > 1 + \ln(1 + x),\ (\forall)\ x > -1,\ x \neq 0.$$

Soluția 1. Fie $f(x) = e^x - 1 \ln(1 + x)$, $x \in (-1, \infty)$. Evident f este derivabilă și avem $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{1+x}$. Să observăm că $e^x > \dfrac{1}{1+x}$, dacă $x \in (1, \infty)$ și $e^x < \dfrac{1}{1+x}$, dacă $x \in (-1, 0)$ (Fig. 17). Așadar obținem tabelul:

x	-1		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

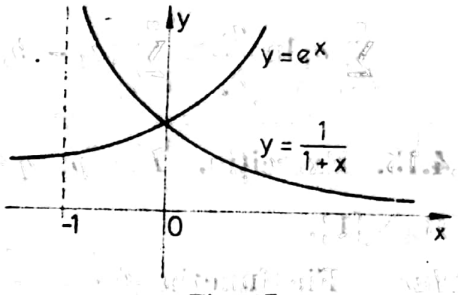


Fig. 17

Prin urmare $f(x) > f(0)$, $(\forall)\ x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$.

Soluția 2. Fie $\varphi(x) = e^x$, $\psi(x) := \ln(1 + x)$, $x \in (-1, \infty)$.

Să aplicăm formula lui Cauchy (T. 6.3.5.) pe un interval de extremități x și 0 cu $x \in (-1, \infty)$ fixat; obținem:

$$\frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{\psi(x) - \psi(0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{e^c}{\dfrac{1}{1+c}} = (1 + c)\, e^c.$$

Evident, $(1 + c)\, e^c > 1$ (resp. < 1), dacă $x > 1$ (resp. $-1 < x < 0$), deci $\dfrac{e^c - 1}{\ln(1+x)} > 1$ (resp. < 1), dacă $x > 1$, (resp. $-1 < x < 0$).

Prin urmare $e^x - 1 > \ln(1 + x)$, $(\forall)\ x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$ etc.

6.4.12. Exercițiu. *Să se arate că* $e^{\lambda x} > 1 + \left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^2$, $(\forall)\ x > 0$ *și* $\lambda \geq 1$.

Ind. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = \dfrac{e^{\lambda x}}{x^2 + \lambda^2}$, cu λ parametru real nenul. Se arată că $f'(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ și $\lambda \geq 1$, deci

$$\frac{e^{\lambda x}}{x^2 + \lambda^2} = f(x) > f(0) = \frac{1}{\lambda^2},\ (\forall)\ x > 0 \text{ și } \lambda \geq 1.$$

6.4.13. Exercițiu. Fie $a \in \mathbf{R}$ *și* $b \in \mathbf{R}_+^*$. *Atunci avem inegalitatea* $ab \leq e^a + b(\ln b - 1)$, *cu egalitate dacă și numai dacă* $b = e^a$.

Soluție. Evident avem $e^t \geq 1 + t$, $(\forall)\ t \in \mathbf{R}$, deci

$$e^{x-y} \geq 1 + x - y,\quad (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

și deci $xe^y \leqslant e^x + ye^y - e^y$. Înlocuind x cu a și y cu $\ln b$, obținem :

$$ab \leqslant e^a + b \ln b - b$$

Avem egalitate $\Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow a = \ln b \Leftrightarrow b = e^a$,

6.4.14. Exercițiu. *Fie* $a_1, a_2, \ldots a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}_+$, *a.î.* $\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} b_i$. *Atunci* $\sum_{i=1}^{n} a_i \ln a_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i \ln b_i$.

Soluție. În Ex. 6.4.13. să punem $a = 0$ și $b = \frac{a_i}{b_i}$; obținem $\frac{a_i}{b_i} \ln \frac{a_i}{b_i} \geqslant$ $\geqslant \frac{a_i}{b_i} - 1$. Înmulțind cu b_i și sumînd după i, deducem :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ln \frac{a_i}{b_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \ln a_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i \ln b_i.$$

6.4.15. Exercițiu. *Fie* $p, q \in \mathbf{R}^*$, $p > q$. *Atunci* $\frac{x^p}{p} - \frac{x^q}{q} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$.

Soluție. Fie funcția $f(x) = \frac{1}{p} x^p - \frac{1}{q} x^q - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, $x \in \mathbf{R}_+$. Evident avem :

$$f'(x) = x^{p-1} - x^{q-1} = x^{q-1}(x^{p-q} - 1),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+.$$

Tablou de variație :

x	0		1		$+\infty$
f'	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$
f	$\frac{1}{q} - \frac{1}{p}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

Prin urmare din T.6.3.4. Cor. 4 deducem că $f(x) > f(1)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$, adică inegalitatea din enunț.

Corolar 1.

$$\frac{a^p - b^p}{p} < \frac{a^q - b^q}{q},\ (\forall)\ 1 \leqslant a < b \text{ și } p > q.$$

6.4.16. Exercițiu. *Să se arate că* $x \operatorname{arctg} x > \ln(1 + x^2)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$.

Soluție. Să notăm $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+$. Evident f este de două ori derivabilă și avem :

$$f'(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1 + x^2};\quad f''(x) = \frac{2x^2}{(1 + x^2)^2},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+.$$

Cum $f''(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$, din T.6.3.4. Cor. 4, deducem că f' este strict crescătoare. Însă $f'(0) = 0$, deci $f'(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$.

Analog avem că f este strict crescătoare și, cum $f(0) = 0$, deducem că $f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$, adică $x \operatorname{arctg} x \geqslant \ln(1 + x^2)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$.

6.4.17. Exerciţiu. *Fie* $f, g : I = [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcţii continue pe* I, *derivabile pe* $\mathring{I}$ *cu* $f(a) = g(a)$ *şi* $f'(x) < (resp. \leqslant)\ g'(x)$, $(\forall)\ x \in \mathring{I}$. *Atunci* $f(x) < (resp. \leqslant)\ g(x)$, $(\forall)\ x \in \mathring{I}$.

Soluţie. Funcţia $h = g - f : I \to \mathbf{R}$ este continuă, pe I, derivabilă pe $\mathring{I}$, $h(a) = 0$ şi $h'(x) > 0$ (resp. $\geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \mathring{I}$. Atunci (T. 6.3.4. Cor. 4) f este strict (resp. monoton) crescătoare pe I, deci $h(x) >$ (resp. $\geqslant$) $h(a)$, $(\forall)\ x \in \mathring{I}$, de unde rezultă că $g(x) >$ (resp. $\geqslant$) $f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathring{I}$.

6.4.18. Exerciţiu. *Să se arate inegalităţile :*

$$\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x + x^2}},\quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*.$$

Soluţie : Considerăm funcţiile :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2}{2x+1},\ x \in \mathbf{R}_+^*;\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x + x^2}} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right),\ x \in \mathbf{R}_+^*.$$

Atunci

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} + \frac{4}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)(x+2)} < 0,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*,$$

$$g'(x) = -\frac{2x+1}{2\sqrt{(x+x^2)^3}} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{4x^2+4x} - (2x+1)}{2\sqrt{(x+x^2)^3}} < 0,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*,$$

deci f şi g sînt strict descrescătoare şi cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, rezultă că $f > 0$ şi $g > 0$ etc.

Aplicaţie. Să se calculeze cu aproximaţie $\ln \sqrt{13}$.

Avem

$$\frac{2}{2 \cdot \frac{1}{12} + 1} < \ln 13 < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{144}}},$$

deci

$$\frac{12}{7} < \ln 13 < \frac{12}{\sqrt{13}} < \frac{12}{3{,}5} = \frac{24}{7}$$

şi deci

$$\ln 13 \approx \frac{12}{7} + \frac{1}{2}\left(\frac{24}{7} - \frac{12}{7}\right) = \frac{18}{7}.$$

6.4.19. Exerciţiu. *Să se arate inegalitatea :*

$$\frac{2}{e} < x^{\frac{1}{1-x}} + x^{\frac{x}{1-x}} < 1,\quad (\forall)\ x \in (0,1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie funcția $f(x) = (1+x)\,x^{\frac{x}{x+1}}$, $x \in (0,1)$. Atunci

$$\ln f(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1-x}\ln x,$$

deci

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x}\cdot\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^3}\left(\frac{2(1-x)}{1+x} + \ln x\right)$$

și deci

$$f'(x) = \frac{f(x)}{(1-x)^2}\varphi(x);\quad \varphi(x) := \frac{2(1-x)}{1+x} + \ln x,\quad x \in (0,1).$$

Deoarece

$$\varphi'(x) = 2\,\frac{-1\,(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 > 0,\quad (\forall)\ x \in (0,1),$$

rezultă că φ este strict crescătoare și cum $\varphi(1+) = 0$, avem că $\varphi(x) < \varphi(1+) = 0$, $(\forall)\ x \in (0,1)$, deci $f' < 0$. Așadar f este strict descrescătoare, deci

$$\frac{2}{e} = f(1-) < f(x) < f(0) = 1,\quad (\forall)\ x \in (0,1),$$

deoarece $\lim\limits_{x \searrow 0} x^x = 1$ și $\lim\limits_{x \nearrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x \nearrow 1}[(1+(x-1))^{\frac{1}{x-1}}]^{-1} = e^{-1}$.

6.4.20. Exercițiu. *Să se arate inegalitatea*

$$\sin\frac{1}{x-1} - 2\sin\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x+1} > 0,\quad (\forall)\ x \in [2,\infty).$$

Soluție. Fie funcția $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $x \in [1,\infty)$. Atunci

$$f''(x) = \frac{1}{x^4}\left(2x - \operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x} > 0,\quad (\forall)\ x \in [1,\infty),$$

deci (P.7.1.5.) f este strict convexă și deci

$$f(x) = f\left(\frac{(x-1)+(x+1)}{2}\right) < \frac{f(x-1)+f(x+1)}{2},\quad (\forall)\ x \in [2,\infty),$$

prin urmare

$$2\sin\frac{1}{x} < \sin\frac{1}{x-1} + \sin\frac{1}{x+1},\quad (\forall)\ x \in [2,\infty).$$

6.4.21. Exercițiu. *Fie* $x, y \in \mathbf{R}$ *a.î.* $x + y = 1$. *Atunci* $x^n y^m \leqslant \dfrac{n^n m^m}{(n+m)^{n+m}}$, $(\forall)$, $n, m \geqslant 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Inegalitatea dată, pentru n, m fixați, este echivalentă cu inegalitatea

$$x^n(1-x)^m \leqslant \frac{n^n m^m}{(n+m)^{n+m}}, \quad (\forall)\ x \in (0,1) \tag{1}$$

Pentru a arăta (1), să considerăm funcția $f:(0,1)\to \mathbf{R}$, definită astfel $f(x)=x^n(1-x)^m$. Evident $(\forall)\ x\in(0,1)$, avem:

$$f'(x)=nx^{n-1}(1-x)^m - mx^n(1-x)^{m-1} = x^{n-1}(1-x)^{m-1}\left(\frac{n}{n+m}-x\right)(n+m),$$

Dacă notăm $x_0=\dfrac{n}{n+m}$, atunci avem $f'(x_0)=0$, $f'(x)>0$ (resp. <0), după cum $x<x_0$ (resp. $x>x_0$), deci (T.6.3.4. Cor. 4) x_0 este punct de maxim pentru f. Cum $f(x_0)=\dfrac{n^n m^m}{(n+m)^{n+m}}$, conchidem că

$$x^n(1-x)^m = f(x) \leqslant f(x_0) = \frac{n^n m^m}{(n+m)^{n+m}}, \quad (\forall)\ x\in(0,1).$$

6.4.22. Exercițiu. *Să se arate că punctul ξ din teorema lui Lagrange aplicată funcției $f(x)=\ln x$, $x\in\mathbf{R}_+^*$, și intervalului $[a,b]$, cu $0<a<b$, satisface condiția*

$$\sqrt{ab} < \xi < \frac{1}{2}(a+b).$$

Soluție. Deoarece $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}_+^*$, teorema lui Lagrange se scrie $\ln a - \ln b = (a-b)\dfrac{1}{\xi}$, cu $a<\xi<b$; deci $\xi=\dfrac{b-a}{\ln b-\ln a}$ și deci trebuie arătat că $\sqrt{ab}<\dfrac{b-a}{\ln\frac{b}{a}}<\dfrac{1}{2}(a+b)$ sau $\sqrt{\dfrac{b}{a}}<\dfrac{\frac{b}{a}-1}{\ln\frac{b}{a}}<\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{b}{a}\right)$.

Prin urmare este suficient să arătăm că

$$\sqrt{t}<\frac{t-1}{\ln t}<\frac{1}{2}(1+t),\quad (\forall)\ t>1.$$

Să arătăm inegalitățile:

$$(1)\ \ln t<\frac{t-1}{\sqrt{t}},\ (\forall)\ t>1;\quad (2)\ \frac{t-1}{t+1}<\frac{1}{2}\cdot\ln t,\ (\forall)\ t>1.$$

Evident $\ln t<\dfrac{t-1}{\sqrt{t}}$, $(\forall)\ t>1 \Leftrightarrow (3): 2\ln t<\dfrac{t^2-1}{2}$, $(\forall)\ t>1$. Pentru a arăta (3) să punem $\varphi(t)=2\ln t-\dfrac{t^2-1}{t}$, $(\forall)\ t\geqslant 1$. Atunci $\varphi'(t)=\dfrac{2}{t}-1-\dfrac{1}{t^2}=-\dfrac{(t-1)^2}{t^2}<0$, $(\forall)\ t>1$; deci φ este strict descrescătoare pe $[1,\infty)$

Scanned with OKEN Scanner

și cum $\varphi(1)=0$ conchidem că $\varphi(t)<0$, $(\forall)\ t>1$, adică $2\ln t<\frac{t^2-1}{t}$, $(\forall)\ t>1$. Înlocuind t cu $\sqrt{t}$ obținem (1).

Analog se arată și (2).

6.4.23. Exercițiu. *Să se arate inegalitățile:*

$$\frac{a}{b}<\frac{\sin a}{\sin b}<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a}{b},\quad (\forall)\ 0<a<b<\frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Soluție. Fie funcția $f(x)=\frac{1}{x}\sin x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Evident

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\operatorname{tg}x)}{x^2}<0,\quad (\forall)\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

deci f este strict descrescătoare și, cum $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, deducem

$$1>\frac{\sin a}{a}>\frac{\sin b}{b}>\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi},$$

deci

$$\frac{\sin a}{\sin b}>\frac{a}{b}\ \text{ și }\ \frac{\sin a}{a}:\frac{\sin b}{b}<1:\frac{2}{\pi},$$

de unde evident obținem inegalitățile (1).

Corolar 1.

$$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1,\quad (\forall)\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

6.4.24. Exercițiu. *Fie* $A\subseteq\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ *o mulțime compactă. Atunci* $(\exists)\ \alpha>0$ *a.î.* $|\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y|\leqslant\alpha|x-y|$, $(\forall)$, $x,y\in A$.

Să se arate că condiția de compactitate a lui A *este esențială.*

Soluție. A fiind compactă este mărginită și închisă, deci $a=\inf A\in A$ și $b=\sup A\in A$ și deci avem

$$-\frac{\pi}{2}<a\leqslant x\leqslant b<\frac{\pi}{2},\quad (\forall)\ x\in A.$$

Aplicînd T.6.3.4. funcției $\operatorname{tg}|_{[a,b]}$ rezultă că $(\forall)\ x,y\in A$, avem:

$$\operatorname{tg}(x)-\operatorname{tg}(y)=(x-y)\frac{1}{\cos^2 c}\ (c\ \text{între}\ x\ \text{și}\ y).$$

Evident avem: $|\cos x|\geqslant\min\{\cos a,\cos b\}=\lambda>0$, $(\forall)\ x\in[a,b]\supseteq A$. Atunci

$$|\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y|\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{\lambda^2},\quad (\forall)\ x,y\in[a,b]\ \text{etc.}$$

Dacă A nu este compactă, spre exemplu dacă $\frac{\pi}{2}$ este punct de acumulare al lui $A \subseteq \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $(\exists)\ x_n \in A,\ x_n \to \frac{\pi}{2}$, deci $\operatorname{tg} x_n \to +\infty$ și deci trecînd la limită în inegalitatea $|\operatorname{tg} x_n - \operatorname{tg} y| \leqslant \alpha\,|x_n - y|$, $(\forall)\ x \geqslant 1 \wedge y \in A$ obținem $+\infty \leqslant \alpha\pi$, absurd.

6.4.25. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $a = \inf I$ și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție de n ori derivabilă. Dacă $f(a+) \geqslant 0$, $f'(a+) \geqslant 0, \ldots, f^{(n-1)}(a+) \geqslant 0$ și $f^{(n)}(x) > 0$ (resp. $\geqslant 0$), $(\forall)\ x \in I_a = I \cap (a, \infty)$, atunci $f(x) > 0$ (resp. $\geqslant 0$), $(\forall)\ x \in I_a$.*

Ind. Deoarece $f^{(n)}(x) > 0$, $(\forall)\ x \in I_a$ rezultă că $f^{(n-1)}$ este strict crescătoare pe I, deci cum $f^{(n-1)}(a+) \geqslant 0$ deducem (T.6.3.4. Cor. 5) că $f^{(n-1)}(x) > 0$, $(\forall)\ x \in I_a$. Se face același raționament pentru $f^{(n-1)}$ etc.

Corolar 1.

$1^\circ\ e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*;$

$2^\circ\ \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*;$

$3^\circ\ \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*;$

$4^\circ\ \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*.$

Ind. Punem $f(x) = e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \ldots - \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbf{R}_+^*$, și observăm că $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$ și $f^{(n)}(x) = e^x - 1 > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$ etc.

Corolar 2.

$1^\circ\ \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x,\ (\forall)\ x \in (-1, \infty);$

$2^\circ\ \frac{x}{1+x} < \sin x < x,\ (\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

Observație Ex. 6.4.25, poate fi obținut și din formula lui Taylor (T.6.5.3.).

6.4.26. Exercițiu. *Fie $I \in \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă. Atunci f afină $\Leftrightarrow f' = c$ (constantă).*

Soluție. ($\Rightarrow$) Dacă f afină $(\exists)\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ a.i. $f(x) = \alpha x + \beta$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. deci $f' = \alpha$.

($\Leftarrow$) Presupunem $f' = c$ și fie $x_0 \in I$ fixat. Atunci $(\forall)\ x \in I$, există ξ cuprins între x și x_0 a.î.

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi), \text{ deci } f(x) = cx + (f(x_0) + cx_0).$$

Cum $f(x_0) + cx_0$ nu depinde de x, conchidem că f este afină.

6.4.27. Exercițiu. *Fie $0 < a < b$ și $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b). Atunci $(\exists)\ c \in (a, b)$ a.î.*

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(c) - cf'(c). \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $\psi(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in [a, b]$ și $D = af(b) - bf(a)$.

Evident $(1) \Leftrightarrow \dfrac{D}{a-b} = f(c) - cf'(c)$. Aplicînd T.6.3.5. funcțiilor φ și ψ, găsim $c \in (a, b)$ a.î.

$$\frac{\dfrac{f(b)}{b} - \dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}} = \frac{cf'(c) - f(c)}{-\dfrac{1}{c^2}} \Leftrightarrow \frac{D}{a-b} = f(c) - cf'(c) \Leftrightarrow (1)$$

6.4.28. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval de capete $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$ și $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă cu proprietățile: 1° $f'' \geqslant 0$; 2° $\lim\limits_{x \searrow a} f'(x) = \lim\limits_{x \nearrow b} f'(x) = 0$. Atunci f este constantă.*

Soluție. Deoarece $f'' \geqslant 0$, rezultă (T.6.3.4. Cor. 3) f' monoton crescătoare. Atunci din condiția 2° și din T.5.5.18. Cor. 3, deducem $f' = 0$, deci (T.6.3.4. Cor. 2) f constantă.

6.4.29. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $a = \inf I$, $b = \sup I$ și $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă neconstantă cu proprietatea că $f(a+)$ și $f(b-)$ există și sînt egale. Atunci f' nu poate păstra un semn constant.*

Soluție. Presupunem că $f' \geqslant 0$. Atunci f este monoton crescătoare. Fie $x_0 \in (a, b)$ fixat. Evident avem:

$$f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant f(y), \ (\forall)\ x, y \in (a, b),\ x < x_0 < y \qquad (1)$$

Din (1) prin trecere la limită, obținem:

$$f(a+) = \lim_{x \searrow a} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{y \nearrow b} f(y) = f(b-)$$

și, cum $f(a+) = f(b-)$, rezultă că $f(x_0) = f(a+) = f(b-)$, deci f este constantă, absurd.

Prin urmare există $x_1 \in (a, b)$ cu $f'(x_1) < 0$ și analog există $x_2 \in (a, b)$ cu $f'(x_2) > 0$.

6.4.30. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă cu proprietatea că $\inf f'(x) > 0$. Atunci $(\forall)\ \lambda \in \mathbf{R}_+$ suficient de mic, funcția $g(x) = x + \lambda f(x)$, $x \in I$, este strict crescătoare.*

Soluție. Fie $m = \inf\limits_{x \in I} f'(x)$, deci $f'(x) \geqslant m$, $(\forall)\ x \in I$. Fixăm $x, y \in I$, $x < y$. Atunci există $\xi \in (x, y)$ a.î. $f(y) - f(x) = (y - x) f'(\xi)$, deci

$$g(y) - g(x) = (y - x) - \lambda(f(y) - f(x)) \leqslant (y - x)(1 - \lambda m) > 0,$$

dacă $1 - \lambda m < 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda < \dfrac{1}{m}$.

6.4.31. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea că există $c > 0$ și $\alpha > 1$ a.î. $|f(x) - f(y)| \leqslant c \cdot |x - y|^\alpha$, $(\forall)\ x, y \in I$. Atunci f este constantă.*

Soluție. Evident avem:

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leqslant c \cdot |x - y|^{\alpha - 1},\ (\forall)\ x, y \in I,\ x \neq y.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $\alpha > 1$, rezultă că $\lim_{y \to x} |x - y|^{\alpha - 1} = 0$, deci $\lim_{y \to \infty} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = 0$, adică f derivabilă în x și $f'(x) = 0$.

Prin urmare $f' = 0$, deci f este constantă (T.6.3.4. Cor. 2).

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea că $(\exists)\ c > 0$, $\alpha > 1$ și $\lambda \in \mathbf{R}$ a.î. $|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)| \leqslant c \cdot |(x - y|^{\alpha}$, $(\forall) x, y \in I$. Atunci $f(x) = \lambda x + \mu$, $(\forall)\ x \in I$.*

Soluție. Aplicăm Ex. 6.4.31. funcției $x \mapsto f(x) - \lambda x$, $x \in I$.

Observație. Dacă $0 < \alpha \leqslant 1$, Ex. 6.4.31. nu este numaidecît adevărat.

Contraexemplu. Fie $0 < \alpha \leqslant 1$ fixat și $f : I \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = |x|^{\alpha}$. Atunci $|x|^{\alpha} = |(x - y) + y|^{\alpha} \leqslant |x - y|^{\alpha} + |y|^{\alpha}$, deci $|x|^{\alpha} - |y|^{\alpha} \leqslant |x - y|^{\alpha}$. Analog $|y|^{\alpha} - |x|^{\alpha} \leqslant |y - x|^{\alpha} = |x - y|^{\alpha}$, deci

$$|f(x) - f(y)| = ||x|^{\alpha} - |y|^{\alpha}| \leqslant |x - y|^{\alpha}.$$

Așadar f satisface condiția din Ex. 6.4.31. și f este neconstantă.

6.4.32. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă a.î. f' are numai zerouri izolate. Atunci f este strict crescătoare (resp. strict descrescătoare) $\Leftrightarrow f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$).*

Soluție. Implicația ($\Rightarrow$) rezultă din T.6.3.4. Cor. 3.

($\Leftarrow$) Dacă $f' \geqslant 0$, atunci (T.6.3.4. Cor. 4) f este monoton crescătoare. Fie $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, fixați. Dacă $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2) = f(x)$, $(\forall)\ x \in [x_1, x_2]$, deci f constantă pe $[x_1, x_2]$ și deci $f'(x) = 0$, $(\forall)\ x \in [x_1, x_2]$, ceea ce înseamnă că f' are zerouri nizolate, absurd. Rămîne că $f(x_1) < f(x_2)$, deci f este strict crescătaoare.

Corolar 1. *Funcțiile $\mathbf{R} \ni x \mapsto x + \sin x$ și $\mathbf{R} \ni x \mapsto x + \cos x$, sînt strict crescătoare.*

6.4.33. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție netedă pe porțiuni, adică 1° f este continuă pe I; 2° f este derivabilă pe $I \setminus A$ cu A finită. Atunci f este constantă $\Leftrightarrow f'(x) = 0$, $(\forall)\ x \in I \setminus A$.*

Soluție. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ punctele mulțimii A ordonate crescător: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1}$. Să punem $a_0 = \inf A$, $a_n = \sup A$ și $J_i = (a_{i-1}, a_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Din ipoteză avem că f este derivabilă pe J_i și $f'(x) = 0$, $(\forall)\ x \in J_i$. Atunci (T.6.3.4. Cor. 2) f este constantă pe J_i, deci, f fiind continuă pe I, rezultă imediat că f este constantă.

6.4.34. Exercițiu. *Fie $f : I = [0, \infty) \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe I, derivabilă pe $\mathring{I}$, $f(0) = 0$ și f' monoton crescătoare. Atunci funcția $g(x) = \frac{1}{x} f(x)$, $x \in \mathring{I}$ este monoton crescătoare.*

Soluție. Evident avem $g'(x) = \frac{1}{x} f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x) = \frac{1}{x} \left[f'(x) - \frac{1}{x} f(x) \right]$.

Fie $x \in \mathring{I}$ fixat; cf. teoremei lui Lagrange există $\xi \in (0, x)$ a.î. $f(x) - f(0) = (x - 0) f'(\xi)$. Cum f' este monoton crescătoare și $f(0) = 0$ deducem $\frac{1}{x} f(x) = f'(\xi) \leqslant f'(x)$, deci $g'(x) \geqslant 0$ și deci g este monoton crescătoare.

Corolar 1. *Fie $f : I = [0, \infty) \to \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe I cu $f''(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \mathring{I}$. Atunci funcția $x \mapsto \frac{1}{x} \cdot f(x)$, $x \in \mathring{I}$, este monoton crescătoare.*

6.4.35. Exercițiu. *Fie $f : I = [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe I, derivabilă pe $\mathring{I}$ și a.î. $f(a) <$ (resp. $>$) $f(b)$. Atunci $(\exists)\ \xi \in \mathring{I}$ a.î. $f'(\xi) >$ (resp. $<$) 0.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Cf. teoremei lui Lagrange $(\exists)\ \xi \in \mathring{I}$ a.î. $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(\xi)$. Dacă $f(a) <$ (resp. $>$) $f(b)$, atunci $f'(\xi) >$ (resp. $<$) 0.

6.4.36. Exercițiu. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) și cu $f(a) \cdot f(b) \neq -1$. Atunci există $c \in (a, b)$ a.î.*

$$\frac{f(b)-f(a)}{1+f(a)f(b)} = \operatorname{tg}\left((b-a)\frac{f'(c)}{1+(f(c))^2}\right)$$

Ind. Aplicăm T.6.3.4. funcției $F = \operatorname{arc\,tg} f$

$$\operatorname{arc\,tg} f(b) - \operatorname{arc} f(a) = (b-a)\frac{f'(c)}{1+(f(c))^2}. \tag{1}$$

Cum $f(a) \cdot f(b) \neq -1$ putem aplica (Ap. 2.25) relației (1) funcția tg.

6.4.37. Exercițiu. (D. P o m p e i u) *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) și strict pozitivă pe $[a, b]$. Atunci $(\exists)\ c \in (a, b)$ a.î.*

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)}\frac{f'(c)}{f(c)}.$$

Soluție. Aplicăm T.6.3.4. pentru funcția $F = \ln f$. Așadar $(\exists)\ c \in (a,b)$ a.î. $F(b) - F(a) = (b-a)F'(c)$. Cum $F'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $(\forall)\ x \in (a, b)$, rezultă

$$\ln\frac{f(b)}{f(a)} = \ln f(b) - \ln f(a) = (b-a)\frac{f'(c)}{f(c)} \text{ etc.}$$

Corolar 1.

$$e^{1-x} < \frac{1}{x},\ (\forall)\ x \in (0, 1).$$

Soluție. Fie $x \in (0,1)$ fixat și $a,\ b \in \mathbf{R}_+^*,\ a < b$, a.î. $x = \dfrac{a}{b}$. Aplicînd Ex. 6.4.37 pentru funcția $f(x) = x$, $x \in [a, b]$, avem :

$$\frac{b}{a} = e^{(b-a)\frac{1}{c}} > e^{(b-a)}\frac{1}{b} = e^{1-\frac{a}{b}} \text{ etc.}$$

6.4.38. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă și $x_1, x_2, x_3 \in I$. Dacă atît x_1, x_2, x_3, cît și $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ sînt în progresie aritmetică, atunci există $\xi \in \mathring{I}$ a.î. $f''(\xi) = 0$.*

Soluție. Din ipoteză avem $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$ și $f(x_3) - f(x_2) = f(x_2) - f(x_1)$ (1). Din teorema lui Lagrange rezultă că există $y_1 \in (x_1, x_2)$ și $y_2 \in (x_2, x_3)$, $y_1 \neq y_2$ a.î.

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(y_1),\ f(x_3) - f(x_2) = (x_3 - x_2)f'(y_2) \tag{2}$$

Din (1) și (2) avem $f'(y_1) = f'(y_2)$, deci din teorema lui Rolle aplicată funcției f' rezultă că există $\xi \in (y_1, y_2)$ a.î. $f''(\xi) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

6.4.39. Exerciţiu. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcţie continuă pe* $[a,b]$, *derivabilă pe* (a,b) *şi cu proprietatea că există* $c\in(a,b)$ *a.î.* $\dfrac{f(b)-f(c)}{f(c)-f(a)}<0$. *Atunci există cel puţin un punct* $\xi\in(a,b)$ *cu* $f'(\xi)=0$.

Soluţie. Dacă aplicăm teorema lui Lagrange funcţiei $f|_{[a,c]}$ (resp. $f|_{[c,b]}$) rezultă că există $\xi_1\in(a,c)$ (resp. $\xi_2\in(,c,b)$) a.î.

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\xi_1)\left(\text{resp. }\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(\xi_2)\right).$$

Atunci

$$f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{f(c)-f(a)}\cdot\frac{c-a}{b-c}[f(c)-f(a)]2<0,$$

deci, cum f' are proprietatea lui Darboux, $(\exists)\ \xi\in(\xi_1,\xi_2)$ a.î. $f'(\xi)=0$.

6.4.40. Exerciţiu. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcţie neconstantă, continuă pe* $[a,b]$, *derivabilă pe* (a,b) *şi cu* $f(a)=f(b)$. *Atunci mulţimea valorilor funcţiei* f' *adică mulţimea* $f'((a,b))$ *este o vecinătate a lui* 0.

Soluţie. Cf. teoremei lui Darboux (T.6.3.7). funcţia f' are proprietatea Darboux, deci $J=f'((a,b))$ este un interval.

Dacă am avea $J\subseteq[0,\infty)$ (resp. $J\subseteq(-\infty,0]$), atunci

$$f'(x)\geqslant 0,\ (\forall)\ (x\in(a,b)\ \text{(resp. } f'(x)\leqslant 0,\ (\forall)\ x\in(a,b)),$$

deci f este monoton crescătoare (resp. descrescătoare). Cum $f(a)=f(b)$, rezultă că f este constantă, absurd.

Aşadar $J\cap(-\infty,0)\neq\emptyset$ şi $J\cap(0,\infty)\neq\emptyset$, deci J este un interval care conţine originea în interior şi deci J este o vecinătate a lui 0.

6.4.41. Exerciţiu. *Fie* $I\subseteq\mathbf{R}$ *un interval şi* $f:I\to\mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă pe* I *şi cu derivata continuă într-un punct* $x_0\in\mathring{I}$. *Atunci* f *este strict derivabilă în* x_0 *i.e.* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,x_0)}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(x_0)$.

Soluţie. Cf. teoremei lui Lagrange, pentru orice $x,y\in I\setminus\{x_0\}$, $x\neq y$, există $\xi=\xi(x,y)$ cuprins între x şi y a.î. $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi)$. Cum f' este continuă în x_0, avem:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\lim_{\xi\to x_0}f'(\xi)=f'(x_0).$$

6.4.42. Exerciţiu. *Fie* $f:(a,\infty)\to\mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă a.î.* $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)$ *există. Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ *există şi este finită, atunci* $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$.

Soluţie. Din th. Lagrange există $\xi_n\in[n,n+1]$, dacă $n>a$, a.î. $f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}f'(\xi_n)=\lim_{n\to\infty}[f(n+1)-f(n)]=\lim_{n\to\infty}f(n+1)-\lim_{n\to\infty}f(n)=0,$$

deci $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f(\xi_n).=0$.

Corolar 1. *Fie* $f:(a,\infty)\to\mathbf{R}$ *o funcţie de două ori derivabilă a.î.* $f''\geqslant 0$ *sau* $f''\leqslant 0$. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ *există şi este finită, atunci* $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Dacă $f'' \geqslant 0$, atunci f' este monoton crescătoare, deci $\lim_{x \to \infty} f'(x)$ există.

6.4.43. Exercițiu. *Fie* $I \subset \mathbf{R}$ *un interval și* $f : I \to I$ *o funcție derivabilă a.î.* $m \leqslant |f'(x)| \leqslant M$, $(\forall)\ x \in I$. *Atunci* $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, *avem inegalitățile :*

$$m^k |x_1 - x_2| \leqslant |f^{[k]}(x_1) - f^{[k]}(x_2)| \leqslant M^k |x_1 - x_2|, \ (\forall)\ x_1, x_2 \in I,$$

unde prin $f^{[k]}$ *am notat* $f \circ f \circ \ldots \circ f$ *de* k *-ori.*

Soluție. $f^{[k]}$ fiind compunerea a k funcții derivabile, este derivabilă și avem : $(f \circ f)'(x) = f'(f(x))\, f'(x)$; $(f \circ f \circ f)'(x) = f'((f \circ f)(x)) \cdot (f \circ f)'(x), \ldots$ $\ldots, (f^{[k]})'(x) = f'(f^{[k-1]}(x))\, (f^{[k-1]})'(x)$.
Atunci

$$m^2 \leqslant |(f \circ f)'(x)| \leqslant M^2 ; \ m^3 \leqslant |(f \circ f \circ f)'(x)| \leqslant M^3, \ \ldots,$$

$$m^k \leqslant |(f^{[k]})'(x)| \leqslant M^k, \ (\forall)\ x \in I.$$

Fixăm $x_1, x_2 \in I$; cf. th. Lagrange $(\exists)\ \xi \in (x_1, x_2)$ a.î.

$$f^{[k]}(x_1) - f^{[k]}(x_2) = (x_1 - x_2)\, (f^{[k]})(\xi),$$

deci

$$m^k |x_1 - x_2| \leqslant |f^{[k]}(x_1) - f^{[k]}(x_2)| \leqslant M^k |x_1 - x_2|.$$

6.4.44. Exercițiu. *Fie* $f : [a, \infty) \to \mathbf{R}$ *o funcție de două ori derivabilă cu proprietățile :* $1^\circ\ f(a) < 0$; $2^\circ\ f'(a) > 0$; $3^\circ\ f''(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in (a, \infty)$. *Atunci* $(\exists\,!)\ x_0 \in (a, \infty)$ *a.î.* $f(x_0) = 0$.

Soluție. Aplicînd th. Lagrange funcțiilor f și f' pe intervalul $[a, x]$, cu $x > a$, obținem :

$$\left.\begin{aligned} f(x) - f(a) &= (x - a)\, f'(\xi(x)),\ \xi(x) \in (a, x) \\ f'(x) - f'(a) &= (x - a)\, f''(\eta(x)),\ \eta(x) \in (a, x) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

deci cf. 2° și 3° avem $f'(x) > 0$ și deci f este strict crescătoare. Din (1) deducem :

$$f(x) = f(a) + (x - a) f'(a) + (x - a)\, (\xi(x) - a)\ f''(\eta(\xi(x)))$$

deci ținînd din nou seama de 2° și 3 rezultă că există $b > a$ a.î. $f(x) > 0$. $(\forall) x \geqslant b$. Cum f este continuă pe $[a, b]$ și $f(a) \cdot f(b) < 0$, $(\exists)\ x_0 \in (a, b)$ cu $f(x_0) = 0$ Funcția f fiind strict monotonă se anulează cel mult într-un punct, deci există un singur punct x_0 cu $f(x_0) = 0$.

6.4.45. Exercițiu. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă pe* $[a, b]$, *derivabilă pe* (a, b) *și* $M\ (\alpha, \beta)$ *un punct pe dreapta care trece prin* $A\ (a, f(a))$ *și* $B(b, f(b))$ *cu* $\alpha \notin [a, b]$. *Atunci există cel puțin un punct* $c \in (a, b)$ *cu proprietatea că tangenta la graficul lui* f *în punctul* $C(c, f(c))$ *trece prin* M.

Soluție. Fie funcțiile $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x - \alpha}$, $x \in [a, b]$ și $\psi(x) = \dfrac{1}{x - \alpha}$, $x \in$ $\in [a, b]$. Evident φ și ψ verifică condițiile teoremei lui Cauchy (T.6.3.5), deci există $c \in (a, b)$ a.î.

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}.$$

Înlocuind φ și ψ cu expresiile lor, obținem :

$$\frac{(a - \alpha) f(b) - (b - \alpha) f(a)}{a - b} = f(c) - (c - \alpha) f'(c).$$

Scanned with OKEN Scanner

Punctele $M(\alpha, \beta)$, $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ fiind coliniare, avem $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & a & b \\ \beta & f(a) & f(b) \end{vmatrix} = 0$,

de unde deducem $\beta = \dfrac{(a-\alpha) f(b) - (b-\alpha) f(a)}{a-b}$, deci

$$\beta - f(c) = (\alpha - c) f'(c) \tag{1}$$

Ecuația tangentei la graficul lui f în punctul $(c, f(c))$ fiind $y - f(c) = (x - c) f'(c)$, din (1) rezultă că ea trece prin punctul (α, β).

Semnificația geometrică. Fie $M(\alpha, \beta)$ un punct pe dreapta care trece prin $A(a, f(a))$ și $B(b, f(b))$, unde $\alpha \notin [a, b]$. Atunci prin M se poate duce o tangentă, la graficul lui f (fig. 18).

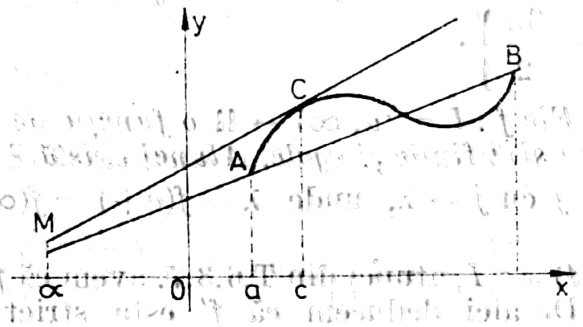


Fig. 18

6.4.46. Exercițiu. *Fie* $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție de* n *ori derivabilă* $(n \geqslant 2)$, *cu proprietatea că graficul lui* f *are cel puțin* $n+1$ *puncte coliniare. Atunci* $(\exists)$ $c \in (a, b)$ *a.î.* $f^{(n)}(c) = 0$.

Soluție. Fie (Δ) o dreaptă de ecuație $y = \alpha x + \beta$ care intersectează graficul lui f în cel puțin $n+1$ puncte distincte. Aceasta înseamnă că $(\exists)\ a \leqslant a_0 < a_1 < \ldots < a_n \leqslant b$ a.î. punctele $P_i(a_i, f(a_i))$ $(i = \overline{0, n})$ se află pe (Δ).

Atunci $(\forall) i = \overline{1, n}$ avem $f(a_i) - f(a_{i-1}) = \alpha(a_i - a_{i-1})$. Aplicînd T.6.3.4. rezultă: $(\forall) i = \overline{1, n}$, $(\exists)\ c_i \in (a_{i-1}, a_i)$ a.î. $f'(c_i) = \alpha$. Considerăm mai departe funcția $F := f' - \alpha$. Evident F este de $n-1$ derivabilă și se anulează în punctele $c_i (i = \overline{1, n})$, deci (T.6.3.2. Cor. 2) $(\exists)\ c \in (a, b)$ a.î. $F^{(n-1)}(c) = 0 \Leftrightarrow f^{(n)}(c) = 0$.

6.4.47. Exercițiu. *Fie* $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < b < c$ *și* $f: [a, c] \to \mathbf{R}$ *o funcție derivabilă. Atunci există* $\xi \in (a, b)$, $\eta \in (a, c)$, $\xi < \eta$ *a.î.*

$$f(a) - f(b) = (a - b) f'(\xi) \text{ și } f(a) - f(c) = (a - c) f'(\eta).$$

Soluție. Din th. Lagrange există $\xi \in (a, b)$, $\zeta \in (b, c)$ a.î. $f(a) - f(b) = (a - b) f'(\zeta)$ și $f(b) - f(c) = (b - c) f'(\zeta)$. Însă

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \cdot \frac{c - b}{c - a} + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \frac{b - a}{c - a} =$$

$$= \lambda f'(\zeta) + (1 - \lambda) f'(\xi), \text{ unde } \lambda = \frac{c - b}{c - a} \in (0, 1).$$

Cum numărul $\lambda f'(\zeta) + (1 - \lambda) f'(\xi)$, care este egal cu $\frac{f(c) - f(a)}{c - a}$, este un număr cuprins între $f'(\xi)$ și $f'(\zeta)$, iar f' are proprietatea lui Darboux (T.6.3.7.), există $\eta \in (\xi, \zeta)$ a.î. $f'(\eta) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$. Evident numerele ξ, η astfel obținute satisfac condițiile din enunț.

Corolar 1. *Fie $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $a<c<b<d$ și $f : [a, d] \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă. Atunci există $\xi \in (a, b)$ și $\eta \in (c, d)$, $\xi < \eta$, a.î.*

$$f(a) - f(b) = (a - b) f'(\zeta) \text{ și } f(c) - f(d) = (c - d) f'(\eta).$$

Soluție. Se reia soluția dată mai sus pentru $\{a, c, b\}$ și $\{c, d, b\}$.

Observație. Cor. 1. nu este numaidecît adevărat pentru trei perechi de puncte.

Contraexemplu. Considerăm funcția $f = \sin|_{[0,2\pi]}$ și perechile de puncte $\{0, 2\pi\}$, $\left\{0, \frac{3\pi}{2}\right\}$, $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

6.4.48. Exercițiu. *Fie $f : I = (a, \infty) \to \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă a.î. $f(a+), f(\infty -)$ există sînt finite și egale. Atunci există $\xi \in I$ a.î. $f''(\xi) = 0$.*

Soluție. Înlocuind f cu $f - \lambda$, unde $\lambda = f(a+) = f(\infty -)$, putem considera că $\lambda = 0$.

Dacă $f''(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I$, atunci din T.6.3.7. avem că $f'' > 0$ sau $f'' < 0$, spre exemplu, $f'' > 0$. De aici deducem că f' este strict crescătoare, deci $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ există, finită sau infinită (T.5.5.18). Cum $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, avem $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, deci cu ajutorul regulei lui L'Hospital (T.6.4.3.) deducem :

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{1} \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$$

Atunci (T.5.5.18. Cor. 3) $f' \leqslant 0$, deci f e monoton descrescătoare.

Cum $f(a+) = f(\infty -) = 0$, rezultă (T.5.5.18. Cor. 3) $f = 0$, absurd. Prin urmare există $\xi \in I$ cu $f''(\xi) = 0$.

Observație. Dacă I este un interval mărginit, atunci Ex. 6.4.48. nu este numaidecît adevărat.

6.4.49. Exercițiu. *Fie $f, g : I = [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcții cu proprietățile : f continuă, g derivabilă pe I și nulă cel puțin într-un punct și $(\exists)\ \lambda \neq 0$ a.î. $|f(x)g(x) + \lambda g'(x)| \leqslant |g(x)|$, $(\forall)\ x \in I$. Atunci $g = 0$*

Soluție. Evident (T.5.5.17 Cor. 1) f este mărginită, deci există $M > 0$ a.î. $|f(x)| < M$, $(\forall)\ x \in I$. Dacă există $x_0 \in \mathring{I}$ a.î. $g(x_0) \neq 0$, spre exemplu $g(x_0) > 0$, atunci (P.5.5.14). există $J = (c, d) \subseteq I$ o vecinătate a lui x_0 a.î. $g(x) > 0$, $(\forall)\ x \in J$. Cum g se anulează cel puțin într-un punct din I, putem alege J a.î. $g(c) = 0$.

Din inegalitatea dată obținem :

$$\left| f(x) + \lambda \frac{g'(x)}{g(x)} \right| \leqslant 1, \quad (\forall)\ x \in J,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$\left|\frac{g'(x)}{g(x)}\right| = \frac{1}{|\lambda|}\left|\left(f(x) + \frac{g'(x)}{g(x)}\right) - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}(1 + M),\ (\forall)\ x \in J. \qquad (1)$$

Dacă $\varphi : J \to \mathbf{R}$ este definită astfel $\varphi(x) = \ln g(x)$, $(\forall)\ x \in J$, atunci din (1) deducem $|\varphi'(x)| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}(1 + M)$, $(\forall)\ x \in J$, deci (P.7.3.6. Cor. 1) φ este mărginită pe J.

Pe de altă parte însă $\lim\limits_{x \searrow c} \varphi(x) = \lim\limits_{x \searrow c} \ln g(x) = -\infty$, deci φ este nemărginită pe J, absurd.

Prin urmare $g = 0$ pe $\mathring{I}$, deci $g = 0$.

6.4.50. Exerciţiu (Lema lui Gronwall). *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă a.î. f se anulează cel puţin într-un punct şi există $k > 0$ cu proprietatea $|f'(x)| \leqslant k|f(x)|$, $(\forall)\ x \in I$. Atunci $f = 0$.*

Soluţie. Se aplică Ex. 6.4.49. pentru $f = 0$, $g = f$, $\lambda = \frac{1}{k}$ şi $[a, b] \subseteq I$ cu a, b fixaţi arbitrar.

6.4.51. Exerciţiu. *Să se calculeze limitele* : $1^\circ \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} - 1}{x}$;

$2^\circ \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$; $3^\circ \lim\limits_{x \to \infty} x\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e\right]$; $4^\circ \lim\limits_{x \to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

Soluţia 1. 1° Fie $f(x) = \ln(1 + x) + \frac{x^2}{2}$, $x \in (-1, \infty)$. Atunci $f'(x) = \frac{1}{1 + x} + x$ şi $f''(x) = -\frac{1}{(1 + x)^2} + 1$, deci f' este strict descrescătoare (resp. crescătorare) pe $(-1, 0)$ (resp. $(0, \infty)$), de unde deducem imediat

$$f'(0) \leqslant \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leqslant f'(x),\ (\forall)\ x \in (-1, \infty)\setminus\{0\}$$

şi deci

$$1 \leqslant \frac{\ln(1 + x) + \frac{x^2}{2}}{x - 0} \leqslant \frac{1}{1 + x} + x,\ (\forall)\ x \in (-1, \infty)\setminus\{0\},$$

prin urmare

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{\frac{1}{x}\ln(1 + x) - 1}{x} \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{1 + x},\ (\forall)\ x \in (-1, \infty)\setminus\{0\}$$

De aici prin trecere la limită, $x \to 0$, obţinem :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} - 1}{x} = -\frac{1}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

2° Notăm $g(x) = \frac{1}{x}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}} - e\right]$, $x \in (-1, \infty)\setminus\{0\}$; avem:

$$g(x) = \frac{1}{x}\left[e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} - e\right] = \frac{e}{x}\left[e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1} - 1\right].$$

Notăm $\varphi(x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1$, $x \in (-1, \infty)\setminus\{0\}$; avem:

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0 \text{ şi } g(x) = \frac{e^{\varphi(x)} - 1}{\varphi(x)} \cdot \frac{e\varphi(x)}{x} \quad (\forall)\ x \in (-1, \infty)\setminus\{0\},$$

deci

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\varphi(x)} - 1}{\varphi(x)} \cdot e \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 1 \cdot e \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{e}{2}$$

3° se obţine din 2° punînd $x = \frac{1}{t}$

4° Plecăm de la relaţia evidentă

$$\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}} = e^{\frac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1}{x}}, \quad x \neq 0$$

Din (1) prin trecere la limită, $x \to 0$, obţinem $e^{-\frac{1}{2}}$ (cf. 1°).

Soluţia 2. Se aplică de fiecare dată regula lui L'Hospital (v. Ex. 6.6.9.)

6.4.52. Exerciţiu. *Să se determine funcţiile derivabile* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *care au proprietatea că* $f'(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Soluţie. Fie funcţia $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, $x \in \mathbf{R}$. Deoarece $(e^x)' = e^x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, rezultă

$$g'(x) = \frac{f'(x)\cdot e^x - f(x)(e^x)'}{e^{2x}} = 0, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Atunci $g = c$ (constantă), deci $f(x) = ce^x$ $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

6.4.53. Exerciţiu. *Să se arate că seria* $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ *este divergentă, aplicînd teorema lui Lagrange funcţiei* $f(x) = \ln\ln x$, $x \in I = (1, \infty)$.

Ind. Evident $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $(\forall)\ x \in I$. Atunci

$$\ln\ln(n+1) - \ln\ln n = \frac{1}{\xi \ln \xi}, \quad \xi \in (n, n+1),$$

deci

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \ln\ln(n+1) - \ln\ln n < \frac{1}{n \ln n}, \quad (\forall)\ n \geq 2$$

şi deci

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} > \sum_{k=2}^{n} [\ln\ln(k+1) - \ln\ln k] = \ln\ln(n+1) - \ln 2 \to \infty.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.4.54. Exerciţiu. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă cu derivata mărginită şi* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir monoton crescător cu elemente din* $[a,b]$. *Atunci* $\sum_{n\geq 1}|f(x_n)-f(x_{n-1})|\leq (b-a)\|f'\|_\infty$, *unde* $\|f'\|_\infty=\sup_{n\in[a,b]}|f'(x)|$.

Ind. Cf. teoremei lui Lagrange,, pentru $(\forall)\ i>1$, avem :

$$|f(x_i)-f(x_{i-1})|=(x_i-x_{i-1})|f'(\xi_i)|\leq|x_i-x_{i-1}|\cdot\|f'\|_\infty,$$

deci

$$\sum_{i=2}^{n}f(x_i)-f(x_{i-1})|\leq\sum_{i=2}^{n}(x_i-x_{i-1})\|f'\|_\infty\leq(b-a)\|f'\|_\infty;$$

Trecem apoi la limită după n.

6.4.55. Exerciţiu. *Fie* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă a.î.* $f'(0)=0$ *şi* $f'(1)=1$. *Atunci* $(\exists)\ c\in(0,1)$ *cu* $f'(c)=\frac{1}{2}$.

Ind. Ţinem seama că f' are proprietatea Darboux (T.6.3.7.).

6.4.56. Exerciţiu. *Să se determine parametrul real* λ *a.î. funcţia* $f(x)=\ln(1+x^2)-\lambda x$, $x\in\mathbf{R}$, *să fie monoton cresctătoare.*

Ind. f monoton crescătoare $\Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}-\lambda\geq 0$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\lambda x^2-2x+\lambda\leq 0\ (\forall)\ x\in\mathbf{R}\Leftrightarrow\lambda<0$ şi $4-4\lambda^2\leq 0\Leftrightarrow\lambda\leq -1$.

6.4.57. Exerciţiu. *Să se determine parametrul real* θ *a.î. funcţia* $f(x)=x^5-4x^4\cos\theta+5x^3$, $x\in\mathbf{R}$, *să nu aibă extreme locale.*

Ind. Funcţia f fiind polinomială de grad impar, avem : f monotonă $\Leftrightarrow$ f monoton crescătoare $\Leftrightarrow f'(x)=5x^2(x^2-4x\cos\theta+3)\geq 0$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4\cos^2\theta-3\leq 0\Leftrightarrow|\cos\theta|\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$.

6.4.58. Exerciţiu. *Să se studieze extremele funcţiilor :*

$1^\circ\ f(x)=\operatorname{ch}x$, $x\in\mathbf{R}$; $2^\circ\ f(x)=\operatorname{sh}x$, $x\in\mathbf{R}$;

$3^\circ\ f(x)=a^{x^2}$, $x\in\mathbf{R}(a\in\mathbf{R}_+,\ a\neq 1)$; $4^\circ\ f(x)=e^{\sqrt{1-\sin x}}$ $x\in[0,\pi]$;

$5^\circ\ f(x)=\ln\sin x$, $x\in(0,\pi)$; $6^\circ\ f(x)=\cos x+\operatorname{ch}x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Ind. $1^\circ\ f'(x)<0$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}_-^*$ şi $f'(x)>0$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}_+^*$, deci 0 este punct de minim.

2° f nu are extreme.

$3^\circ\ f'(x)<0$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}_-^*$ şi $f'(x)>0$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}_+^*$, deci 0 este punct de minim.

$4^\circ\ f'(x)<0$, $(\forall)\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $f'(x)>0$, $(\forall)\ x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$, deci 0 este punct de minim ; $f_s'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-f_d'\left(\frac{\pi}{2}\right)=+\infty$.

$5^\circ\ f'(x)>0$, $(\forall)\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $f'(x)<0$, $(\forall)\ x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, deci 0 este punct de maxim.

6° Deoarece $\sin x<x<\operatorname{sh}x$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}_+^*$, avem $f'(x)>0$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}_+^*$. Cum f este pară, rezultă că 0 este punct de minim.

Scanned with OKEN Scanner

6.5. Continuitatea funcției derivate. Derivarea funcției inverse

6.5.1. Exercițiu. *Fie* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x)=ax+b$, *dacă* $x<1$ *și* $f(x)=x^2$, *dacă* $x\geqslant 1$. *Să se determine* a *și* b *a.î.* f *să fie derivabilă pe* $\mathbf{R}$.

Soluție. Evident f este indefinit derivabilă pe $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ și avem (P. 6.1.5. Cor. 1) $f'(x)=a$, dacă $x<1$ și $f'(x)=2x$, dacă $x>1$.

Mai departe avem (T.5.5.6. Cor 2): f continuă în $1\Leftrightarrow f(1-)=f(1+)=f(1)$, deci $-a+b=1$. Deoarece avem $f'(1-)=a$ și $f'(1+)=2$, din T. 6.3.8. Cor. 1 rezultă $f'_s(1)=a$ și $f'_d(1)=2$, deci (P. 6.1.8.): f derivabilă în $1\Leftrightarrow f'_s(1)=f'_d(1)\Leftrightarrow a=2$.

Să observăm că f nu este de două ori derivabilă în punctul $x=1$.

6.5.2. Exercițiu. *Fie* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x)=ax^2+b$, *dacă* $x\leqslant 1$ *și* $f(x)=1+\ln x$, *dacă* $x>1$. *Să se determine* a *și* b *a.î.* f *să fie derivabilă pe* $\mathbf{R}$.

Soluție. Evident f este derivabilă pe $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ și avem (P. 6.1.5. Cor. 1): $f'(x)=2ax$, dacă $x<1$ și $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, dacă $x\geqslant 1$. Mai departe:

$$f \text{ continuă în } 1\Leftrightarrow f(1-)=f(1+)=f(1).$$

Cum $f(1-)\ a+b=f(1)$ și $f(1+)=1$, rezultă că $a+b=1$, deci $f(x)=a(x^2-1)+1$, $(\forall)\ x\leqslant 1$. În fine, avem $\lim\limits_{x\nearrow 1} f'(x)=2a$, deci $f'_s(1)=1$ și $\lim\limits_{x\searrow 1} f'(x)=1$, deci $f'_d(1)=1$. Așadar rezultă:

$$f \text{ derivabilă în } 1\Leftrightarrow f'_s(1)=f'_d(1)\Leftrightarrow 2a=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}.$$

Prin urmare $a=b=\dfrac{1}{2}$.

6.5.3. Exercițiu. *Fie* $I\subseteq\mathbf{R}$ *un interval și* $f,g:I\to\mathbf{R}$ *două funcții derivabile. Atunci* $f'=g'\Leftrightarrow(\exists)\ A\subseteq I$ *cel mult numerabilă a.î.* $f'(x)=g'(x)$, $(\forall)x\in I\setminus A$.

Soluție. ($\Leftarrow$) Fie $h:=f-g$. Atunci h este derivabilă și avem $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$, $(\forall)\ x\in I\setminus A$. Așadar h' ia o mulțime cel mult numerabilă de valori și h' are proprietatea Darboux (T. 6.3.7.), deci (P. 4.3.4.) h' este constantă. Cum h' se anulează cel puțin într-un punct, avem $h'=0$, deci $f'=g'$.

Observație. Ex. 6.5.3. este o variantă a P. 8.1.4.

6.5.4. Exercițiu. *Fie* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x)=\sin x$, *dacă* $x\geqslant 0$ *și* $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, *dacă* $x<0$. *Să se cerceteze derivabilitatea lui* f *în punctul* $x=0$.

Soluție. $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}\sin x=0$; $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0} e^{1/x}=\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}=0$, deci $f(0+)=f(0-)=0$ și deci f este continuă în $x=0$.

Din P. 6.1.5. Cor. 1. rezultă că f este derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ și avem:

$$f'(x)=\cos x, \text{ dacă } x>0 \text{ și } f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}, \text{ dacă } x<0$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci $\lim\limits_{x\searrow 0} f'(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} \cos x = 1$, deci cf. T.6.3.8. Cor. 1 rezultă $f'_d(0) = 1$.

Analog avem :

$$\lim_{x\nearrow 0} f'(x) = \lim_{x\nearrow 0}\left(-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}\right) = -\lim_{t\to\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t} = 0,$$

deci $f'_s(0) = 0$ și deci f nu este derivabilă în $x = 0$.

Aplicînd direct definiția lui $f'_s(0)$ și $f'_d(0)$ se obține același rezultat.

6.5.5. Exercițiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{|x|}$, *dacă* $x \in \mathbf{R}^*$ *și* $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$. *Să se cerceteze derivabilitatea lui* f *în punctul* $x = 0$.

Soluție. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{|x|} = \lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{arc\,tg}\, t = \dfrac{\pi}{2}$, deci f este continuă în punctul 0.

Din P. 6.1.5. Cor. 1° rezultă că f este derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ și avem :

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \text{ dacă } x > 0 \text{ și } f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \text{ dacă } x < 0.$$

Atunci $\lim\limits_{x\searrow 0} f'(x) = -1$, $\lim\limits_{x\nearrow 0} f'(x) = 1$, deci (T. 6.3.8. Cor 1) $f'_s(0) = 1$ și $f'_d(0) = -1$.

Prin urmare f nu este derivabilă în 0.

Aplicînd definiția derivabilității lui f în 0 se obține același rezultat.

6.5.6. Exercițiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, *dacă* $x < 0$ *și* $f(x) = 0$, *dacă* $x \geqslant 0$. *Atunci* f *este indefinit derivabilă.*

Soluție. Din P. 6.1.5. Cor. 1 rezultă că f este indefinit derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ și avem :

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{1/x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right), & x < 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases}, \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{1/x} P_{2n-1}(x), & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases},$$

unde P_{2n-1} este un poinom de grad $2n-1$.

Atunci $(\forall)\ n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x\nearrow 0} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x\nearrow 0} \mathrm{e}^{1/x} P_{2n-1}(x) = \lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t} P_{2n-1}(t) = 0$ și cum $\lim\limits_{x\searrow 0} f^{(n)}(x) = 0$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$, deci (T. 6.3.8. Cor. 1) $f^{(n)}(0)$ există și este 0.

Prin urmare $f \in \mathcal{C}^n(\mathbf{R})$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

6.5.7. Exercițiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă pe* $\mathbf{R}$ *și derivabilă pe* $\mathbf{R} \setminus A$, *unde* A *este o mulțime discretă. Dacă există* $P \in \mathbf{R}[X]$ *un polinom a.î.* $f'(x) = P(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus A$, *atunci* f *este polinomială.*

Ind. Deoarece A este izolată, avem $(\mathbf{R} \setminus A)' = \mathbf{R}$, deci cum $f'(x) = P(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus A$, rezultă că $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = P(a)$, $(\forall)\ a \in A$. Prin urmare (T. 6.3.8. Cor. 1) $f' = P$ și deci f este polinom.

6.5.8. Exercițiu. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă pe* $[a, b]$, *derivabilă pe* (a, b) *și cu* $f(a) = f(b)$. *Atunci* $(\forall)\ \lambda \in \mathbf{R}$ *există* $x_1, x_2 \in (a, b)$ *diferite între ele a.î.* $f'(x_1) + \lambda f'(x_2) = 0$.

Soluție. Dacă f este constantă afirmația este evidentă. Presupunem f necunoscută, fie $I = [a, b]$ și $J = f(I)$. Cum f' are proprietatea lui Darboux

Scanned with OKEN Scanner

(T. 6.3.7.) rezultă (P. 4.3.2.) că J este un interval. Dacă $J \subseteq \mathbf{R}_+^*$ sau $J \subseteq \mathbf{R}_-^*$, atunci $f' \geqslant 0$ sau $f' \leqslant 0$ pe I, deci f monotonă pe I și deci, f fiind continuă pe I, deducem că f este monotonă pe I. Însă $f(a) = f(b)$, prin urmare f este constantă, absurd. Conchidem că

$$J \cap \mathbf{R}_- \neq \emptyset \text{ și } J \cap \mathbf{R}_+ \neq \emptyset \tag{1}$$

Din (1) rezultă imediat că $(\forall)\ \lambda \in \mathbf{R}$, există $y_1, y_2 \in J$ a.î. $y_1 + \lambda y_2 = 0$, deci există $x_1, x_2 \in I$ a.î. $f'(x_1) + \lambda f'(x_2) = 0$.

6.5.9. Exercițiu. *Fie* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *un difeomorfism. Atunci* $f'(x) = 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$.

Soluție. Funcția f fiind un difeomorfism, rezultă că f este bijectivă și f, f^{-1} sînt derivabile. Punem $g = f^{-1}$. Derivînd relația $g \circ f = \mathbf{1}$, obținem:

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

deci $f'(x) \neq 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$.

6.5.10. Exercițiu. *Să se arate că* $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+^*$, *aplicînd teorema de derivare a funcției inverse* (T. 6.3.10).

Soluție. Fie $f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ o funcție definită astfel $f(x) = x^2$. Atunci f este bijectivă, derivabilă și $f'(x) = 2x \neq 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+^*$. Cum $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, $(\forall)$ $y \in \mathbf{R}_+^*$, avem (T. 6.3.10):

$$(\sqrt{y})' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2f^{-1}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}},\ (\forall)\ y \in \mathbf{R}_+^*.$$

Observație. Deoarece $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = +\infty$, avem $(\sqrt{\cdot})'_d(0) = +\infty$

6.5.11. Exercițiu. *Presupunem cunoscută derivata funcției* ln. *Să se calculeze derivata funcției* $\exp_a$, *aplicînd teorema de derivare a funcției inverse* (T. 6.3.10.).

Soluție. Fie $f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = \log_a x$, unde $a \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$ este fixat. Se știe că $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+^*$. Funcția f este bijectivă, derivabilă și avem $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a} \neq 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+^*$. Cum avem: $f^{-1}(y) = a^y$, $(\forall)$ $y \in \mathbf{R}$, rezultă (T. 6.3.10):

$$(a^y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\dfrac{1}{a^y \ln a}} = a^y \ln a$$

6.5.12. Exercițiu. *Să se calculeze derivata funcției* arc cos, *aplicînd teorema de derivare a funcției inverse* (T. 6.3.10.).

Soluție. Fie $f: [0, \pi] \to [-1, 1]$ o funcție definită astfel $f(x) = \cos x$. Evident f este bijectivă, derivabilă pe $[0, \pi]$ și avem $f'(x) = -\sin x \neq 0$, $(\forall)$ $x \in (0, \pi)$. Atunci $(\forall) y \in (-1, 1)$, avem (T. 6.3.10) relația:

$$(\text{arc cos } y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{-\sin(\text{arc cos } y)} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\text{arc cos } y)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Scanned with OKEN Scanner

6.6. Înlăturarea formelor nedeterminate (Regula lui L'Hospital)

6.6.1. Exerciţiu. *Fie* $a \in \mathbf{R}$ *şi* $f : I = (a, \infty) \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă cu proprietăţile* : 1° $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *există şi este finită*; 2° $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ *există. Atunci* $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$.

Soluţie. Evident $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Cu ajutorul regulii lui L'Hospital deducem : $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{1}$, adică $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Observaţie. Fie $f : I = (0, \infty) \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin x^2$. Evident $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ nu există. Deci condiţia 2° din Ex. 6.6.1. nu poate fi omisă.

6.6.2. Exerciţiu. *Fie* $a \in \mathbf{R}$ *şi* $f : I = (a, \infty) \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă cu proprietăţile* : 1° $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *există şi este finită*; 2° $\lim\limits_{x\to\infty} x f'(x)$ *există. Atunci* $\lim\limits_{x\to\infty} xf'(x) = 0$.

Soluţie. Evident avem $f(x) = \dfrac{xf(x)}{x}$, $(\forall)\, x \in I \setminus \{0\}$, deci aplicînd regula lui L'Hospital deducem :

$$l = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) + xf'(x)}{1} = l + \lim_{x\to\infty} x f'(x)$$

şi deci $\lim\limits_{x\to\infty} x\, f'(x) = 0$.

Observaţie. Condiţia 2° din Ex. 6.6.2. nu poate fi omisă; vezi exemplul din Ex. 6.6.1.

Corolar 1. *Fie* $a \in \mathbf{R}$ *şi* $f : I = (a, \infty) \to \mathbf{R}$ *o funcţie de* n *ori derivabilă cu proprietăţile* : 1° $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *există şi este finită*; 2° $\lim\limits_{x\to\infty} x^k f^{(k)}(x)$ *există*, $(\forall)\ 1 \leqslant k \leqslant n$. *Atunci* $\lim\limits_{x\to\infty} x^k f^{(k)}(x) = 0$, $(\forall)\ 1 \leqslant k \leqslant n$.

Soluţie. Aplicăm succesiv Ex. 6.6.2. pentru funcţiile :

$$f ; f_1(x) = xf'(x),\ x \in I ;\ f_2(x) = x^2 f'(x),\ x \in I ; \ldots$$

6.6.3. Exerciţiu. *Fie* $a \in \mathbf{R}$ *şi* $f : (a, \infty) \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă cu proprietatea că* $(\exists)\ \lambda > 0$ *a.î.* $\lim\limits_{x\to\infty} (f'(x) + \lambda f(x)) = l \in \mathbf{R}$. *Atunci* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l\,\lambda^{-1}$ *şi* $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Soluţie. Fie $g(x) = e^{\lambda x} f(x)$, $x \in (a, \infty)$. Atunci (T. 6.4.3.) avem :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{e^{\lambda x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\lambda x} f'(x) + \lambda e^{\lambda x} f(x)}{\lambda e^{\lambda x}} = l\lambda^{-1},$$

deci

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} (f'(x) + \lambda f(x) - \lambda \lim_{x\to\infty} f(x) = l - \lambda l \lambda^{-1} = 0$$

Corolar 1. *Fie* $a \in \mathbf{R}$ *şi* $f : (a, \infty) \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă a.î.*

$$\lim_{x\to\infty} (f'(x) + f(x)) = 0.\ \textit{Atunci}\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.6.4. Exercițiu. *Fie* $f:(a,\infty)\to\mathbf{R}$ *o funcție de două ori derivabilă și neconstantă. Dacă* $f'\geqslant 0$ *și* $f''\geqslant 0$, *atunci* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

Soluție. Deoarece $f'\geqslant 0$ și $f''\geqslant 0$, rezultă că f și f' sînt monoton crescătoare, deci (T. 5.5.18) au limită la $+\infty$. Dacă $l=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\in\mathbf{R}$, atunci (T.6.4.3.) avem :

$$0=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{1},$$

deci (T. 5.5.18. Cor. 3) $f'=0$ și deci $f=$ constantă, absurd.

6.6.5. Exercițiu. *Fie* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcție de două ori derivabilă a.î.* $f\geqslant 0$ *și* $f''\leqslant 0$ *(resp.* $f\leqslant 0$ *și* $f''\geqslant 0$*). Atunci* f *este constantă.*

Soluție. Din $f''\leqslant 0$, rezultă (T. 6.3.4. Cor. 3) f' monoton descrescătoare, deci (T. 5.5.18.) f' are limite la $-\infty$ și $+\infty$; fie $\alpha=\lim\limits_{x\searrow-\infty} f'(x)$ și $\beta=\lim\limits_{x\nearrow+\infty} f'(x)$. Atunci aplicînd T. 6.4.3. avem :

$$\lim_{x\searrow-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\searrow-\infty}\frac{f'(x)}{1}=\alpha;\ \lim_{x\nearrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\searrow 1}\frac{f'(x)}{1}=\beta$$

Cum $f\leqslant 0$, rezultă $\frac{f(x)}{x}\leqslant 0$, dacă $x\in\mathbf{R}_-^*$ și $\frac{f(x)}{x}\geqslant 0$, dacă $x\in\mathbf{R}_+$, deci $\alpha\leqslant 0$ și $\beta\geqslant 0$ și deci $\alpha=\beta=0$.

Așadar $\lim\limits_{x\searrow-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\nearrow\infty} f'(x)=0$ și cum f' este monotonă, rezultă (T. 5.5.18. Cor. 3), $f'=0$ prin urmare f constantă.

Corolar 1. *Nu există funcție de două ori derivabilă* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *a.î.* $f\geqslant 0$ *și* $f''<0$ *(resp.* $f\leqslant 0$ *și* $f''>0$*).*

Observația 1. Analog se arată că dacă $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ este de două ori derivabilă, $f(0)=0$, $f\geqslant 0$ și $f''\leqslant 0$, atunci f constantă.

Observația 2. Dacă mulțimea de definiție a lui f este un interval mărginit, Ex. 6.6.5. nu este numaidecît adevărat.

Contraexemplu. Fie $f(x)=1-x^2$, $x\in[0,1]$. Atunci $f\geqslant 0$, $f''<0$ și f este neconstantă.

6.6.6. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\,x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Soluție. Fie $f(x)=\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\,x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$, $x\in\mathbf{R}_+^*\setminus\{1\}$. Atunci prin logaritmare

$$\ln f(x)=\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\,x\right)}{\ln x},\ x\in\mathbf{R}_+^*\setminus\{1\},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci aplicînd de două ori regula lui L'Hospital, avem :

$$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\pi/2 - \operatorname{arc\,tg} x} \cdot \dfrac{-1}{1+x^2}}{\dfrac{1}{x}} =$$

$$= -\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x}{1+x^2}}{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1\cdot(1+x^2) - 2x\cdot x}{(1+x^2)^2}}{-\dfrac{1}{1+x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = -1.$$

Prin urmare $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln f(x)} = e^{-1}$

6.6.7. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{\ln \operatorname{trig} ax}{\ln \operatorname{trig} bx}$ $(a > 0, b > 0)$

Soluţie. Să considerăm cazul funcţiei sin. Deoarece funcţia ln este definită pe $(0, \infty)$ şi sin x este negativ pe intervalul $(-\pi, 0)$ are sens să vorbim numai de limita la dreapta în 0. Avem o nedeterminare de forma $\frac{\infty}{\infty}$. Dacă aplicăm regula lui Hospital, obţinem :

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx} = \lim_{x\searrow 0} \frac{a\dfrac{\cos ax}{\sin ax}}{\dfrac{b\cos bx}{\sin bx}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{\cos ax}{\cos bx} \frac{\sin bx}{bx} \frac{ax}{\sin ax} = 1.$$

6.6.8. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+1} - \operatorname{tg}\sqrt{x+1}}{\operatorname{tg}(x^2-1)}$.

Soluţie. Evident avem o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$.

Pentru $0 < |x-1| < \delta$, cu δ suficient de mic, avem :

$$\frac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+1} - \operatorname{tg}\sqrt{x+1}}{\operatorname{tg}(x^2-1)} = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+1} - \operatorname{tg}\sqrt{x+1}}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-1}{\operatorname{tg}(x^2-1)}$$

Evident avem $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\operatorname{tg}(x^2-1)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\operatorname{tg} t} = 1$ şi

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+1} - \operatorname{tg}\sqrt{x+1}}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right],$$

deci cu regula lui Hospital, obţinem :

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{2x}\left[\frac{1}{\cos^2\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\cos^2\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{2}}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}\cos^2\sqrt{2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.6.9. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$ *cu ajutorul regulei lui L'Hospital*

Soluţie. Avem o nedeterminare de forma $\dfrac{0}{0}$, deci (T. 6.4.3.) avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}]'$$

Fie $u(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $0<|x|<1$. Atunci $\ln u(x)=\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$, deci

$$u'(x)=u(x)\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]'=u(x)\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]$$

Evident $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=e$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)-x\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}-\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}}{2x+3x^2}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}\ln(1+x)}{2+3}=-\frac{\ln e}{2}=-\frac{1}{2},$$

Aşadar $\lim\limits_{x\to 0}u'(x)=-\dfrac{e}{2}$, deci limita dată este egală cu $-\dfrac{e}{2}$

6.6.10. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x$.

Soluţie. Evident avem $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{x}}=1$,

deci limita dată prezintă o nedeterminare de forma 1^∞. Deoarece avem:

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x=\left[\frac{\ln\dfrac{1+x}{x}+\ln x}{\ln x}\right]^x=$$

$$=\left\{\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right]^{\frac{\ln x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}\right\}^{\frac{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}},\quad(\forall)\ x>1$$

Scanned with OKEN Scanner

şi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\ln x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}{\ln x}=0$,

deducem $\lim\limits_{x\to\infty}\{\ldots\}=e$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x=e^0=1$.

6.6.11. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$.

Soluţie. Avem o nedeterminare de forma 1^∞.

Dacă $0<|x-a|<\delta$, cu δ suficient de mic, atunci :

$$\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}=\left[\left(1+\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{\operatorname{tg}a}\right)^{\frac{\operatorname{tg}a}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}}\right]^{\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{\operatorname{tg}a}\operatorname{ctg}(x-a)}$$

Evident $\lim\limits_{x\to a}[\ldots]=e$, încît rămîne să calculăm

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{\operatorname{tg}a}\operatorname{ctg}(x-a)=\lim_{x\to a}\frac{1}{\operatorname{tg}a}\cdot\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{x-a}\cdot\frac{x-a}{\operatorname{tg}(x-a)}=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}a}\cdot\frac{1}{\cos^2 a}\cdot 1,\ \text{deoarece}\ \lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{x-a}=(\operatorname{tg}x)'(a)=\frac{1}{\cos^2 a}.$$

Prin urmare limita căutată este egală cu $e^{\frac{1}{\sin a\cos a}}$.

6.6.12. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{a}{x}\right)^{x^n}$, *dacă* $a\in\mathbf{R}$ *şi* $n\geqslant 1$.

Soluţie. Avem o nedeterminare de forma 1^∞. Evident pentru x suficient de mare $\left(x>\dfrac{2}{\pi}|a|\right)$ rezultă :

$$\left(\cos\frac{a}{x}\right)^{x^n}=\left\{\left[1+\left(\cos\frac{a}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{a}{x}-1}}\right\}^{x^n\left(\cos\frac{a}{x}-1\right)}$$

Evident $\lim\limits_{x\to\infty}\{\ldots\}=e$, iar $\lim\limits_{x\to\infty}x^n\left(\cos\dfrac{a}{x}-1\right)=$

$$=\lim_{x\to\infty}x^n\left(-2\sin^2\frac{a}{2x}\right)=\lim\frac{-a^2}{2}\left(\frac{\sin\frac{a}{2x}}{\frac{a}{2x}}\right)x^{n-2}=$$

$$=\begin{cases}0, & n<2\\ -\dfrac{a^2}{2}, & n=2\\ -\infty, & n>2\end{cases}\quad\text{deci}\quad\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{a}{x}\right)^{x^n}=\begin{cases}1, & n<2\\ e^{-\frac{a^2}{2}}, & n=2\\ 0, & n>2\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

6.6.13. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Soluție. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, avem $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$, deci limita dată prezintă o nedeterminare de forma 1^∞. Evident dacă $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$, avem:

$$\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left[\left(1+\frac{\arcsin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\arcsin x-x}}\right]^{\frac{\arcsin x-x}{x^3}}$$

Cum $\lim\limits_{x\to 0}[\ldots]=e$, rămîne să calculăm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-x}{x^3}$. Avem o nedeterminare de forma $\dfrac{0}{0}$, deci cu regula lui L'Hospital obținem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)\frac{1}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

Prin urmare, limita dată este egală cu $e^{\frac{1}{6}}$.

6.6.14. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\sin\frac{1}{x}}{1-\sin\frac{1}{x}}\right)^x$.

Soluție. Dacă notăm $t=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2x}$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}_+^*$, adică $x=\dfrac{2}{\pi-4t}$, atunci $x\to\infty\Leftrightarrow t\nearrow\dfrac{\pi}{4}$, deci avem:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\sin\frac{1}{x}}{1-\sin\frac{1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}\right)}\right]^x=\lim_{x\to\infty}(\operatorname{tg} t)^{-2x}=$$

$$=\left\{\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}[1+(\operatorname{tg} t-1)]^{\frac{1}{\operatorname{tg} t-1}}\right\}^{\lim\limits_{x\to\infty}2x(1-\operatorname{tg} t)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}2x(1-\operatorname{tg} t)}$$

Însă cu regula lui L'Hospital avem imediat:

$$\lim_{x\to\infty}2x(1-\operatorname{tg} t)=\lim_{t\nearrow\frac{\pi}{4}}\frac{4((1-\operatorname{tg} t)}{\pi-4t}=\lim_{t\nearrow\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 t}=2.$$

Prin urmare limita dată este egală cu e^2.

Scanned with OKEN Scanner

6.6.15. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{\lg x^{\alpha}-\lg a^{\alpha}}$, *unde* $\alpha, a\in\mathbf{R}_{+}^{*}$.

Soluţie. Evident avem o nedeterminare de forma $\dfrac{0}{0}$. Deoarece

$$\frac{\sin x-\sin a}{\lg x^{\alpha}-\lg a^{\alpha}}=\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\frac{x-a}{\alpha\lg\dfrac{x}{a}},\quad x\neq a,$$

vom calcula separat cele două limite.

Dacă notăm $x-a=t$, atunci :

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}}{x-a}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\dfrac{t}{2}}{\dfrac{t}{2}}\cos\left(a+\frac{t}{2}\right)=1\cdot\cos a.$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\lg\dfrac{x}{a}}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\lg\left(1+\dfrac{t}{a}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\lg\left(1+\dfrac{t}{a}\right)^{\frac{a}{t}}}=\frac{a}{\lg e}.$$

Prin urmare, limita dată este egală cu $\cos a\cdot\dfrac{a}{\alpha\lg e}$.

6.6.16. Exerciţiu. *Să se arate că* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)}$ *nu există şi să se justifice de ce nu putem aplica regula lui l'Hospital.*

Soluţie. Evident avem identitatea

$$\frac{x\sin\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\sin\frac{1}{x},\quad(\forall)\ x>-1.$$

Dacă $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)}$ ar exista, cum $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, ar rezulta că $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ există, ca produs de funcţii care au limită în care una din limite este finită şi nenulă. Absurd, deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ nu există.

Să punem $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, $x\in\mathbf{R}^{*}$, $g(x)=\ln(1+x)$, $x>-1$.

Evident $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$; funcţiile f, g sînt derivabile şi $g'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x > -1$. Însă avem

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0} (1+x)\left(\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right);$$

or ultima limită nu există, deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)$ nu există.

Prin urmare, nu sînt îndeplinite toate condiţiile din regula lui l'Hospital.

6.6.17. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\searrow 1} \frac{(x^{p_1}-1)(x^{p_2}-1)\ldots(x^{p_n}-1)}{(x-1)^{p_1+p_2+\ldots+p_n}}$,

unde $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq (0,1)$ *sau* $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \subseteq (1, \infty)$.

Soluţie. Evident avem:

$$\frac{(x^{p_1}-1)\ldots(x^{p_n}-1)}{(x-1)^{p_1+\ldots+p_n}} = \frac{x^{p_1}-1}{(x-1)^{p_1}} \cdots \frac{x^{p_n}-1}{(x-1)^{p_n}},$$

încît rămîne să calculăm $\lim\limits_{x\searrow 1} \frac{x^p - 1}{(x-1)^p}$, cînd $p \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$.

Avem o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$, deci cu l'Hospital deducem:

$$\lim_{x\searrow 1} \frac{x^p - 1}{(x-1)^p} = \lim_{x\searrow 1} \frac{px^{p-1}}{p(x-1)^{p-1}} = \lim_{x\searrow 1}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{p-1}$$

1) Dacă $p > 1$, atunci $\lim\limits_{x\searrow 1}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{p-1} = +\infty$.

2) Dacă $0 < p < 1$, atunci $\lim\limits_{x\searrow 1}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{p-1} = \lim\limits_{x\searrow 1}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1-p} = 0$.

Prin urmare limita dată este $+\infty$ (resp. 0), dacă

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq (1, \infty) \quad (\text{resp. } (p_1, p_2, \ldots, p_n) \subseteq (0,1)).$$

6.6.18. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $(a, b > 0)$.

Soluţie. Avem o nedeterminare de forma 1^∞. Evident $(\forall)\ x \neq 0$ avem:

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} = \left(1 + \frac{a^x + b^x - 2}{2}\right)^{1/x} = \left[\left(1 + \frac{a^x + b^x - 2}{2}\right)^{\frac{2}{a^x+b^x-2}}\right]^{\frac{a^x+b^x-2}{2x}}$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x + b^x - 2}{2} = 0$, rezultă $\lim\limits_{x\to 0} [\ldots] = e$.

Scanned with OKEN Scanner

Însă (P. 6.1.3. Cor. 1) avem

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$$

Prin urmare $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{2}\ln ab}=\sqrt{ab}$.

Corolar 1.

$$1^\circ\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\ldots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},\ (\forall)\ a_i\in\mathbf{R}_+^*;$$

$$2^\circ\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\ldots+a_n^x}{b_1^x+b_2^x+\ldots+b_n^x}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},\ (\forall)\ a_i,\ b_i\in\mathbf{R}_+^*.$$

6.6.19. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\lambda_1a_1^x+\lambda_2a_2^x+\ldots+\lambda_na_n^x}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}\right)^{\frac{1}{x}}$,

unde $\lambda_i,\ a_i\in\mathbf{R}_+\ (\forall)\ 1\leqslant i\leqslant n$.

Soluţia 1. Evident avem o nedeterminare de forma 1^∞.

Să punem $f(x):=\left(\frac{\lambda_1a_1^x+\ldots+\lambda_na_n^x}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}\right)^{1/x}$, $x\in\mathbf{R}_+^*$. Atunci

$$f(x)=\left[1+\left(\frac{\lambda_1a_1^x+\ldots+\lambda_na_n^x}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}-1\right)\right]^{1/x}=$$

$$=\left[1+x\,\frac{\lambda_1\frac{a_1^x-1}{x}+\ldots+\lambda_n\frac{a_n^x-1}{x}}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}\right]^{1/x}=(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}\frac{1}{x}\varphi(x)},$$

unde

$$\varphi(x)=\frac{x}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}\left(\lambda_1\frac{a_1^x-1}{x}+\ldots+\lambda_n\frac{a_n^x-1}{x}\right),\ x\in\mathbf{R}_+^*$$

Evident φ continuă şi deoarece $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, $(\forall)\ a\in\mathbf{R}_+^*$, avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\varphi(x)=\frac{1}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}(\lambda_1\ln a_1+\ldots+\lambda_n\ln a_n)$$

Prin urmare

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}[(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}]^{\frac{1}{x}}f(x)=e^{\frac{1}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}(\lambda_1\ln a_1+\ldots+\lambda_n\ln a_n)}=$$

$$=(e^{\lambda_1\ln a_1}e^{\lambda_2\ln a_2}\ldots e^{\lambda_n\ln a_n})^{\frac{1}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}}=(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\ldots a_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția 2. $f(x) = e^{\ln f(x)} = e^{\frac{1}{x}\ln\frac{\lambda_1 a_1^x + \ldots + \lambda_n a_n^x}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}}$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*$.

Cum limita în $x = 0$ a funcției de la exponent este 0, avem o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$, deci putem aplica regula lui l'Hospital etc.

Corolar 1.

$$1^\circ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1^x + q^x + \ldots + q^{(n-1)x}}{1 + q + \ldots + q^{n-1}}\right)^{\frac{1}{x}} = (1.q.\ldots.q^{n-1})^{\frac{1}{n}} = q^{\frac{n-1}{2}};$$

$$2^\circ \lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x + \ldots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = (a_1\, a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}};$$

$$3^\circ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1^x + 2^x + \ldots + n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = (n!)^{\frac{1}{n}}.$$

6.6.20. Exercițiu. *Să se calculeze limitele*:

$$1^\circ \lim_{x\to 0}\frac{x + \sin x}{\operatorname{tg} 2x};\quad 2^\circ \lim_{x\to 0}\frac{x^2 \sin 2x}{\operatorname{tg}^3 x};\quad 3^\circ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x\right);$$

$$4^\circ \lim_{x\searrow 0}(1 + x)^{\ln x};\quad 5^\circ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin x};\quad 6^\circ \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{arc}\sin x}{x - \sin x}.$$

Ind. In 1° amplificăm cu $\frac{1}{x}$ în 2° cu $\frac{1}{x^3}$. Se obține limita 1 respectiv 2. În 3° și 5° aplicăm Hospital. În 4° ținem seama că $\lim_{x\searrow 0} x \ln x = 1$. În 6° aplicăm Cor. 1 al regulii lui Hospital și obținem -1.

6.6.21. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim_{x\to 0}\frac{x^n - \sin^n x}{x^n - \operatorname{sh}^n x}$.

$$Ind.\ \frac{x^n - \sin^n x}{x^n - \operatorname{sh}^n x} = \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{sh} x}\cdot\frac{x^{n-1} + x^{n-2}\sin x + \ldots + \sin^{n-1} x}{x^{n-1} + x^{n-2}\operatorname{sh} x + \ldots + \operatorname{sh} x^{n-1}x} =$$

$$= \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{sh} x}\cdot\frac{1 + \left(\frac{\sin x}{x}\right) + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n-1}}{1 + \left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right) + \left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^{n-1}}.$$

Ținem apoi seama că $\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x - \operatorname{sh} x} = 1$ (Cf. L'Hospital) și de relațiile $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$ (ultima obținută cu L'Hospital)

Scanned with OKEN Scanner

6.6.22. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{1/x}$.

Ind. Punem $f(x)=\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{1/x}$, $0<|x|<1$. Atunci

$$\ln f(x)=\frac{\ln\ln(1+x)-\ln x}{x},\quad 0<|x|<1$$

Aplicăm mai departe regula lui l'Hospital.

6.6.23. Exercițiu. *Să se calculeze*: $1^\circ\ \lim\limits_{x\searrow 0}(1+x)^{\frac{1}{\ln x}}$; $2^\circ\ \lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Ind. $1^\circ\ (1+x)^{\frac{1}{\ln x}}=[(1+x)^{\frac{1}{x}}]^{\frac{x}{\ln x}}$, $(\forall)\ x\in(0,1)$,

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{x}{\ln x}=0\ \text{(cf. l'Hospital)}.$$

$2^\circ\ (1+x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\frac{\ln(1+x)}{\ln x}}$, $(\forall)\ x>1$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right]=1.$$

6.6.24. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{P(\text{trig } ax)}{P(\text{trig } bx)}$, $(a,b\in\mathbf{R}_+^*$ *și* $P\in\mathbf{R}[x])$.

Ind. Se aplică regula lui l'Hospital în cazul funcțiilor sin și tg, dacă $P(0)=0$ etc.

6.6.25. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln|P(x)|}{\ln|Q(x)|}$, *unde* P *și* Q *sînt polinoame cu coeficienți reali.*

Ind. $(\exists)\ c>0$ a.î. $|P(x)|=+P(x)$ sau $|P(x)|=-P(x)$, $(\forall)\ x\geqslant c$ și $|Q(x)|=+Q(x)$ sau $|Q(x)|=-Q(x)$, $(\forall)\ x>c$. Aplicăm mai departe regula lui l'Hospital.

6.6.26. Exercițiu. *Să se arate că*

$$\lim_{|x|\to\infty}(a_1^x+a_2^x+\ldots+a_n^x)^{1/x^2}=1,\quad(\forall)\ a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbf{R}_+^*.$$

6.6.27. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Ind. Se aplică regula lui Hospital pentru limita logaritmului funcției. Obținem în final e.

6.6.28. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\searrow 0}(\sin x)^{\sin x}$.

Ind. Punem $f(x)=(\sin x)^{\sin x}$, $x\in(0,\pi)$. Logaritmăm f și aplicăm regula lui l'Hospital.

6.6.29. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx)^{\frac{1}{x}}$.

Ind. Punem $f(x) = (1 + \sin x + \ldots + \sin nx)^{\frac{1}{x}}$, $0 < |x| < \varepsilon$. Logaritmăm şi aplicăm regula lui Hospital.

6.6.30. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

Ind. Punem $f(x) = \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$, $x > 1$. Atunci $\ln f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x \ln \ln x}$.

Cum $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ cu regula lui Hospital obţinem :

$$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}\ln x}{\ln\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = e^0 = 1.$$

6.6.31. Exerciţiu. *Să se calculeze*

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\prod_{k=1}^{n} \operatorname{tg}(a + kx) - \operatorname{tg}^n a\right),\ a \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}.$$

Ind. Aplicăm regula lui l'Hospital şi deducem :

$$l = \lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg}(a + x)\operatorname{tg}(a + 2x)\ldots\operatorname{tg}'(a + kx)\ldots\operatorname{tg}(a + ux)$$

Cum $\operatorname{tg}'(a + kx) = \dfrac{k}{\cos^2(a + kx)} \to \dfrac{k}{\cos^2 a}$ $(x \to 0)$ obţinem :

$$l = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg}^{n-1} a \cdot \frac{k}{\cos^2 a} = \frac{n(n+1)}{\cos^2 a}\operatorname{tg}^{n-1} a.$$

6.6.32. Exerciţiu. *Să se calculeze limitele laterale în 0 ale funcţiei*

$$f(x) = \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)e^{\frac{1}{x}},\ x \in \mathbf{R}^*.$$

Ind. $f(x) = \exp\left[\ln\left(1 - \dfrac{\sin x}{x}\right) + \dfrac{1}{x}\right] = \exp\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{\ln\left(1 - \dfrac{\sin x}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} + 1\right]$.

Aplicînd de două ori regula lui l'Hospital se obţine

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0, \text{ deci } \lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty \text{ şi } \lim_{x\nearrow 0} f(x) = 0.$$

6.6.33. Exerciţiu. *Să se calculeze limitele laterale în* $\dfrac{\pi}{2}$ *ale funcţiei*

$$f(x) = (1 - \sin x)\ e^{\operatorname{tg} x},\ x \in (0, \pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Ind. Analog cu Ex. 6.6.28.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 7

APLICAȚII ALE CALCULUI DIFERENȚIAL

7.1. Funcții convexe

7.1.1. Exercițiu. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă pe* $[a, b]$, *derivabilă pe* (a, b) *și cu* $f(a) = f(b)$. *Dacă* f *este strict convexă, atunci există* $c \in (a, b)$ *unic determinat a.î.* $f'(c) = 0$.

Soluție. Din T. 6.3.2. rezultă că există $c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = 0$. Presupunem că ar exista $c_1, c_2 \in (a, b)$, $c_1 < c_2$, cu $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. Funcția f fiind strict convexă, rezultă (P. 7.1.5.) că f' este strict crescătoare, deci $0 = f'(c_1) < f'(c_2) = 0$, absurd. Rămîne că punctul c este unic determinat.

Observație. Reciproca Ex. 7.1.1. nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu. Fie funcția $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in [-1, 1]$. Atunci avem: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Totuși f este strict convexă pe $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ și strict concavă pe $\left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ și pe $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.

7.1.2. Exercițiu. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval,* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție de două ori derivabilă și* p_a *funcția pantă la graficul lui* f *în punctul* $a \in I$ *i.e.* $p_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, $x \in I \setminus \{a\}$. *Atunci* $(\forall)$ $a, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < a < x_2$, $(\exists)$ $\xi \in (x_1, x_2)$ *a.î.* $p_a(x_1) - p_a(x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) f''(\xi)$.

Soluție. Fie $a, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < a < x_2$ fixat și $\lambda = \frac{p_a(x_1) - p_a(x_2)}{x_1 - x_2}$; evident avem:

$$f(x_1) = f(a) + p_a(x_2)(x_1 - a) + \lambda(x_1 - a)(x_1 - x_2).$$

Considerăm mai departe funcția

$$\varphi(x) := f(x) - (f(a) + p_a(x_2)(x - a) + \lambda(x - a)(x - x_2)), \quad x \in I.$$

Se vede imediat că $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \varphi(a) = 0$, deci (T. 6.3.2. Cor. 2) φ' are în (x_1, x_2) două zerouri, iar φ'' un zero i.e. $(\exists)$ $\xi \in (x_1, x_2)$ cu $\varphi''(\xi) = 0$. Cum avem $\varphi''(x) = f''(x) - 2\lambda$, $(\forall)$ $x \in I$, conchidem că $\frac{1}{2} f''(\xi) = \lambda = \frac{p_a(x_1) - p_a(x_2)}{x_1 - x_2}$ etc.

7.1.3. Exercițiu. *Fie* $f : [0, \infty] \to \mathbf{R}$ *o funcție concavă cu* $f(0) \geqslant 0$. *Atunci* f *este subadditivă.*

Soluție. Putem presupune că $f(0) = 0$, înlocuind f prin $f - f(0)$ și ținînd cont de Ex. 4.7.5.

Funcția f fiind concavă, rezultă (P. 7.1.3.) că funcția $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, $x \in \mathbf{R}_+^*$, este monoton descrescătoare. Atunci $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}_+^*$, avem $x < x + y$ și $y < x + y$, deci

$$\frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{f(x+y)}{x+y} \quad \text{și} \quad \frac{f(y)}{y} \geqslant \frac{f(x+y)}{x+y}$$

și deci

$$f(x) + f(y) \geqslant \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}\right) \cdot f(x+y) = f(x+y).$$

Dacă $x = 0$ sau $y = 0$, inegalitatea este evidentă.

7.1.4. Exercițiu. *Fie $f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ o funcție convexă (resp. strict convexă) și subaditivă. Atunci funcția $g(x) = \dfrac{1}{x} f(x)$, $x \in \mathbf{R}_+^*$ este monoton (resp. strict) descrescătoare.*

Soluție. Presupunem f convexă și fie $x,\ h > 0$ fixați. Atunci $\lambda := \dfrac{x}{x+h} \in (0, 1)$ și avem $x + h = \lambda x + (1 - \lambda) \cdot (2x + h)$. Cum f este convexă, rezultă că $f(x + h) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(2x + h)$ și deoarece f este subaditivă avem $f(2x + h) \leqslant f(x) + f(x + h)$, deci

$$f(x + h) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(x) + (1 - \lambda) f(x + h)$$

de unde rezultă

$$\lambda f(x + h) \leqslant f(x), \text{ i.e. } \frac{1}{x+h} f(x + h) \leqslant \frac{1}{x} f(x),$$

prin urmare g este descrescătoare.

7.1.5. Exercițiu. *Fie $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție convexă și continuă a.î. $f(a) \cdot f(c) < 0$. Atunci f posedă un zero și numai unul singur.*

Soluție. Presupunem $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ și fie $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \neq x_2$, a.î. $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Dacă $x \in [a, b]$, să notăm prin M_x punctul $(x, f(x))$. Fixăm $c \in (x_1, x_2)$. Atunci avem $c = (1 - \lambda) x_1 + \lambda x_2$ cu $0 < \lambda < 1$, deci, f fiind convexă, rezultă $f(c) \leqslant (1 - \lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2) = 0$.

Cum $f(a) < 0$, deducem că M_{x_1} este situat (strict) deasupra segmentului $\overline{M_a M_c}$, absurd, deoarece f este convexă. Așadar există cel mult un punct $x \in (a, b)$ a.î. $f(x) = 0$. Cum $f(a) \cdot f(b) < 0$ și f este continuă există cel puțin un punct $x \in [a, b]$ cu $f(x) = 0$. (T. 5.5.16. Cor. 2). Prin urmare există exact un punct $x \in [a, b]$ cu $f(x) = 0$.

7.1.6. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $x_0 \in \mathring{I}$ și $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă. Dacă x_0 este punct de inflexiune și f' este continuă în x_0, atunci x_0 este un extrem local strict pentru f'.*

Soluție. Deoarece x_0 este punct de inflexiune există $\delta > 0$ cu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$ a. î. f este convexă (resp. concavă) pe $(x_0 - \delta, x_0)$ și concavă (resp. convexă) pe $(x_0, x_0 + \delta)$. Atunci f' este strict crescătoare (resp. strict descrescătoare) pe $(x_0 - \delta, x_0)$ și strict descrescătoare (resp. strict crescătoare) pe $(x_0, x_0 + \delta)$, deci x_0 este maxim (resp. minim) local strict.

Scanned with OKEN Scanner

7.1.7. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie concavă şi monoton crescătoare. Atunci $(\forall)\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$, în progresie aritmetică crescătoare, avem relaţiile :*

$1^\circ\ f(x_1) + f(x_4) \leqslant f(x_2) + f(x_3)$; $2^\circ\ f(x_1) \cdot f(x_4) \leqslant f(x_2) \cdot f(x_3)$.

Soluţie. 1° x_1, x_2, x_3 fiind în progresie aritmetică, avem $x_2 = \dfrac{x_1 + x_3}{2}$, deci, f fiind concavă, deducem $f(x_2) \geqslant \dfrac{f(x_1) + f(x_3)}{2}$. Analog avem $f(x_3) \geqslant \dfrac{f(x_2) + f(x_4)}{2}$, de unde prin adunare rezultă

$$f(x_2) + f(x_3) \geqslant \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)],$$

prin urmare $f(x_2) + f(x_3) \geqslant f(x_1) + f(x_4)$.

2° f fiind monoton crescătoare şi $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4$, rezultă că $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ şi $f(x_2) \leqslant f(x_4)$, deci

$$[f(x_4) - f(x_2)] \cdot f(x_1) \leqslant [f(x_4) - f(x_2)] f(x_2),$$

şi deci (cf. 1°)

$$[f(x_4) - f(x_2)] f(x_1) \leqslant [f(x_3) - f(x_1)] f(x_2),$$

de unde evident deducem $f(x_4) \cdot f(x_1) \leqslant f(x_3) \cdot f(x_2)$.

7.1.8. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval deschis care conţine pe 0 şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie concavă, nenegativă cu $f(0) = 0$. Atunci $(\forall)\ (a_n)_{n \geqslant 1}$ un şir din I care converge în medie aritmetică la 0, rezultă că $(f(a_n))_{n \geqslant 1}$ converge de asemenea în medie aritmetică la 0.*

Soluţie. Fie $\tilde{a}_n := \dfrac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ $(n \geqslant 1)$. Prin ipoteză $\tilde{a}_n \to 0$. Funcţia f fiind concavă, este continuă pe $\mathring{I}$ deci pe I; rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} f(\tilde{a}_n) = f(0) = 0$. În virtutea concavităţii lui f avem :

$$0 \leqslant \frac{1}{n}(f(a_1) + \ldots + f(a_n)) \leqslant f\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) = f(\tilde{a}_n) \to 0,$$

deci

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}(f(a_1) + \ldots + f(a_n)) = 0,$$

adică $(f(a_n))_{n \geqslant 1}$ converge în medie aritmetică la 0.

Aplicaţie. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$, $x \in (-1, \infty)$; $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$.

Observaţie Ex. 7.1.8, rămîne adevărat şi pentru intervale I închise, dacă f este continuă în 0.

7.1.9. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie convexă şi nenegativă. Atunci $(\forall) x_i \in I\ (i = \overline{1, n})$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, avem inegalitatea :*

$$x_1 f(x_n) + x_2 f(x_1) + x_3 f(x_2) + \ldots + x_n f(x_{n-1}) \leqslant$$
$$\leqslant x_n f(x_1) + x_1 f(x_2) + x_2 f(x_3) + \ldots + x_{n-1} f(x_n).$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Funcția f fiind convexă, avem inegalitatea

$$\sum_{i=2}^{n} \text{aria}\,(D_i) \leqslant \text{aria}\,(D) \text{ (fig. 19).}$$

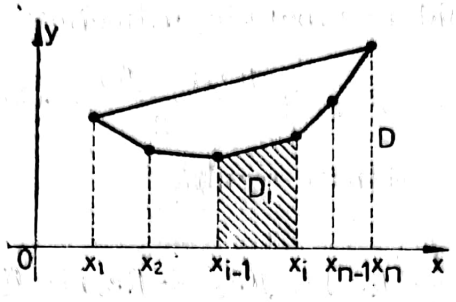


Fig. 19

Cum

$$\text{aria}\,(D_i) = \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}), \quad \text{aria}\,D = \frac{f(x_1) + f(x_n)}{2} \cdot (x_n - x_1),$$

avem

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) \leqslant \frac{f(x_i) + f(x_n)}{2} \cdot (x_n - x_1).$$

deci

$$\sum_{i=2}^{n} x_i f(x_i) - \sum_{i=2}^{n} x_{i-1} f(x_{i-1}) + \sum_{i=2}^{n} x_i f(x_{i-1}) - \sum_{i=2}^{n} x_{i-1} f(x_i) \leqslant$$

$$\leqslant x_n f(x_1) + x_n f(x_n) - x_1 f(x_1) - x_1 f(x_n)$$

și deci

$$x_1 f(x_n) + \sum_{i=2}^{n} x_i f(x_{i-1}) \leqslant x_n f(x_1) + \sum_{i=2}^{n} x_{i-1} f(x_i).$$

7.1.10. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval. Să se construiască o funcție convexă $f : I \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că $f \circ f$ nu este convexă.*

Soluție. Dacă $I = \mathbf{R}$, punem $f(x) = |x| - 1$, $x \in \mathbf{R}$. Evident f este convexă și avem :

$$(f \circ f)(x) = |f(x)| - 1 = ||x| - 1| = \begin{cases} x - 2, & x \geqslant 1 \\ -x, & x \in (0, 1) \\ x, & x \in (-1, 0) \\ -x - 2, & x \leqslant -1, \end{cases}$$

deci $f \circ f$ nu este convexă.

Fie acum $I = [0, \pi]$ și $f(x) = 1 - \sin x$, $x \in I$. Atunci $f''(x) = \sin x \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in I$, deci (P. 7.1.6.) f este convexă. Mai departe avem :

$$(f \circ f)''(x) = \sin(1 - \sin x)\cos x - \cos(1 - \sin x) \cdot \sin x$$

şi

$$(f \circ f)''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos 0 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -1 < 0,$$

deci (P. 7.1.6.) $f \circ f$ nu este convexă.

7.1.11. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}_+^*$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie nenegativă de două ori derivabilă a.î. $f' \leqslant 0$ şi $f'' \leqslant 0$. Atunci*

$$\sqrt[n]{f(x_1) \ldots f(x_n)} \leqslant f(x_1 \ldots x_n), \quad (\forall)\ x_1, \ldots, x_n \in I,\ x_1 + \ldots + x_n = n.$$

Ind. Din P.2.1.31. avem $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = 1$, deci $x_1 \ldots x_n \leqslant 1$ şi deci, f fiind descrescătoare, rezultă $f(1) \leqslant f(x_1 \ldots x_n)$.

Deoarece $f'' \leqslant 0$, rezultă (P. 7.1.6.) că f este concavă, deci

$$f(1) = f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}(f(x_1) + \ldots + f(x_n)).$$

Atunci

$$\sqrt[n]{f(x_1) \ldots f(x_n)} \leqslant \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} \leqslant f(1) \leqslant f(x_1 \ldots x_n)$$

7.1.12. Exerciţiu. *Fie $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$ şi $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata monotonă. Atunci f are limite în punctele a şi b.*

Soluţie. Presupunem f monoton crescătoare.

1° Dacă $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I = (a, b)$, atunci f' având proprietatea lui Darboux, avem $f' > 0$ sau $f' < 0$; fie spre exemplu $f' > 0$. În acest caz f este strict crescătoare, deci f are limite în punctele a şi b.

2° Dacă există $c \in I$ cu $f'(c) = 0$, cum f' este monoton crescătoare, avem $f'(x) \leqslant 0$, $(\forall)\ x \in (a, c)$ şi $f'(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in (c, b)$. Atunci f este monoton descrescătoare pe (a, c) şi monoton crescătoare pe (c, b), deci f are limite în a şi b.

Corolar 1. *Fie $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$ şi $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă. Dacă f este convexă, atunci f are limite în punctele a şi b.*

Soluţie. f fiind convexă, f' este monoton crescătoare etc.

Corolar 2. *Fie $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$ şi $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcţie de două ori derivabilă. Dacă $f'' \geqslant 0$ sau $f'' \leqslant 0$, atunci f are limite în punctele a şi b.*

7.1.13. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie convexă şi majorată (resp. concavă şi minorată). Atunci f este constantă.*

Soluţie. Pentru a simplifica, presupunem că f este derivabilă în fiecare punct. În ipoteza că f este convexă, rezultă (P. 7.1.5.) că f' este monoton crescătoare, deci f' are limite la $-\infty$ şi $+\infty$. Funcţia f fiind majorată, există $k \in \mathbf{R}$ a.î. $f(x) \leqslant k$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Evident putem aplica regula lui Hospital pentru funcţiile $f - k$ şi $1_{\mathbf{R}}$; obţinem:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x) - k}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{1}; \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - k}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{1}.$$

Deoarece

$$\frac{f(x) - k}{x} \geqslant 0, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_-^* \quad \text{şi} \quad \frac{f(x) - k}{x} \leqslant 0, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*,$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă că

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) \geqslant 0 \quad \text{și} \quad \lim_{x\to\infty} f'(x) \leqslant 0,$$

deci, f' fiind monoton crescătoare, deducem că $f' = 0$ și deci f este constantă.

Corolar 1. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție convexă sau concavă. Atunci f este mărginită $\Leftrightarrow$ f este constantă.*

7.1.14. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție strict convexă. Dacă $a, b \in \mathring{I}$, $a < b$ și $f'_d(a) \geqslant 0$, atunci f este strict crescătoare pe $[a, b]$.*

Soluție. f (fiind strict convexă) este continuă și derivatele laterale sînt monoton crescătoare pe $\mathring{I}$. Dacă $a, b \in \mathring{I}$, $a < b$ și $f'_d(a) \geqslant 0$, atunci $f'_d(x) \geqslant f'_d(a) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in I_a = \mathring{I} \cap (a, \infty)$. De aici deducem că f este monoton crescătoare pe I_a; fie $x, y \in I_a$, $x < y$ fixați. Dacă $f(x) = f(y)$, atunci f este constantă pe $[x, y]$, ceea ce contrazice faptul că f este strict convexă. Rămîne că $f(x) < f(y)$, deci f este strict monotonă pe I_a.

7.1.15. Exercițiu. *Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}_+^*$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Atunci*

$$\frac{a_1}{1+b_1} + \frac{a_2}{1+b_2} + \ldots + \frac{a_n}{1+b_n} \leqslant (\text{resp.} \geqslant) \frac{1}{1 + b_1^{a_1} b_2^{a_2} \ldots b_n^{a_n}}, \qquad (1)$$

dacă $b_i \leqslant 1$ (resp. $b_i \geqslant 1$), $(\forall)\ i = \overline{1, n}$.

Soluție. Fie funcția $f(x) = (1 + e^x)^{-1}$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci

$$f''(x) = e^x(e^x - 1)(1 + e^x)^{-3},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R};$$

deci $f'' < 0$ pe $\mathbf{R}_-^*$ (resp. $f'' > 0$ pe $\mathbf{R}_+^*$) și deci (P. 7.1.6.) f este concavă pe $\mathbf{R}_-^*$ (resp. convexă pe $\mathbf{R}_+^*$). Dacă $b_i \leqslant 1$ (resp. $\geqslant 1$), avem că $x_i = \ln b_i < 0$ (resp. > 0) $(i = \overline{1, n})$, deci (P. 7.1.2.):

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \geqslant (\text{resp.} \leqslant) \sum_{i=1}^{n} a_i f(a_i)$$

și deci

$$\frac{1}{1 + \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)} \geqslant (\text{resp.} \leqslant) \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{1 + \exp x_i}.$$

Ținem apoi seama că

$$\exp x_i = b_i,\ \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \ln b_i\right) = \prod_{i=1}^{n} b_i^{a_i}.$$

Observație. Inegalitatea (1) se poate generaliza înlocuind $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1+a_i}$ $\left(\text{resp. } \prod_{i=1}^{n} b_i^{a_i}\right)$ printr-o serie (resp. „produs" infinit) sau prin integrala $\int_0^1 \frac{a(x)\,dx}{1+b(x)}$ $\left(\text{resp. } \exp\left(\int_0^1 (a(x) \ln b(x)\,dx\right)\right)$

Scanned with OKEN Scanner

7.1.16. Exercițiu. $(\forall)\ a>0$ *și* $n\geqslant 1$, *avem inegalitatea* $\sum_{k=0}^{n} a^k \geqslant (n+1)a^{\frac{n}{2}}$.

Soluție. Fie $f(x)=a^x$, $x\in\mathbf{R}$. Deoarece $f''\geqslant 0$, rezultă f convexă (P. 7.1.6.), deci (P. 7.1.2.):

$$f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k\right)\leqslant\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(k).$$

Cum $f(k)=a^k$ și $\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{2}$, obținem $a^{\frac{n}{2}}\leqslant$

$\leqslant\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a^k$.

7.1.17. Exercițiu. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n\in[0,1)$ *și* $a=a_1+a_2+\ldots+a_n$. *Atunci*

$$\frac{a_1}{1-a_1}+\frac{a_2}{1-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{1-a_n}\geqslant\frac{n\cdot a}{n-a}$$

Soluție. Fie $f:[0,1)\to\mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x)=\frac{x}{1-x}$. Atunci $f''\geqslant 0$, deci (P. 7.1.2.):

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)\leqslant\frac{f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)}{n}$$

și deci

$$\frac{a}{n}:\left(1-\frac{a}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{1-a_1}+\frac{a_2}{1-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{1-a_n}\right)\text{ etc.}$$

7.1.18. Exercițiu. *Să se arate inegalitățile:*

1° $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\leqslant\frac{x^n+y^n}{2}$, $(\forall)\ x, y\in\mathbf{R}_+$ *și* $n\in\mathbf{N}$;

2° $\ln\frac{x+y}{2}<\frac{x}{x+y}\ln x+\frac{y}{x+y}\ln y$, $(\forall)\ x, y\in\mathbf{R}_+^*$

Soluție. 1° Fie $f(x)=x^n$, $x\in\mathbf{R}_+$. Atunci:

$$f''(x)=\begin{cases}n(n-1)x^{n-2}, & \text{dacă } n>2\\ 0 & \text{dacă } n=1,\end{cases}$$

deci $f''>0$ și deci (P. 7.1.6.) f este convexă, prin urmare:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n=f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}=\frac{x^n+y^n}{2},\ (\forall)\ x, y\in\mathbf{R}_+.$$

2° Fie $f(x)=x\ln x$, $x\in\mathbf{R}_+^*$. Atunci

$$f'(x)=1+\ln x, f''(x)=\frac{1}{x}>0,\quad(\forall)\ x\in\mathbf{R}_+^*,$$

deci $f''>0$ și deci (P. 7.1.6.) f este strict convexă, prin urmare:

$$\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}<\frac{x}{2}\ln\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\ln\frac{y}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

7.1.19. Exerciţiu. *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}_+^*$ *cu* $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. *Atunci avem inegalitatea* $\sum_{i=1}^{n} \left(x_i + \frac{1}{x_i}\right)^p \geqslant \frac{(n^2+1)^p}{n^{p-1}}$, $(\forall)\ p \in \mathbf{N}$.

Soluţie. Fixăm $p \in \mathbf{N}$ şi fie $f(x) := \left(x + \frac{1}{x}\right)^p$, $x \in \mathbf{R}_+^*$. Atunci

$$f''(x) = p(p-1)\left(x + \frac{1}{x}\right)^{p-2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{2p}{x^2}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{p-1},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*,$$

deci $f'' \geqslant 0$ şi deci (P. 7.1.6.) f este convexă, de unde rezultă (P. 7.1.2. Cor. 1) inegalitatea :

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

deci

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{n}{1}\right)^p = f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i + \frac{1}{x_i}\right)^p \text{ etc.}$$

7.1.20. Exerciţiu. *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0,1)$ *cu* $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. *Atunci avem inegalitatea* $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i} \geqslant \frac{n^2}{n-1}$.

Ind. Considerăm funcţia $f(x) := \frac{1}{1-x}$, $x \in (0,1)$.

Se arată că $f'' > 0$, deci f este strict convexă şi deci

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \text{ etc.}$$

7.1.21. Exerciţiu. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă şi convexă. Atunci* f *nu poate avea decît cel mult un extrem local strict.*

Ind. f fiind convexă, f' este monoton crescătoare. Dacă există $a, b \in \overset{\circ}{I}$ două extreme locale, atunci $f'(a) = f'(b) = 0$, deci $f'(x) = 0$, $(\forall)\ x \in [a,b]$ şi deci f este constantă pe $[a, b]$, absurd.

7.1.22. Exerciţiu. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval,* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie de clasă* $\mathcal{C}^2$ *şi* $x_0 \in I$ *un punct. Dacă* $f'(x_0) = 0$ *şi* $f''(x_0) > 0$ *(resp.* < 0*), atunci* x_0 *este punct de minim (resp. maxim) local pentru* f.

Ind. Deoarece f'' este continuă şi $f''(x_0) > 0$, $(\exists)\ V_\varepsilon(x_0) \subseteq I$, o vecinătate a lui x_0, a.î. $f''(x) > 0$, $(\forall)\ x \in V_\varepsilon(x_0)$; deci f este convexă pe $V_\varepsilon(x_0)$.

7.1.23. Exerciţiu. *Fie* $I, J \subseteq \mathbf{R}$ *două intervale şi* $f : I \to J$, $g : J \to \mathbf{R}$, *două funcţii (semi) convexe. Dacă* g *este monoton crescătoare, rezultă că* $g \circ f$ *este (semi) convexă. Dacă* g *nu este monoton crescătoare, afirmaţia nu este numaidecît adevărată.*

Ind. $(\forall)\ x, y \in I$ şi $\lambda \in [0,1]$, avem :

$$(g \circ f)((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant g((1-\lambda)f(x) + \lambda(y)) \leqslant (1-\lambda)(g \circ f)(x) + \lambda(g \circ f)y)$$

Scanned with OKEN Scanner

7.1.24. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie (semi) convexă strict descrescătoare. Atunci f^{-1} este (semi) convexă pe orice interval $J \subseteq f(I)$. Dacă f nu este strict descrescătoare, afirmaţia nu este numaidecît adevărată.*

Ind. Fie $y_1, y_2 \in J$ şi $\lambda \in [0, 1]$ fixaţi. Atunci $(\exists)\ x_1, x_2 \in I$ cu $f(x_i) = y_i (i = \overline{1, 2})$, deci

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Aplicînd f^{-1} obţinem imediat :

$$(1 - \lambda)f^{-1}(y_2) + \lambda f^{-1}(y_2) = f^{-1}(f(1 - \lambda)\, x_1 + \lambda\, x_2)) \geqslant f^{-1}((1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2)$$

7.2. Funcţii polinomiale (continuare)

7.2.1. Exerciţiu. *Fie P un polinom cu coeficienţi reali a.î. $P'(x) \neq 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$. Atunci P posedă o rădăcină reală şi numai una singură.*

Soluţie. P' fiind o funcţie derivată are proprietatea lui Darboux. Cum $P'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, rezultă că $P' > 0$ sau $P' < 0$, deci P este strict monotonă şi deci P are cel mult o rădăcină reală. Dacă P ar fi de grad par ar rezulta că $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to \infty} P(x) = \pm\infty$, ceea ce, evident, contrazice faptul că P este strict monotonă. Aşadar, P este de grad impar şi deci $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\lim\limits_{x \to \infty} P(x)$. Cum P este o funcţie continuă, deducem că există $x_0 \in \mathbf{R}$ a.î. $P(x_0) = 0$, deci P are cel puţin o rădăcină reală.

7.2.2. Exerciţiu. *Fie P un polinom de grad n care are toate rădăcinile reale.* Atunci $(n - 1)\ [P'(x)]^2 \geqslant nP(x)P''(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Soluţie. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile lui P, deci avem

$$P(x) = a(x - x_1) \ldots (x - x_n),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.\ \text{Atunci}$$

$$P'(x) = P(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i},\ (\forall)\ x \in D := \mathbf{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\},$$

deci $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x - x_1},\ (\forall)\ x \in D$ şi deci prin derivare obţinem :

$$\frac{P''(x)P(x) - [P'(x)]^2}{[P(x)]^2} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x - x_i)^2},\ (\forall)\ x \in D.$$

Aplicînd inegalitatea lui Cauchy, deducem :

$$-\frac{P''(x)P(x) + [P'(x)]^2}{[P(x)]^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x - x_i)^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}\right)^2 = \frac{1}{n}\frac{[P'(x)]^2}{[P(x)]^2},\ (\forall)\ x \in D,$$

deci

$$(n - 1)[P'(x)]^2 \geqslant nP(x)\, P''(x),\ (\forall)\ x \in D \qquad (1)$$

Dacă în inegalitatea (1) trecem la limită cu x către x_i, cu i fixat, obţinem că inegalitatea (1) este adevărată, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Corolar 1. *Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ un polinom de grad n care are toate rădăcinile reale: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Atunci avem:*

$$[P'(x)]^2 - P(x) \cdot P''(x) \begin{cases} > 0, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}, \ P'(x) \neq 0 \\ \geqslant 0 \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Corolar 2. *Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ un polinom. Dacă ecuația $P(x) = 0$ are toate rădăcinile reale și distincte, atunci ecuația $[P'(x)]^2 - P''(x) \cdot P(x) = 0$ nu are rădăcini reale.*

7.2.3. Exercițiu. *Fie P un polinom cu coeficienți reali de grad mai mare ca 1 și care are numai rădăcini reale și simple. Dacă $P'(x_0) = 0$, atunci avem $P(x_0) \cdot P''(x_0) < 0$.*

Soluție. Fie n gradul lui P. Din T.6.3.2. rezultă că P' are cel puțin $n - 1$ rădăcini. Cum P' este un polinom de gradul $n-1$, rezultă că P' are exact $n - 1$ rădăcini simple. De aici deducem că pe orice interval pe care P nu se anulează, polinomul P' posedă cel mult o rădăcină.

Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ cu $P'(x_0) = 0$. Deoarece P are rădăcini simple, rezultă (P.12.5.3) că $P(x_0) \neq 0$. Cum P' are de asemenea rădăcini simple, avem că $P''(x_0) \neq 0$.

Presupunem că $P(x_0) > 0$ și $P''(x_0) > 0$.

Funcția P'' fiind continuă, $(\exists)\ \delta > 0$ a.î. $P''(x) > 0$, $(\forall)\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, deci P este convexă pe $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (fig. 20).

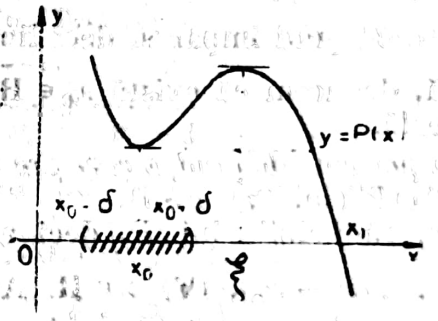


Fig. 20

Fie x_1 cea mai apropiată rădăcină a lui P de x_0; spre exemplu $x_1 > x_0$. Din teorema lui Rolle rezultă imediat că există $\xi \in (x_0, x_1)$ a.î. $P'(\xi) = 0$, deci P' are două rădăcini diferite în intervalul $(x_0 - \delta, x_1)$ absurd. Prin urmare $P(x_0) \cdot P''(x_0) < 0$.

7.2.4. Exercițiu. *Fie P un polinom cu coeficienți pozitivi care este și o funcție pară neconstantă. Atunci P este o funcție convexă care are un singur punct de extrem local (minim).*

Soluție. P fiind funcție pară, există (P. 4.9.8.) P_1 un polinom a.î. $P(x) = P_1(x^2)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Deoarece P are coeficienți pozitivi, rezultă că P_1 are coeficienți pozitivi, deci P_1' (resp. P_1'') are coeficienți pozitivi (resp. $\geqslant 0$) și deci $P_1'(x) > 0$, $P_1''(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$. Deoarece

$$P'(x) = 2xP_1'(x^2), \ (P'')(x) = 2P_1'(x^2) + 4x^2 P_1''(x^2), (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

obținem următorul tablou de variație:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
P'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
P''	$+$	$+$	$2P_1'(0)$	$+$	$+$
P	∞	$\searrow$	$P(0)$	$\nearrow$	∞

Prin urmare 0 este singurul punct de extrem local (minim) și cum $P'' > 0$, rezultă că P este convexă.

7.2.5. Exercițiu. *Fie P o funcție polinomială cu coeficienți reali de grad n cu n impar, $n \geq 3$. Atunci graficul lui P are cel puțin un punct de inflexiune.*

Soluție. Evident P'' este un polinom cu coeficienți reali de grad impar ≥ 1. Atunci dacă $\lim_{x \to -\infty} P''(x) = -\infty$ (resp. $+\infty$), rezultă că $\lim_{x \to \infty} P''(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$); deci există $x_0 \in \mathbf{R}$ a.î. $P''(x_0) = 0$ și P'' își schimbă semnul trecînd prin x_0 (fig. 21).

Prin urmare x_0 este punct de inflexiune pentru P.

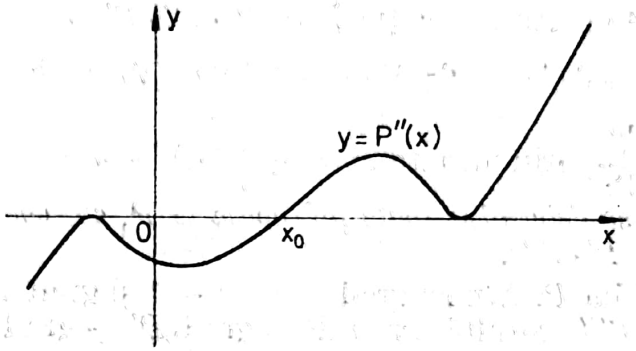


Fig. 21

7.2.6. Exercițiu. *Fie P_1, P_2 două polinoame cu coeficienți reali de grad 2. Atunci funcția* $\max\{P_1, P_2\}$ *este derivabilă* $\Leftrightarrow P_1 \leq P_2$ *sau* $P_2 \leq P_1$.

Soluție. ($\Rightarrow$) Fie $P_k = a_k X^2 + b_k X + c_k (k = \overline{1, 2})$, unde $a_k \neq 0$ $(k = \overline{1, 2})$ și fie $P = P_1 - P_2$. Distingem situațiile:

1° P nu are rădăcini reale. Atunci (T. 5.5.16 Cor. 3) $P > 0$ sau $P < 0$, deci $P_1 > P_2$ sau $P_1 < P_2$.

2° P are o singură rădăcină reală x_0. Atunci P are gradul 1, deci $a_1 = a_2$. Cum $\max\{P_1, P_2\}$ este derivabilă în x_0, avem (P. 6.1.11. Cor. 1):

$$2a_1x_0 + b_1 = P_1'(x_0) = P_2'(x_0) = 2a_2x_0 + b_2;$$

deci $b_1 = b_2$ și deci $P_1 \geq P_2$ (resp. $P_1 \leq P_2$), dacă $c_1 \geq c_2$ (resp. $c_1 \leq c_2$).

3° P are două rădăcini reale x_1 și x_2. Dacă $x_1 \neq x_2$, atunci cum $\max\{P_1, P_2\}$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$, deci în x_1 și x_2, avem (P. 6.1.11. Cor. 1): $P_1'(x_i) = P_2'(x_i)$ $(i = \overline{1, 2}) \Leftrightarrow 2a_1x_i + b_1 = 2a_2x_i + b_2$ $(i = \overline{1, 2}) \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \frac{b_2 - b_1}{2(a_1 - a_2)}$, absurd. Rămîne că $x_1 = x_2$, deci $P(x) = \lambda(x - x_1)^2$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, unde $\lambda \neq 0$. Așadar $P_1 - P_2 > 0$ (resp. < 0), dacă $\lambda > 0$ (resp. < 0).

Implicația ($\Leftarrow$) este evidentă.

7.2.7. Exercițiu. *Fie P un polinom de grad n nenul și cu coeficienții reali. Atunci P se divide cu derivata sa P'* $\Leftrightarrow (\exists)\, \lambda \in \mathbf{R}^*$ *și* $a \in \mathbf{R}$ *a.î.* $P = \lambda(X - a)^n$.

Soluție. Dacă P se divide cu P' există $a \in \mathbf{R}$ și $\lambda_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ a.î. $P(x) = \lambda_1(x - a)\, P'(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Prin derivare obținem $P'(x) = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1}(x - a)\, P''(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, deci $P(x) = \lambda_2(x - a)^2 P''(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Continuînd acest proces deducem că $(\exists)\, \lambda_n \in \mathbf{R}$ a.î.

$$P(x) = \lambda_n(x - a)^n P^{(n)}(x), \quad (\forall)\, x \in \mathbf{R}.$$

Cum $P^{(n)}$ este o constantă, rezultă că $P(x) = \lambda(x - a)^n$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Afirmația reciprocă este evidentă.

7.2.8. Exerciţiu. *Să se determine toate polinoamele P de grad n cu coeficienţi reali care verifică relaţia $P = P'P'' \ldots P^{(n)}$.*

Soluţie. Evident grad $P^{(k)} = n - k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$; deci

$$\text{grad } P = \sum_{k=1}^{n} \text{grad } P^{(k)} = (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$$

şi deci $n = \dfrac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n = 3$.

Deoarece P se divide cu P' avem (Ex. 7.2.7.) $P(x) = \lambda(x-a)^3$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, unde $\lambda, a \in \mathbf{R}$ şi $\lambda \neq 0$. Atunci relaţia $P = P' \cdot P'' \cdot P'''$ devine :

$$\lambda(x-a)^3 = 3\lambda(x-a)^2 \cdot 6\lambda(x-a)^1 \cdot 6\lambda, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

de unde se obţine $\lambda = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{18}$, prin urmare $P = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{18}(X-a)^3$

7.2.9. Exerciţiu. *Să se determine toate polinoamele P, cu coeficienţi reali, care verifică relaţia $P = P' \cdot P'''$.*

Soluţie. Fie n gradul lui P. Atunci grad $P' = n-1$ şi grad $P''' = n-3$, deci din relaţia $P = P' \cdot P'''$ rezultă grad P = grad P' + grad P''' şi deci $n = n-1+n-3$, de unde $n = 4$.

Deoarece P se divide cu P' el se reprezintă sub forma :

$$P(x) = \lambda(x-a)^4, \ (\forall) \quad x \in \mathbf{R},$$

unde $\lambda, a \in \mathbf{R}$ şi $\lambda \neq 0$.

Aşadar $P'(x) = 4\lambda(x-a)^3$, $P''' = 24\lambda(x-a)$, deci relaţia $P = P' \cdot P'''$ devine :

$$\lambda(x-a)^4 = (4\lambda)(x-a)^3 \cdot (24\lambda)(x-a),$$

de unde rezultă că $\lambda = \dfrac{1}{96}$.

Prin urmare $P(x) = \dfrac{1}{96}(x-a)^4$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$.

7.2.10. Exerciţiu. *Fie $P = X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n$ un polinom cu coeficienţi reali care are toate rădăcinile reale şi M un majorant al acestor rădăcini. Atunci*

$$(nx + a_1)\frac{P'(x)}{P(x)} \geqslant n^2, \ (\forall)\ x > M.$$

Soluţie. Fie x_i $(i = \overline{1, n})$, rădăcinile lui P. Din P. 2.1.27. deducem :

$$\sum_{i=1}^{n}(x-x_i) \cdot \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i} \geqslant n^2, \ (\forall)\ x > M. \tag{1}$$

Cum $P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, derivînd ln P obţinem :

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \ldots + \frac{1}{x-x_n}, \ (\forall)\ x > M. \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

În fine avem :

$$\sum_{i=1}^{n}(x - x_i) = nx - \sum_{i=1}^{n} x_i = nx + a_1. \tag{3}$$

Din (1), (2) și (3) conchidem că

$$(nx + a_1)\frac{P'(x)}{P(x)} = \Sigma(x - x_i)\cdot\Sigma\frac{1}{x - x_i} \geqslant n^2, \ (\forall)\ x > M.$$

7.2.11. Exercițiu. *Fie* $P = \sum_{k=0}^{4} a_k X^k$ *un polinom cu coeficienți reali și* $f(x) = P(x)$, $x \in \mathbf{R}$. *Dacă* f *admite trei puncte de extrem* x_1, x_2, x_3, *atunci aria triunghiului determinat de punctele* $A_i(x_i, f(x_i))$, $i = \overline{1, 3}$ *este egală cu*

$$\left|(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)\frac{3a_3^2 - 8a_2a_4}{32a_4}\right|.$$

Soluție. Avem $f'(x) = \sum_{k=1}^{4} kx^{k-1}$, $x \in \mathbf{R}$. Cum $f'(x_i) = 0$ $(i = \overline{1, 3})$ rezultă

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{3a_3}{4a_4},\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{a_2}{2a_4},\ x_1x_2x_3 = -\frac{a_1}{4a_4};$$

$$\text{aria } \triangle_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(f(x_2) - f(x_3)) -$$

$$-\frac{1}{2}(x_2 - x_3)(f(x_1) - f(x_2)) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)\sum_{k=1}^{4} a_k(x_2^k - x_3^k) -$$

$$-\frac{1}{2}(x_2 - x_3)\sum_{k=1}^{4} a_k(x_1^k - x_2^k) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)\{[a_2(x_2 + x_3) +$$

$$+ a_3(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2) + a_4(x_2^3 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^3)] - [a_2(x_1 + x_2) +$$

$$+ a_3(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + a_4(x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3)]\} \text{ etc.}$$

7.2.12. Exercițiu. *Fie* $P \in \mathbf{R}[X]$ *un polinom și* $f(x) = \sin P(x)$, $x \in \mathbf{R}$. *Atunci* f *este periodică* $\Leftrightarrow$ grad $P \leqslant 1$.

Soluție. $(\Rightarrow)$ f fiind periodică rezultă că $(\exists)\ T > 0$ a.î.

$$f(x + T) = f(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Din Ex. 6.1.30. rezultă că f' este periodică de perioadă T. Evident avem

$$f'(x) = P'(x)\cos P(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Deoarece

$$\cos P(x) = \pm\sqrt{1 - \sin^2 P(x)} = \pm\sqrt{1 - f^2(x)},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

Scanned with OKEN Scanner

deducem imediat că funcţia cos P este periodică de perioadă T. Aşadar, avem :

$$P'(x+T)\cos P(x) = P'(x)\cdot\cos P(x),\ (\forall)\ x\in\mathbf{R},$$

deci

$$(P'(x+T)-P'(x))\cos P(x)=0,\ (\forall)\ x\in\mathbf{R}.$$

Dacă P nu este de grad 0, funcţia cos P ia o infinitate de valori, deci $P'(x+T)-P'(x)=0$, pentru o infinitate de puncte x, de unde rezultă că

$$P'(x+T)-P'(x)=0,\ (\forall)\ x\in\mathbf{R},$$

Am obţinut că P' este periodică, deci P' este o constantă, încît grad $P\leqslant 1$.

($\Leftarrow$) Dacă $P=aX+b$ $(a\neq 0)$, atunci $\frac{2\pi}{|a|}$ este o perioadă a lui f, deci f este periodică.

7.2.13. Exerciţiu. *Fie* $f:\to\mathbf{R}$ *funcţia polinomială*

$$f(x)=3x^5+15x^4-10x^3-90x^2+mx+n,$$

unde m *şi* n *sînt parametrii reali. Să se arate că punctele de inflexiune la graficul lui* f *sînt coliniare, oricare ar fi* m *şi* n *în* $\mathbf{R}$.

Ind. $f''(x)=60x^3+180x^2-60x-180,\ (\forall)\ x\in\mathbf{R}$;

$$f''(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-3,\ -1,\ 1\}$$

Studiind semnul lui f'' observăm imediat punctele $A(-3,f(-3))$, $B(-1,f(-1))$ şi $C(1,f(1))$ sînt puncte de inflexiune la graficul lui f. Punctele A, B, C sînt coliniare deoarece

$$\begin{vmatrix}-3 & f(-3) & 1\\ -1 & f(-1) & 1\\ 1 & f(1) & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & -3m+n-54 & 1\\ -1 & -m+n-68 & 1\\ 1 & m+n-82 & 1\end{vmatrix}=0,\ (\forall),\ m,\ n\in\mathbf{R}.$$

7.2.14. Exerciţiu. *Să se determine forma generală a unei funcţii polinomiale de grad* 3, $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, *care verifică proprietăţile* : 1° *graficul lui* f *este tangent axei* Ox *în punctul* $x=1$; 2° *punctul* $x=0$ *este punct de inflexiune pentru* f.

Soluţie. Fie $P=a_0X^3+a_1X^2+a_2X+a_3$ $(a_0\neq 0)$ un polinom de grad 3 şi $f(x)=P(x)$, $x\in\mathbf{R}$. Din (1) rezultă $f(1)=f'(1)=0$; deci

$$a_0+a_1+a_2+a_3=0\ ;\quad 3a_0+2a_1+a_2=0 \qquad (1)$$

O condiţie *necesară* ca $x=0$ să fie punct de inflexiune pentru f este $f''(0)=0$; deci cum $f''(x)=6a_0x+2a_1$, avem $2a_2=0$ şi deci $\boxed{a_1=0}$. (2). Deoarece f'' are semne diferite pe $\mathbf{R}_+$ şu $\mathbf{R}_-$ respectiv, conchidem că 0 este punct de inflexiune pentru f.

Ţinînd seama de (2), ecuaţiile (1) devin :

$$a_0+a_2+a_3=0\ ;\quad 3a_0+a_2=0,$$

deci

$$\boxed{a_2=-3a_0},\quad \boxed{a_3=2a_0}$$

Prin urmare avem : $P=a_0(X^3-3X+2)$ cu $a_0\neq 0$ arbitrar.

7.2.15. Exerciţiu. *Să se determine forma generală a unei funcţii polinomiale f de grad 3 care are proprietăţile :*

1 *graficul lui f trece printr-un punct (x_0, y_0) ;*

2° *x_0 este punct de inflexiune pentru f ;*

3° *tangenta geometrică la graficul lui f în punctul $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu dreapta $y = mx + n$.*

Soluţie. Avem $f(x) = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Deoarece x_0 este punct de inflexiune pentru f avem $f''(x_0)=0$, deci $6a_1x_0 + 2a_2=0$ (1)

Tangenta geometrică la grafic în punctul $(x_0, f(x_0))$ are panta egală cu $f'(x_0)$, deci $3a_1x_0^2 + 2a_2x_0 + a_3 = m$ (2)

Avem de asemenea $f(x_0) = y_0$, deci $a_1x_0^3 + a_2x_0^2 + a_3x_0 + a_4 = y_0$ (3)

Din (1), (2) şi (3) deducem pe a_2, a_3 şi a_4 în funcţie de a_1. Coeficientul a_1 rămîne nedeterminat.

Grafic situaţia poate fi reprezentată ca în fig. 22.

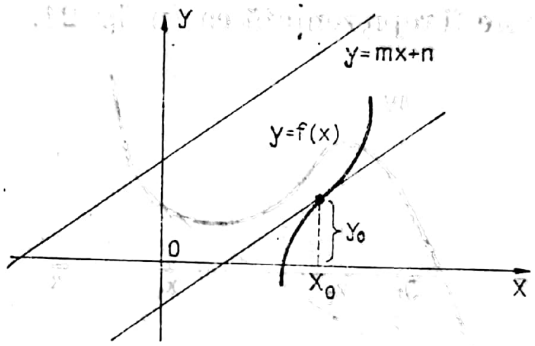


Fig. 22

7.2.16. Exerciţiu. *Să se determine o funcţie polinomială f de grad minim a.î. graficul lui f să fie tangent axei Ox în n puncte distincte.*

Soluţie. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, cu $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ şi

$$f(x) = a(x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2} \ldots (x - a_n)^{\alpha_n},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Deoarece graficul lui f este tangent axei Ox în punctele $a_i (1 \leqslant i \leqslant n$ avem $f'(a_i) = 0$. De aici deducem imediat că $\alpha_i \geqslant 2$.

Funcţia $f(x) = a(x - a_1)^2 \ldots (x - a_n)^2$, $x \in \mathbf{R}$ satisface condiţiile din enunţ

Grafic situaţia poate fi reprezentată ca în fig. 23.

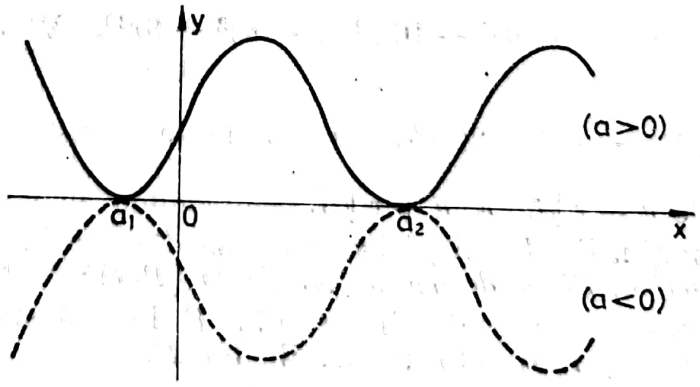


Fig. 23

7.2.17. Exerciţiu. *Să se determine forma generală a unei funcţii polinomiale de grad 3 care are proprietăţile : 1° x_0 este un punct de extrem local pentru f; 2° Ecuaţia tangenţei la grafic în punctul $(x_1, f(x_1))$ este cunoscută.*

Soluție. Avem $f(x) = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Deoarece x_0 este un punct de extrem local pentru f avem :

$$f'(x_0) = 0 \text{ deci } 3a_1x_0^2 + 2a_1x_0^2 + 2a_2x_0 + a_3 = 0 \qquad (1)$$

Fie $(\Delta)\ y = mx + n$ ecuația tangentei la grafic în punctul $(x_1, f(x_1))$. Din ipoteză rezultă că (Δ) coincide cu dreapta

$$y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1).$$

Atunci $f'(x_1) = m$ și $f(x_1) - f'(x_1) \cdot x_1 = n$; deci

$$3a_1x_1^2 + 2a_2x_1 + a_3 = m\ (2);\ 2a_1x_1^3 + a_2x_1^2 - a_4 = 0 \qquad (3)$$

Din (1), (2) și (3) deducem pe a_2, a_3 și a_4 în funcție de a_1. Coeficientul a_1 rămîne nedeterminat.

Grafic situația poate fi reprezentată ca în fig. 24.

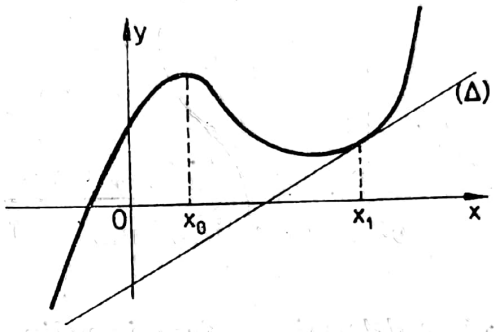


Fig. 24

7.2.18. Exercițiu. *Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ un polinom de grad 4 care are rădăcinile în progresie aritmetică. Atunci și polinomul derivat P' are rădăcinile în progresie aritmetică.*

Soluție. Să scriem cele 4 rădăcini sub forma :

$a - 3r$, $a - r$, $a + r$, $a + 3r$. Atunci avem :

$$P(x) = c_0\,(x - a + 3r)\,(x - a + r)\,(x - a - r)\,(x - a - 3r),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

deci

$$P(x) = c_0\,[(x - a)^4 - 10\,r^2\,(x - a)^2 + 9r^2],\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

și deci

$$P'(x) = [c_0\,4(x - a)^3 - 20\,r^2(x - a)] = 4\,c_0(x - a)\,[(x - a)^2 - 5r].$$

care are rădăcinile $a - r\sqrt{5}$, a, $a + r\sqrt{5}$.

7.2.19. Exercițiu. *Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ un polinom de gradul 4 care are rădăcinile în progresie aritmetică. Să se determine mulțimea $\{P(x) : x \in \mathbf{R}\}$.*

Soluție. Fie c_0 coeficientul dominant al lui P și să presupunem că $c_0 > 0$. Fie $a - 3r$, $a - r$, $a + r$, $a + 3r$ rădăcinile lui P.

Se știe (Ex. 7.2.18) că rădăcinile lui P' sînt atunci $a - r\sqrt{5}$, a, $a + r\sqrt{5}$.

Deoarece $\lim\limits_{x \to \infty} P(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \infty$, graficul funcției $f(x) = P(x)$, $x \in \mathbf{R}$, arată ca în fig. 25.

Scanned with OKEN Scanner

Funcția f își atinge minimul în punctul $a - r\sqrt{5}$ sau în $a + r\sqrt{5}$. Atunci mulțimea $\{P(x) : x \in \mathbf{R}\}$ este egală cu $[m, \infty)$, unde

$$m = \min \{P'(a - r\sqrt{5}),\ P'(a + r\sqrt{5})\}.$$

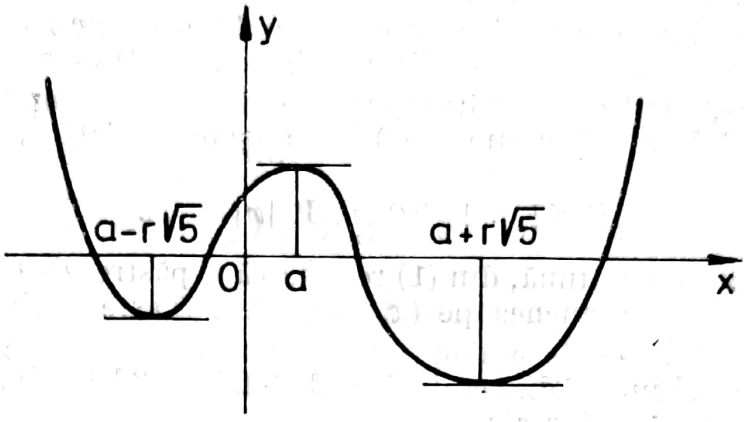


Fig. 25

7.2.20. Exercițiu. *Fie P un polinom cu coeficienți reali care are toate rădăcinile reale și distincte. Atunci $P + \lambda P'$ are același număr de rădăcini reale cu P, $(\forall)\ \lambda \in \mathbf{R}$.*

Soluție. Presupunem P de gradul n, notăm $P + \lambda P'$ cu Q ($\lambda \in \mathbf{R}$ fixat) și fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile lui P, ordonate crescător. Deoarece rădăcinile lui P sînt simple rezultă imediat că $P'(x_i) \neq 0$ $(\forall)$ $1 \leqslant i \leqslant n$. Din teorema lui Rolle deducem că există

$$x_1 < \overline{x}_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < \overline{x}_{n-1} < x_n,$$

cu proprietatea că $P'(\overline{x}_i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n - 1$.

Avem $Q(\overline{x}_1) \cdot Q(\overline{x}_2) = P(\overline{x}_1) \cdot P(\overline{x}_2) < 0$, altfel ar rezulta că P are în intervalul $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ două rădăcini distincte sau că x_2 ar fi rădăcină dublă, absurd. De aici deducem că există $c_1 \in (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ a.î. $Q(c_1) = 0$ și analog există $\overline{x}_2 < c_2 < \overline{x}_3 < c_3 \ldots < \overline{x}_{n-2} < c_{n-2} < \overline{x}_{n-1}$ a.î. $Q(c_i) = 0$, $(\forall)\ 2 \leqslant i \leqslant n - 2$.

Presupunem $P(\overline{x}_1) > 0$, deci $Q(\overline{x}_1) > 0$. Cum P are o rădăcină simplă în stînga lui $\overline{x}_1$, pe x_1, rezultă că $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$, deci $\lim\limits_{x \to \infty} Q(x) = -\infty$ și deci Q are o rădăcină la stînga lui $\overline{x}_1$.

Analog arătăm că Q are o rădăcină la dreapta lui $\overline{x}_{n-1}$ deci Q are exact n rădăcini.

Corolar 1. *Fie P un polinom cu coeficienți reali de grad n care are toate rădăcinile reale și distincte. Atunci $(\forall)\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$, polinomul $P + \lambda_1 P' + \lambda_2 P'' + \ldots + \lambda_n P^{(n)}$ are același număr de rădăcini reale cu P.*

Soluție. Fie $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ fixați și λ, μ soluțiile sistemului $\lambda + \mu = \lambda_1$, $\lambda\mu = \lambda_2$. Cf. Ex. 7.2.20. polinoamele $P + \lambda P'$ și $(P + \lambda P') + \mu(P + \mu P')$ au fiecare același număr de rădăcini reale cu P. Observăm apoi că $P + \lambda_1 P' + \lambda_2 P'' = P + \lambda P' + \mu(P + \lambda P')''$ etc.

7.2.21. Exercițiu. *Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ un polinom de gradul n. Dacă P nu admite rădăcini reale, atunci nici polinomul $P + \lambda P' + \lambda^2 P'' + \ldots + \lambda^n P^{(n)}$ nu admite rădăcini reale.*

Soluție. Fie $Q = P + \lambda P' + \lambda^2 P'' + \ldots + \lambda^n P^{(n)}$. Evident avem $Q = P + \lambda Q'$. Cum polinoamele de grad impar admit cel puțin o rădăcină reală, rezultă că P deci și Q sînt de grad par. Dacă Q admite o rădăcină reală, el admite cel puțin două; fie x_1 și x_2 două rădăcini reale consecutive ale lui Q. Atunci

$Q'(x_1)$ și $Q'(x_2)$ au semne contrare. Însă $P(x_i) = Q(x_i) - \lambda Q'(x_i) = x_0\ \lambda Q'(x_i) (i=\overline{1,2})$, deci $P(x_1) \cdot P(x_2) = \lambda^2 Q'(x_1) Q'(x_2) < 0$ și deci există $x_0 \in \mathbf{R}$ cu $P(x_0) = 0$, absurd.

Prin urmare, Q nu admite rădăcini reale.

7.2.22. Exercițiu. *Fie f o funcție polinomială neidentic nulă. Atunci există $x_0 > 0$ a.î. f este strict monotonă, pe fiecare din intervalele $(-\infty, -x_0)$ și (x_0, ∞).*

Soluție. Dacă grad $f = 1$, afirmația este evidentă. Presupunem grad $f > 1$. Atunci f' are gradul $\geqslant 1$, deci $\lim\limits_{|x|\to\infty} |f'(x)| = \infty$ și deci există $x_0 > 0$ a.î.

$$|f'(x)| \geqslant 1, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}\ |x| \geqslant x_0. \tag{1}$$

Funcția f' fiind continuă, din (1) rezultă că f' păstrează un semn constant pe $(-\infty, -x_0)$ și de asemenea pe (x_0, ∞), deci f este strict monotonă pe $(-\infty, -x_0)$ și pe (x_0, ∞).

7.2.23. Exercițiu. *Polinomul $P = 1 + 2X + 3X^2 + \ldots + nX^{n-1}$ posedă cel mult o rădăcină reală.*

Soluție. Evident avem:

$$P(x) = (1 + x + \ldots + x^n)' = \frac{1 + nx^{n+1} - (n-1)\,x^n}{(1-x)^2},\ x \neq 1.$$

Fie $\varphi(x) = 1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n$, $x \in \mathbf{R}$. Deoarece $\varphi'(x) \neq 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, funcția φ este strict monotonă pe $\mathbf{R}_-$, deci poate avea cel mult o rădăcină pe $\mathbf{R}_-$ și deci P poate avea cel mult o rădăcină pe $\mathbf{R}_-$. Evident $P(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$.

7.2.24. Exercițiu. *Fie P un polinom care satisface relația*

$$[P'(x)]^n = [P(x)]^{n-1},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Atunci P este de forma $P = c(X - a)^n$, unde $c = n^{-n}$.

Soluție. Fie $P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m (a_0 \neq 0)$. Atunci

$$[P'(x)]^n = m^n a_0^n x^{mn-n} + \ldots;\ [P(x)]^{n-1} = a_0^{n-1} x^{mn-m} + \ldots$$

Din egalitatea $[P'(x)]^n = [P(x)]^{n-1}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, rezultă că $mn - n = nm - m$, deci $n = m$.

7.2.25. Exercițiu. *Să se determine intervalele în care o funcție polinomială f de grad 3 sau 4 este convexă sau concavă.*

Ind. Dacă $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3\ (a_0 > 0)$, atunci $f''(x) = 2\,(3\,a_0\,x + a_1)$, deci f este convexă pe $\left(-\frac{a_1}{3a_0}, \infty\right)$ și concavă pe $\left(-\infty, -\frac{a_1}{3a_0}\right)$.

7.2.26. Exercițiu. *Fie P o funcție polinomială pară cu coeficienți pozitivi. Atunci funcția $f(x) = P(x) + c_1x + c_0$, $x \in \mathbf{R}$ este convexă.*

Ind. P pară $\Rightarrow P(x) = P_1(x^2)$ $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deci $f'' = P'' \geqslant 0$ și deci f este convexă.

7.2.27. Exercițiu *Fie P și Q două polinoame de grad n. Să se arate că funcția $f = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(k)} \cdot Q^{(n-k)}$ este constantă.*

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Se arată că $f' = 0$. Într-adevăr $f' = \sum_{k=0}^{n} [(-1)^k \cdot g^{(n-k)} \cdot f^{(k)}]' =$

$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k [f^{(k+1)} \cdot g^{(n-k)} + f^{(k)} \cdot g^{(n-k+1)}] = f^{(1)} \cdot g^{(n)} - f^{(2)} g^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n f^{(n+1)} \cdot g +$

$+ f^{(0)} \cdot g^{(n+1)} - f^{(1)} \cdot g^{(n)} + f^{(2)} \cdot g^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n f^{(n)} \cdot g^{(0)} = 0.$

7.2.28. Exerciţiu. *Fie* $a_0, a_1, \ldots, a_{2n} \in \mathbf{R}$ *fixaţi şi pentru fiecare* $0 < k < 2n$ *fie* P_k *un polinom definit astfel:*

$$P_k(x) = a_0 x^k + a_1 k x^{k-1} + a_2 k(k-1) x^{k-2} + \ldots + a_k \cdot k!, \ (\forall) \ x \in \mathbf{R}.$$

Atunci funcţia $f = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{2n}^k P_k \cdot P_{2n-k}$ *este constantă.*

Ind. Se arată că $P_k' = kP_{k-1}$, $(\forall)\ 1 < k \leq 2n$, de unde se deduce că $f' = 0$.

7.2.29. Exerciţiu. *Să se determine un polinom* P *a.î. derivata funcţiei* $x \mapsto e^x P(x)$, $x \in \mathbf{R}$, *în punctul* x *să fie egală cu* $e^x(x^2 + 5x + 7)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Soluţie. Cf. ipotezei avem relaţia:

$$(e^x P(x))' = e^x(x^2 + 5x + 7), \ (\forall) \ x \in \mathbf{R};$$

deci

$$e^x P'(x) + e^x P(x) = e^x(x^2 + 5x + 7)$$

şi deci

$$P'(x) + P(x) = x^2 + 5x + 7, \ (\forall) \ x \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

De aici rezultă că P este un polinom de gradul 2, adică $P(x) = ax^2 + bx + c$. Atunci relaţia (1) devine:

$$ax^2 + (2a + b)x + b + c = x^2 + 5x + 7, \ (\forall) \ x \in \mathbf{R}.$$

Prin identificare deducem $a = 1$, $b = 3$ şi $c = 4$.

7.2.30. Exerciţiu. *Fie funcţia elementară* $f(x) = \sqrt[\alpha]{P(x)}$, *unde* $\alpha > 1$ *şi* P *este un polinom cu coeficienţi reali a.î.* $P(x_0) = 0$, $P'(x_0) > 0$ *şi* $P(x) \geq 0$, $(\forall)\ x \in (x_0, x_1)$, *Atunci* $f_s'(x_0) = +\infty$.

Soluţie. Evident avem:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sqrt[\alpha]{\frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0}} \cdot \sqrt[\alpha]{\frac{1}{(x - x_0)^{\alpha - 1}}}, \ (\forall) \ x \in (x_0, x_1).$$

Cum $\lim_{\substack{x \searrow x_0 \\ \alpha}} \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} = P_s'(x_0) = P'(x_0) > 0$ şi $\lim_{x \searrow x_0} \sqrt[\alpha]{\frac{1}{(x - x_0)^{\alpha - 1}}} =$

$= +\infty$, rezultă

$$f_s'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty.$$

Analog se arată că $f_d'(x_1) = -\infty$

Scanned with OKEN Scanner

Corolar 1. *Fie funcția elementară* $f(x)=\sqrt[n]{P(x)}$, *unde* n *este un număr natural impar și* P *un polinom cu coeficienți reali a.î.* grad $P \geqslant 1$ *și* $P(x_0)=0$. *Atunci* $f'_d(x_0)=\pm\infty$, $f'_s(x_0)=\pm\infty$ *și* $f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$.

7.2.31. Exercițiu. *Fie* M *și* m *extremele locale ale funcției polinomiale* $f(x)=ax^3+px+q$, $x \in \mathbf{R}$ $(ap<0)$. *Atunci avem* $Mm=q^2+\frac{4p^3}{27a}$.

Soluție. $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3ax^2+p=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{p}{3a}}$; $f''(x)=6ax$. Cum $f''(x_1)$ și $f''(x_2)$ sînt nenule și de semne contrare, rezultă că x_1 este punct de maxim local și x_2 punct de minim local sau invers. Evident avem:

$$f(x_i)=\frac{1}{3}x_i(3ax_i^2+p)+\frac{2}{3}x_ip+q=\frac{2}{3}x_ip+q \ (i=\overline{1,2})$$

$$f(x_1)\cdot f(x_2)=\frac{4}{9}x_1x_2p^2+\frac{2}{3}pq(x_1+x_2)+q^2=\frac{4}{9}\frac{p}{3a}p^2+q^2.$$

7.2.32. Exercițiu. *Fie* P *un polinom cu termen liber nul care admite o rădăcină pozitivă* x_0. *Atunci* P' *admite o rădăcină pozitivă mai mică decît* x_0.

Ind. Aplicăm teorema lui Rolle funcției $f(x)=P(x)$, $x \in [0, x_0]$, ținînd seama că $f(0)=f(x_0)=0$.

7.2.33. Exercițiu. *Fie* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ *a.î.* $\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\ldots+\frac{a_n}{n+1}=0$. *Atunci ecuația* $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0$ *posedă cel puțin o rădăcină reală.*

Ind. Fie funcția $f(x)=\frac{a_0}{1}x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$, $x \in \mathbf{R}$ cum $f(0)=f(1)=0$, $(\exists)\ \xi \in (0,1)$ a.î. $f'(\xi)=0$, deci $a_0+a_1\xi+\ldots+a_n\xi^n=0$.

7.2.34. Exercițiu. *Să se determine numărul maxim de puncte de inflexiune pe care le poate avea o funcție polinomială de* grad n.

Ind. Polinomul f'' are cel mult $n-2$ rădăcini reale, deci f are cel mult $n-2$ puncte de inflexiune.

7.2.35. Exercițiu. *Ecuația* $x^n+px+q=0$ $(p, q \in \mathbf{R})$ *nu poate avea mai mult de două (resp. trei) rădăcini reale și distincte dacă* n *este par (resp. impar)*

Ind. Fie $f(x)=x^n+px+q$, $x \in \mathbf{R}_+$. Ecuația $f'(x)=0$ fiind binomă are 1 rădăcină reală dacă n este par și cel mult două rădăcini reale dacă n este impar.

7.2.36. Exercițiu. *Ecuația* $x^3-3x+q=0$ $(q \in \mathbf{R})$ *nu poate avea în intervalul* $[0, 1]$ *două rădăcini distincte.*

Ind. Fie $f(x)=x^3-3x+q$, $x \in \mathbf{R}$. Ecuația $f'(x)=0$ nu are rădăcini în intervalul $(0, 1)$.

7.3. Reprezentarea grafică a funcțiilor

7.3.1. Exercițiu. *Să se reprezinte grafic funcțiile următoare*

$1^\circ\ f(x)=|x-a|+b$, $x \in \mathbf{R}$; $2^\circ\ f(x)=\frac{1}{|x-a|}$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{a\}$;

$3^\circ\ f(x)=(-1)^{[x]}[x]$, $x \in \mathbf{R}$; $4^\circ\ f(x)=2[x]-x$, $x \in \mathbf{R}$;

Scanned with OKEN Scanner

$5°\ f(x) = x[x],\ x \in \mathbf{R}$; $6°\ f(x) = x^{-1}[x],\ x \in \mathbf{R}_+^*$;
$7°\ f(x) = \mathrm{d}(x, A),\ x \in \mathbf{R}$, *unde* $A \subseteq \mathbf{R}$ *este interval*;
$8°\ f(x) = d(x, A),\ x \in \mathbf{R}$, *unde* $A \subseteq \mathbf{R}$ *este mulțime cel mult numerabilă.*

Soluție. Graficele funcțiilor sînt reprezentate în fig. 26.

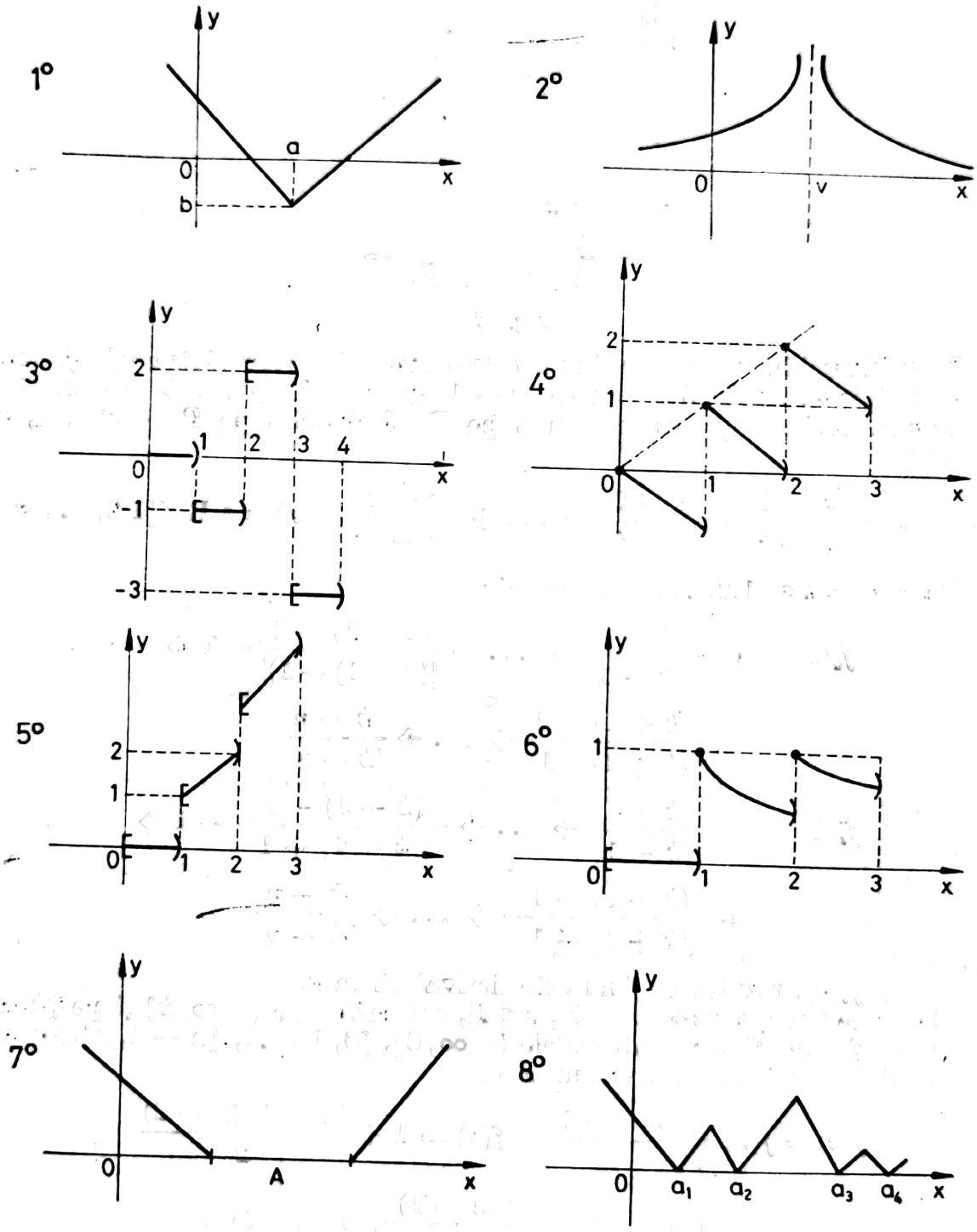


Fig. 26

7.3.2. Exercițiu. *Să se reprezinte grafic* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită astfel*: $f(x) = [x^2]$.

Soluție. Evident $f(x) = f(-x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deci f este pară.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $|x| < 1$ avem $x^2 \in [0, 1]$), deci $f(x) = 0$.

Fie $n \in \mathbf{N}$ fixat. Dacă $\sqrt{n} \leqslant x < \sqrt{n+1} \Leftrightarrow n \leqslant x^2 < n+1$, atunci $f(x) = n$, deci f este constantă pe intervalul $[\sqrt{n}, \sqrt{n+1})$.

Graficul lui $f_{|[0,\infty)}$ este reprezentat în fig. 27

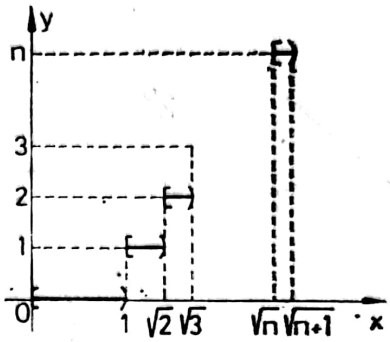


Fig. 27

7.3.3. Exerciţiu. *Să se calculeze derivata apoi să se reprezinte grafic funcţia* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită astfel* $f(x) = x + |x-1| + |x-2| + \ldots + |x-n|$.

Soluţie. Evident f este continuă pe $\mathbf{R}$, derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{1,2, \ldots, n\}$ şi avem :

$$f'(x) = 1 + \frac{x-1}{|x-1|} + \frac{x-2}{|x-2|} + \ldots + \frac{x-n}{|x-n|}, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{1,2, \ldots, n\}$$

Dacă $x = k \in \{1,2, \ldots, n\}$, atunci :

$$f'_d(k) = 1 + \frac{k-1}{|k-1|} + \ldots + \frac{(k-1)-1}{|(k-1)-1|} + 1 + \frac{(k+1)+1}{|(k+1)-1|} + \ldots + \frac{k-n}{|k-n|}$$

$$f'_s(k) = 1 + \frac{k-1}{|k-1|} + \ldots + \frac{(k-1)-1}{|(k-1)+1|} - 1 + \frac{(k+1)-1}{|(k+1)-1|} + \ldots + \frac{k-n}{|k-n|}$$

Cum $f'_d(k) \neq f'_s(k)$, rezultă că f nu este derivabilă în k.

Deoarece funcţia $x \mapsto |x-k|$, $x \in \mathbf{R}$, este afină pe $(-\infty, k]$ şi pe $[k, \infty)$, deducem că f este afină pe intervalele $(-\infty, 0]$, $[0, 1], \ldots, [n-1, n]$, $[n, \infty)$ ca sumă de funcţii afine. Evident avem

$$f(0) = f(n) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad f(1) = 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} (n+1)\,x - \dfrac{n(n-1)}{2}, & \text{dacă } x \geqslant n \\ (1-n)\,x + \dfrac{n(n-1)}{2}, & \text{dacă } x < 0, \end{cases}$$

deci graficul lui f are forma din fig. 28.

Scanned with OKEN Scanner

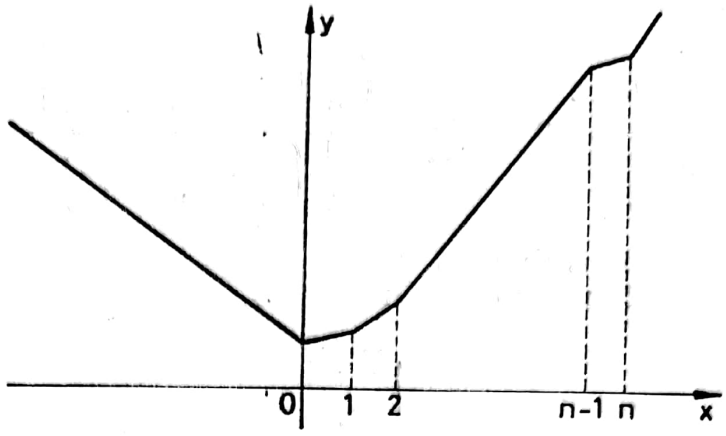


Fig. 28

7.3.4. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel :* $f(x) = x\left[\frac{1}{x}\right]$ *dacă* $x \neq 0$ *şi* $f(0) = 1$. *Să se studieze punctele în care* f *este continuă şi derivabilă apoi să se reprezinte* f *grafic.*

Soluţie. 1° $x > 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$

$$2^\circ\ 0 < x < 1 \Leftrightarrow (\exists)\ n \in \mathbf{N},\ \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n} \Leftrightarrow (\exists)\ n \in \mathbf{N},\ \left[\frac{1}{x}\right] = n$$

$$\Rightarrow f(x) = nx \in \left(\frac{n}{n+1}, 1\right] \Rightarrow |f(x) - 1| < \frac{1}{n} < x \tag{1}$$

$$3^\circ\ x \leqslant -1 \Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| = -1 \Rightarrow f(x) = -x \tag{2}$$

$$4^\circ\ -1 < x < 0 \Leftrightarrow (\exists)\ n \in \mathbf{N},\ -\frac{1}{n} < x \leqslant -\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow (\exists)\ n \in \mathbf{N}, \left[\frac{1}{x}\right] =$$

$$= -n - 1 \Rightarrow f(x) = -(n+1)x \in \left[1{,}1 + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow |f(x) - 1)| < \frac{1}{n} < |x| \tag{3}$$

Din (1) $\wedge$ (2) $\wedge$ (3) $\Rightarrow |f(x) - f(0)| < |x|$, $(\forall)$ $|x| < 1$, deci f este continuă în 0. Cum

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leqslant -1 \\ -(n+1)x, & -\frac{1}{n} < x \leqslant -\frac{1}{n+1} \\ nx, & \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

rezultă că f este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0\right\}$. Fie $a = \frac{1}{n+1}$; atunci $f(a+) = \frac{n}{n+1}$ şi $f(a-) = 1$, deci f este discontinuă în a şi analog şi

în $-a$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}-0}=0 \text{ și } \lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)-f(0)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-0}=-\infty,$$

rezultă că f nu este derivabilă în 0.

Graficul lui f este reprezentat în fig. 29.

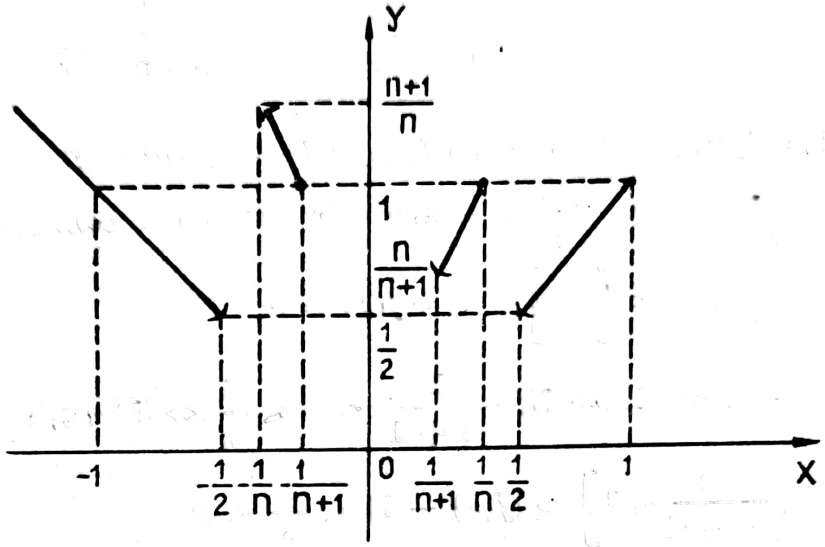


Fig. 29

7.3.5. Exercițiu. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ *fixate și* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+\ldots+|x-a_n|$. *Să se studieze* f *și să se reprezinte grafic.*

Soluție. Să presupunem reordonînd că $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$. Atunci $(\forall)\ x\in[a_k, a_{k+1}]$, avem:

$$f(x)=(x-a_1)+\ldots+(x-a_k)+(a_{k+1}-x)+\ldots+(a_n-x),$$

deci

$$f(x)=\begin{cases}-nx+(a_1+a_2+\ldots+a_n), & x<a_1\\ (2k-n)x+(-a_1-\ldots-a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n), & a_k\leqslant x\leqslant a_{k+1}\\ nx-(a_1+a_2+\ldots+a_n) & x>a_n\end{cases}$$

și deci

$$f'(x)=\begin{cases}-n, & x<a_1\\ 2k-n, & a_k<x<a_{k+1}\\ n, & x>a_n\end{cases}$$

Să calculăm derivatele laterale în a_k $(k=\overline{1,n})$:

$$f'_d(a_k)=2k-n, \qquad f'_s(a_k=2(k-1)-n,$$

de unde rezultă că f nu este derivabilă în a_k.

Scanned with OKEN Scanner

Să studiem semnul lui f pe $\mathbf{R}\setminus\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$:

$$1^\circ\ \boxed{n = 2s}\quad f'(x)\begin{cases} < 0,\ x \in (-\infty, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup \ldots \cup (a_{[\frac{n}{2}]-1}, a_{[\frac{n}{2}]}) \\ = 0,\ x \in (a_{[\frac{n}{2}]}, a_{[\frac{n}{2}]+1}) \\ > 0,\ x \in (a_{[\frac{n}{1}]+1}, a_{[\frac{n}{2}]+2}) \cup \ldots \cup (a_{n-1}, a_n) \cup (a_n, \infty) \end{cases}$$

deci f este strict descrescătoare pe $(-\infty, a_{[\frac{n}{2}]})$, constantă pe $(a_{[\frac{n}{2}]}, a_{[\frac{n}{2}]+1})$ și strict crescătoare pe $(a_{[\frac{n}{2}]+1}, \infty)$.

$$2^\circ\ \boxed{n = 2s+1}\quad f'(x)\begin{cases} <0,\ x \in (-\infty, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup \ldots \cup (a_{[\frac{n}{2}]}, a_{[\frac{n}{2}]+1}) \\ >0,\ x \in (a_{[\frac{n}{2}]+1}, a_{[\frac{n}{2}]+2}) \cup \ldots \cup (a_{n-1}, a_n) \cup (a_n, \infty), \end{cases}$$

deci f este strict descrescătoare pe $(-\infty, a_{[\frac{n}{2}]+1})$ și strict crescătoare pe $(a_{[\frac{n}{2}]+1}, \infty)$.

Graficul funcției f este reprezentat în fig. 30

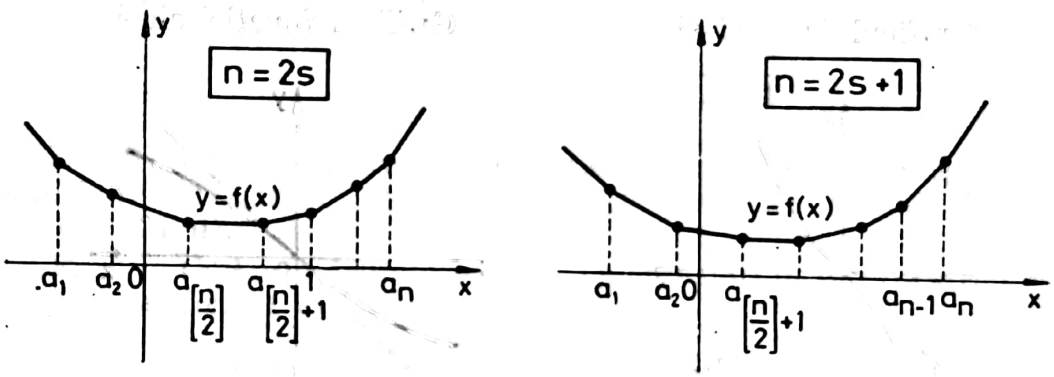


Fig. 30

Corolar 1. *Fie* $a_1 a_2, \ldots a_n \in \mathbf{R}$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. *Atunci*

$$\min_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_i - a_j| = \sum_{j=1}^{n} |a_{[\frac{n}{2}]+1} - a_j|$$

Soluție. Ținem seama că minimul funcției $f(x) = \sum_{j=1}^{n} |x - a_j|$, $x \in \mathbf{R}$ este atins în punctul $a_{[\frac{n}{2}]+1}$.

Corolar 2. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ *diferite între ele și* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$. *Atunci există un interval* $[a_j, a_{j+1}]$ *pe care* f *este constantă* $\Leftrightarrow$ n *este par.*

7.3.6. Exerciţiu. *Să se studieze apoi să se reprezinte grafic funcțiile trigonometrice hiperbolice sh, ch, th, adică funcțiile de la* $\mathbf{R}$ *la* $\mathbf{R}$ *definite astfel :*

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Evident toate cele trei funcții sînt continue și derivabile pe R și avem :

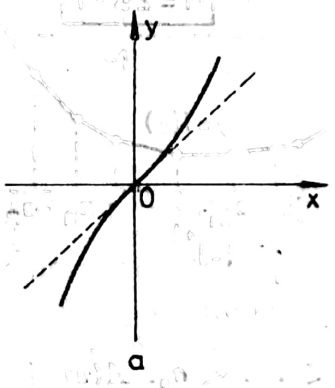
$$\left.\begin{aligned}(\operatorname{sh} x)' &= \operatorname{ch} x,\ (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,\ (\operatorname{th} x)' = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}\\ (\operatorname{sh} x)'' &= \operatorname{sh} x,\ (\operatorname{ch} x)'' = \operatorname{ch} x,\ (\operatorname{th} x)'' = -2\,\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}\end{aligned}\right\} (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

1° Tablou de variație pentru sh.

x	$-\infty$		0		∞
$(\operatorname{sh} x)'$		$+$	$+$	$+$	$+$
$(\operatorname{sh} x)''$		$+$	0	$+$	$+$
$\operatorname{sh} x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

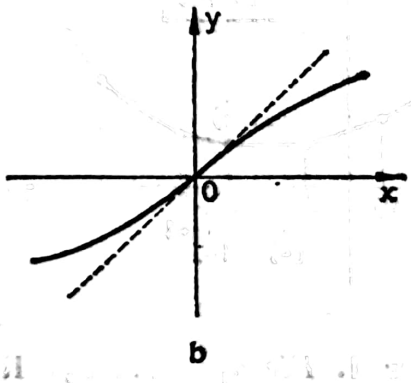
Așadar sh este bijectivă și are pe 0 punct de inflexiune față de prima bisectoare (fig. 31 a).

Graficul funcției sh



a

Graficul funcției sh^{-1}



b

Fig. 31

Să scriem expresia funcției sh^{-1}, reprezentată grafic în fig. 31 *b*).

Funcția sh fiind bijectivă, pentru $(\forall)\ y \in \mathbf{R}$, ecuația $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$, admite o soluție reală unică în x, egală cu $\operatorname{sh}^{-1} y$. Evident avem :

$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2y\,e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ (deoarece $e^x > 0$ și $y - \sqrt{y^2+1} < 0$) $\Leftrightarrow x = \operatorname{sh}^{-1} y = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$

Prin urmare schimbînd notațiile avem :

$$\boxed{\operatorname{sh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{(x^2+1)})\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}}$$

de unde se obține ușor derivata funcției sh^{-1}.

2° Tabloul de variaţie pentru ch.

x	$-\infty$		0		∞
$(\operatorname{ch} x)'$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(\operatorname{ch} x)''$	$+$	$+$		$+$	$+$
$\operatorname{ch} x$	∞	$\searrow$	1	$\nearrow$	∞

Graficul lui ch

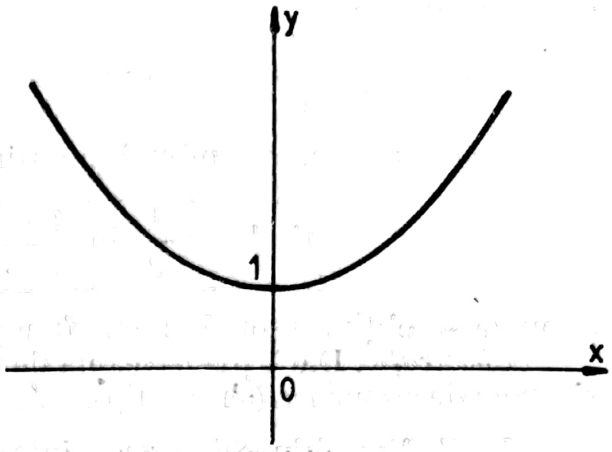


Fig. 31 c.

Analog se arată că $\boxed{\operatorname{ch}^{-1} x = \pm \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}),\ (\forall)\ x \geqslant 1.}$

3° Tablou de variaţie pentru th

x	$-\infty$		0		∞
$(\operatorname{th} x)'$	$+$		$+$		$+$
$(\operatorname{th} x)''$	$+$		0		$-$
$\operatorname{th} x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Deci th este strict crescătoare, are mulţimea valorilor egală cu $(-1, 1)$ şi cum $f'(0) = 1$ rezultă că th are pe 0 punct de inflexiune faţă de prima bisectoare (fig. 31 d).

Funcţia th^{-1} este definită pe $(-1, 1)$, cu valori în $\mathbf{R}$, este strict crescătoare şi surjectivă (fig. 31 e).

Graficul funcţiei th

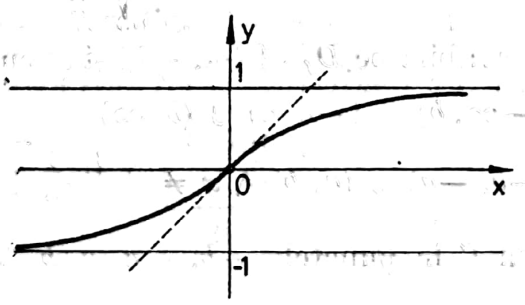


Fig. 31 d.

Graficul funcţiei th^{-1}

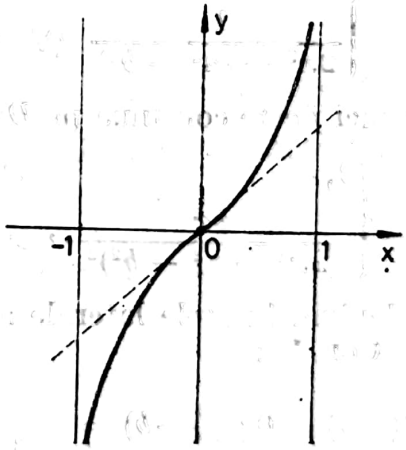


Fig. 31 e.

Să scriem expresia lui $\operatorname{th}^{-1} y$. Funcţia th fiind injectivă şi $\operatorname{th} : \mathbf{R} \to (-1, 1)$ rezultă că $(\forall)\ y \in (-1, 1)$, ecuaţia $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y$ admite o soluţie reală unică în x, egală cu $\operatorname{th}^{-1} y$.

Scanned with OKEN Scanner

Evident avem :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$$

Prin urmare, schimbînd notaţiile putem scrie :

$$\boxed{\text{th}^{-1}x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad (\forall)\ x \in (-1, 1)},$$

de unde se obţine uşor derivata funcţiei th^{-1}.

Observaţie. Dacă ţinem seama de formula care dă derivata funcţiei inverse, obţinem de asemenea $(\text{sh}^{-1})'$ şi $(\text{th}^{-1})'$, cunoscînd $(\text{sh})'$ respectiv $(\text{th})'$.

7.3.7. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic* funcţia $f(x) = \dfrac{1}{|x^2-a^2| - |x^2-b^2|}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$ *şi* $0 < a < b$.

Soluţie. Din tabelul

x	$-\infty$		$-b$		$-a$		0		a		b		$+\infty$
x^2-a^2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-b^2		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	$\nexists$	$+$	

rezultă $|x^2 - a^2| \neq |x^2 - b^2|$, $(\forall)\ x \in (-\infty, -b) \cup (-a, a) \cup (b, \infty)$, altfel am avea $a^2 = b^2$, absurd.

Dacă $x \in [-b, -a] \cup [a, b]$ şi $|x^2 - a^2| = |x^2 - b^2|$, atunci $x^2 - a^2 = -(x^2 - b^2)$, deci $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$ şi deci $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{ \pm \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)} \right\}$.

Evident avem :

$$f(x) = \begin{cases} \pm \dfrac{1}{b^2 - a^2} & (\forall)\ x \in (-\infty, -b] \cup [-a, a] \cup [b, \infty) \\ \dfrac{1}{2x^2 - (a^2 + b^2)} & (\forall)\ x \in (-b, -a) \cup (a, b) \wedge x \neq \pm \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)} \end{cases}$$

Atunci f este continuă pe D_f, derivabilă pe $D_f \setminus \{\pm a, \pm b\}$ şi avem :

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, b) \cup (-a, a) \cup (b, \infty) \\ \dfrac{4x}{(2x^2 - a^2 - b^2)^2}, & x \in (-b, -a) \cup (a, b) \wedge x \neq \pm \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)} \end{cases}$$

Calculînd limitele laterale ale lui f' în punctele $-b, -a, a, b$, deducem (T.6.3.8. Cor. 1) :

$$f'_s(-b) = 0\ ;\ f'_d(-b) = \frac{4b}{(a^2 - b^2)^2} > 0\ ;\ f'_s(-a) = \frac{4a}{(a^2 - b^2)^2} > 0\ ;$$

$$f'_d(-a) = 0\ ;\ f'_s(a) = 0\ ;\ f'_d(a) = -\frac{4a}{(a^2 - b^2)^2} < 0\ ;$$

$$f'_d(b) = 0\ ;\ f'_s(b) = -\frac{4b}{(b^2 - a^2)^2} < 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare f nu este derivabilă în punctele $-b$, $-a$, a, b.
Se observă imediat că avem : $\lim\limits_{x\nearrow -c} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\searrow -c} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x\nearrow c} f(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x\searrow c} f(x) = +\infty$, unde $c = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$.

Tabloul de variație

x	$-\infty$	$-b$	$-\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$	$-a$	0	a	$\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$	b	$+\infty$
f'	0	0	0	$+$	$+$	0	0	0	$-$	$-$	0
f	$\frac{1}{b^2+a^2}$	$\nearrow$	∞	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{a^2-b^2}$	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	$\frac{1}{b^2-a^2}$

Graficul lui f este reprezentat în fig. 32.

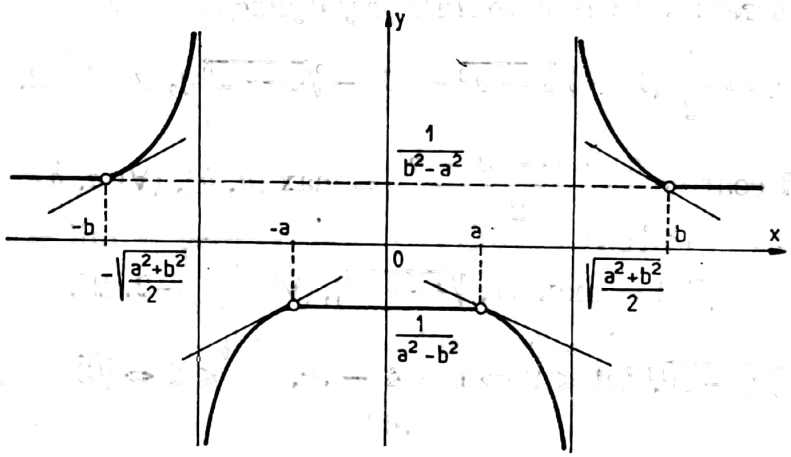


Fig. 32

7.3.8. Exercițiu. *Fie funcția* $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \lambda\sqrt{1-x}$, $|x|<1$, *unde* λ *este parametru real. Să se determine* λ *a.î.* $x = \frac{1}{2}$ *să fie punct de extrem pentru* f, *apoi să se reprezinte* f *grafic.*

Soluție. $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{\lambda}{2\sqrt{1-x}}$, $|x|<1$

deci

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(x + \frac{\lambda}{2}\sqrt{1+x}\right), \quad |x|<1$$

Dacă $x_0 = \frac{1}{2}$ este punct de extrem local, atunci cf. th. Fermat avem $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$.
Însă avem :

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Din tabloul alăturat deducem că într-adevăr $x_0 = \frac{1}{2}$ este extrem local (maxim).

Tabloul de variație

x	-1		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{1}{2}$		1
f'	|	$+$	$+$	$+$	0	$-$	|		
f	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\nearrow 0$	$\nearrow$	$\frac{3-\sqrt{6}}{3}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\searrow 0$		

Graficul lui f este reprezentat în fig. 33.

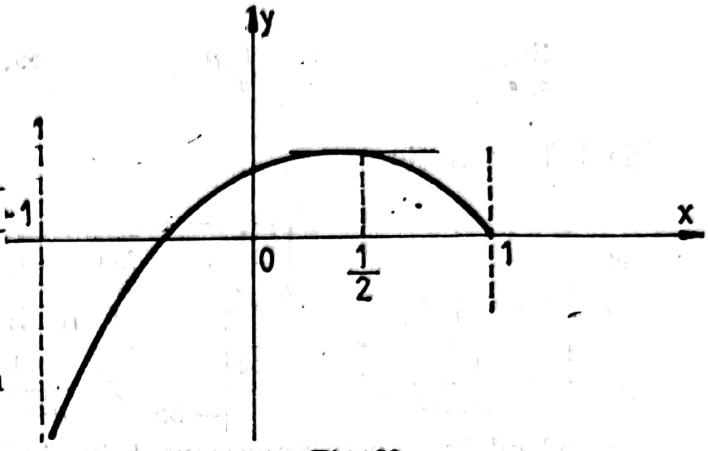


Fig. 33

7.3.9. Exercițiu. *Să se reprezinte grafic funcția*

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4 - x^2} + |1 - \sqrt{4 - x^2}|), \quad x \in [-2, 2]$$

Soluție. Deoarece $\frac{a + b - |a - b|}{2} = \max\{a, b\}$, $(\forall)$ $a, b \in \mathbf{R}$, avem :

$$f(x) = \max\{1, \sqrt{4 - x^2}\}, (\forall)\ x \in [-2, 2].$$

Însă

$$1 \geqslant \sqrt{4 - x^2},\ |x| \leqslant 2 \Leftrightarrow 1 \geqslant 4 - x^2,\ |x| \leqslant 2 \Leftrightarrow \sqrt{3} \leqslant |x| \leqslant 2$$

și analog

$$1 \leqslant \sqrt{4 - x^2},\ |x| \leqslant 2 \Leftrightarrow |x| \leqslant \sqrt{3}$$

deci $f(x) = 1$, dacă $\sqrt{3} \leqslant |x| \leqslant 2$ și $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, dacă $|x| < \sqrt{3}$

Graficul lui f este reprezentat în fig. 34.

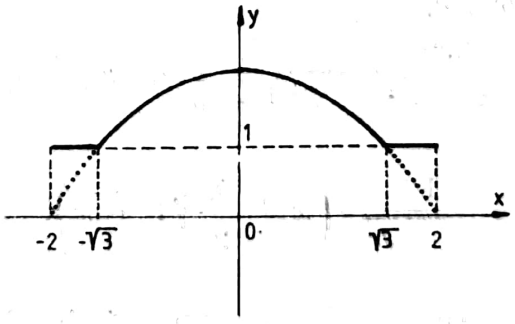


Fig. 34

7.3.10. Exercițiu. *Să se repteznite grafic funcția :*

$$f(x) = \sqrt{x + 5 - 4\sqrt{x + 1}} + \sqrt{x + 10 - 6\sqrt{x + 1}}$$

Soluție. Evident avem :

$$x+5-4\sqrt{x+1}=(\sqrt{x+1}-2)^2,\ x+10-6\sqrt{x+1}=(\sqrt{x+1}-3)^2,$$

deci

$$f(x)=|\sqrt{x+1}-2|+|\sqrt{x+1}-3|,\ x\in D_f=[-1,\infty)$$

și deci

$$f(x)=\begin{cases}-2\sqrt{x+1}+5, & \text{dacă } -1\leqslant x\leqslant 3\\ 1 & ,,\ \ 3<x<8\\ 2\sqrt{x+1}-5 & ,,\ \ 8\leqslant x<\infty\end{cases}$$

Prin urmare

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}, & \text{dacă } -1<x<3\\ 0 & ,,\ \ 3<x<8\\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} & ,,\ \ 8<x<\infty\end{cases}$$

De aici deducem :

$$f'_s(3)=\lim_{x\nearrow 3}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}=-\frac{1}{2},\ f'_d(3)=0,\ f'_s(8)=0,\ f'_d(8)=$$

$$=\lim_{x\searrow 8}\frac{1}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{3}\ \text{și}\ f'_d(-1)=\lim_{x\searrow -1}f'(x)=\lim_{x\searrow -1}\frac{-1}{\sqrt{x+1}}=-\infty.$$

Graficul lui f este reprezentat în fig. 35.

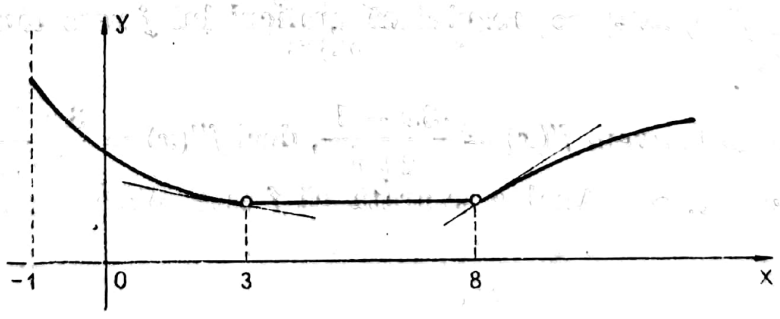


Fig. 35

7.3.11. Exercițiu. *Să se reptrezinte grafic funcția* $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ *definită astfel* : $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$.

Soluție. Evident avem :

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ \text{și}\ f''(x)=-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}},\ (\forall)\ x\in(-1,1).$$

Cum $\lim_{x\nearrow 1}f'(x)=-\infty$ și $\lim_{x\searrow -1}f'(x)=+\infty$, rezultă că graficul lui f este tangent dreptelor $x=1$ și $x=-1$ respectiv în punctele de ordonată $f(1)=1$

și $f(-1) = -1$ (fig. 36). Deoarece $f''(x) < 0$, $(\forall)\ x \in (-1, 1)$, deducem că f este concavă.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 1,\ x \in (-1,1) \Leftrightarrow \frac{x^2}{1-x^2} = 1,\ x \in (0,1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tabloul de variație

x	-1		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
f'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$
f''	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-\infty$
f	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

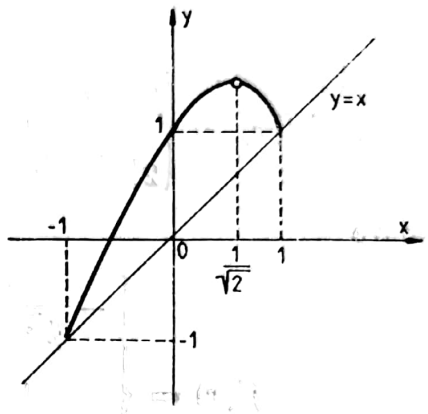


Fig. 36

7.3.12. Exercițiu. *Să se reprezinte grafic funcția* $f: [0, \infty) \to \mathbf{R}$ *definită astfel*: $f(x) = |x-1|\sqrt{x}$.

Soluție. Funcția f este continuă pe $[0, \infty)$, derivabilă pe $(0, \infty)\setminus\{1\}$ și avem:

$$f'(x) = \frac{x-1}{|x-1|}\sqrt{x} + \frac{|x-1|}{2\sqrt{x}} = \frac{(x-1)(2x+1x-1)}{2|x-1|\sqrt{x}} \quad (\forall)\ x \in (0,\infty)\setminus\{1\}.$$

Deoarece $\lim\limits_{x \nearrow 1} f'(x) = 1$, rezultă că $f'_d(1)$ există și $f'_d(1) = 1$.

De asemenea $\lim\limits_{x \searrow 1} f'(x) = -1$, deci $f'_s(1)$ există și $f'_s(1) = -1$ și deci f nu este derivabilă în 1.

Cum $\lim\limits_{x \searrow 0} f'(x) = +\infty$, rezultă că graficul lui f este tangent axei oy în origine (fig. 37).

Pentru $x > 1$, avem $f'(x) = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$, deci $f''(x) = \frac{3x+1}{4x\sqrt{x}} > 0$ și deci f este convexă pe $[1, \infty)$. Analog se arată că f este concavă pe $[0, 1]$.

Tabloul de variație

x	0		$\frac{1}{3}$		1		∞
f'	∞	$+$	0	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$
f	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

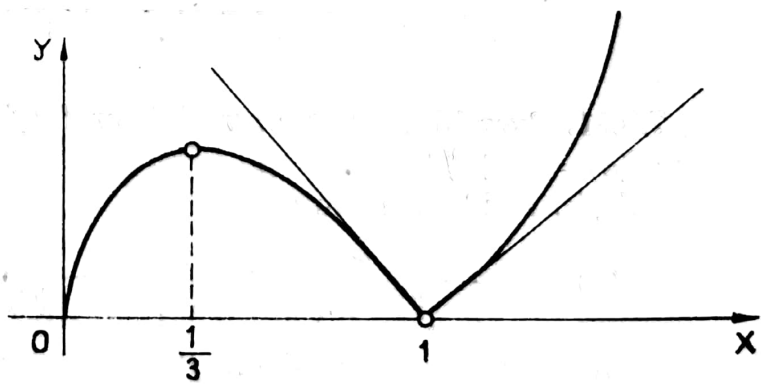


Fig. 37

7.3.13. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită astfel* $f(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$.

Soluţie. Funcţia f este pară : $f(x) = f(-(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Evident f este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ şi avem :

$$f'(x) = \frac{|1 - x^2|}{2\sqrt{|1 - x^2|}} = \frac{-2x\,\dfrac{1 - x^2}{|1 - x^2|}}{2\sqrt{|1 - x^2|}},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$$

De asemenea avem :

$$f'_s(1) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \nearrow 1} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x - 1} = -\infty$$

şi analog $f'_d(1) = +\infty$

Tabloul de variaţie

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
f'	$\|$	$-\infty$	$\|$	$+\infty$	$+\ 0\ -$		$-\infty$	$\|$	$+\infty\ +$
	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

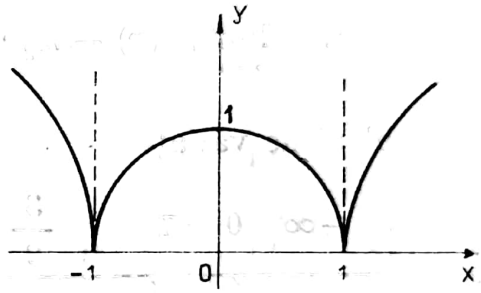


Fig. 38

Graficul lui f este reprezentat în fig. 38.

7.3.14. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţia*

$$f(x) = \pm x\sqrt{\frac{x}{2a - x}}\ (a > 0)\ \text{(cisoida)}.$$

Ind. $D_f = [0, 2a)$; $f'(x) = \dfrac{ax^2(3a - x)}{\sqrt{x^3(2a - x)^3}}$, $(\forall)\ x \in (0, 2a)$

Tabloul de variaţie

x	0			$2a$
f'	$0\ +$	$+$	$+$	$\|$
f	0	$\nearrow$	$\nearrow$	∞

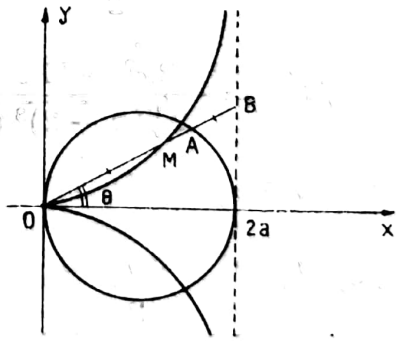


Fig. 39

Graficul lui f este reprezentat în fig. 39.

Observaţie. Se arată că cisoida este locul geometric al punctelor M pentru care $\overline{OM} = \overline{AB}$, cînd $\theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

7.3.15. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f(x) = |x| \sqrt{\frac{x}{|x-1|}}$.

Ind. Evident avem :

$$D_f = (-\infty, 0] \cup (1, \infty); \quad f'(x) = \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}\right)' = \frac{1}{2}(2x-3)\sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}}.$$

Asimptote :

$$m_{1,2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{\frac{x}{x-1}} = \pm 1,$$

$$n_1 = \lim_{x \to \infty} [f(x) - m_1 x] = \lim_{x \to \infty} x \left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1\right) = \frac{1}{2},$$

$$n_2 = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - m_2 x] = \lim_{x \to -\infty} |x| \left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} - \frac{x}{|x|}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Tabloul de variaţie

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		∞
f'		$+$	0	▨		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	▨	∞	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	∞

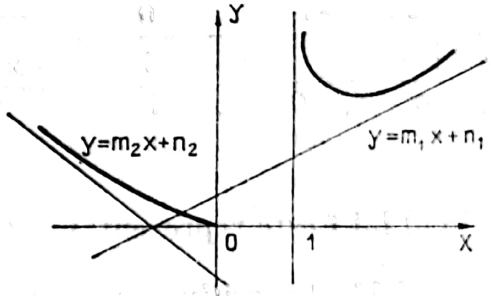


Fig. 40

Graficul lui f este reprezentat în fig. 40.

7.3.16. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f(x) = x\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$.

Ind. $D_f = (-\infty, 2] \cup (3, \infty)$.

Asimptote · $y = x + \frac{1}{2}$ la $+\infty$ şi $-\infty$.

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 11x + 12}{2\sqrt{(x-2)^3(x-3)}}, \quad (\forall)\ x \in D_f \setminus \{2\}.$$

Tabloul de variaţie

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		2		3		4		∞
f'		$+$	$+$	$+$	0	$-$	▨	$-$	▨	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	▨	∞	▨	$\searrow$	$4\sqrt{2}$	$\nearrow$	∞

Graficul lui f este reprezentat în fig. 41.

Scanned with OKEN Scanner

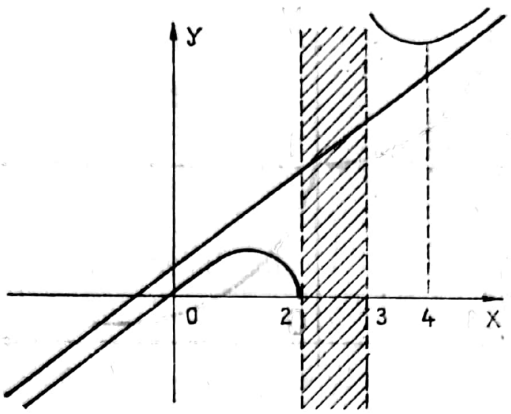


Fig. 41

• **7.3.17. Exerciţiu.** *Să se reprezinte grafic funcţia* $f(x) = \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^3 + x^2}$.

Ind. $D_f = [-1, \infty)$; $f'(x) = \frac{x(3x+2)}{4\sqrt{x^3+x^2}}$, $(\forall)\ x \in D_f \setminus \{0\}$.

Tabloul de variaţie

x	-1		$-\frac{2}{3}$		0		∞
f'	∞	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

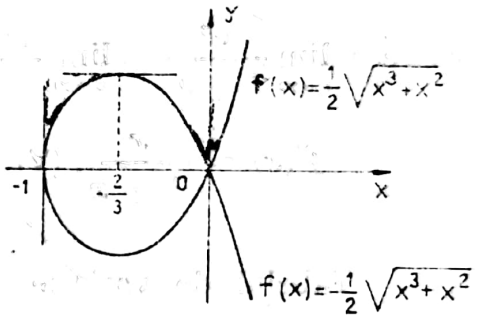


Fig. 42

Graficul lui f este reprezentat în fig. 42.

• **7.3.18. Exerciţiu.** *Să se reptrezinte grafic funcţia* $f(x) = \frac{1}{x}\ln(1+x)$.

Ind. Evident avem $D_f = (-1, 0) \cup (0, \infty)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left[\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right], (\forall)\ x \in D_f$$

Fie $\varphi(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$, $x \in (-1, \infty) = D_\varphi$. Atunci $\varphi'(x) = -\frac{x}{(1+x)^2}$, $(\forall) x \in D_\varphi$, deci obţinem tablourile de variaţie de mai jos

x	-1		0		∞
φ'	$\|$	$+$	0	$-$	$-$
φ		$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

x	-1		0		∞
f'	$\|$	$-$	$-$	$\|$	$-$ $-$
f	∞	$\searrow$	1		1 $\searrow$ 0

Graficul lui f reprezentat în fig. 43.

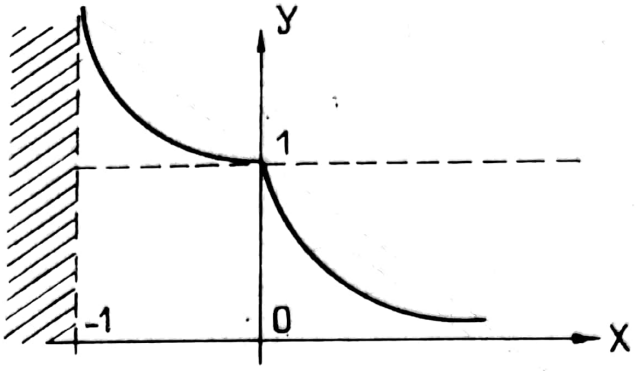


Fig. 43

7.3.19. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f(x) = x - \ln(1 + x)$, $x \in (-1, \infty)$

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{x \searrow -1} \ln(1 + x) = \lim\limits_{t \searrow 0} \ln t = -\infty$, rezultă că $\lim\limits_{x \searrow -1} f(x) = +\infty$

Analog avem:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x - \ln)(1 + x)) = \lim_{x \to \infty} (\ln e^x - \ln(1 + x)) = \lim_{x \to \infty} \ln \frac{e^x}{1 + x} = \infty,$$

deoarece $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{1 + x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} = \infty$. Mai departe avem

$$f'(x) = \frac{x}{1 + x}, \ (\forall)\ x \in (-1, \infty), \text{ deci } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Tabelul de variaţie

x	-1		0		$+\infty$
f'	$\|$	$-$ $-$	0	$+$ $+$	$\|$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Graficul lui f este reprezentat în fig. 44.

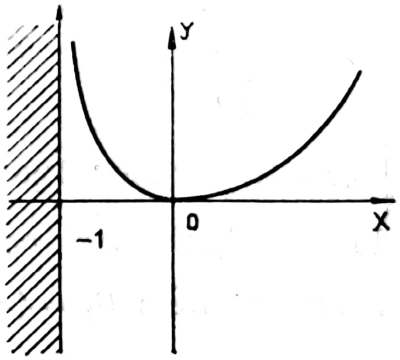


Fig. 44

7.3.20. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ *definită astfel:* $f(x) = x^2 \ln x$, *dacă* $x > 0$ *şi* $f(0) = 0$.

Soluţie. Cu ajutorul regulii lui Hospital deducem imediat că $\lim\limits_{x \searrow 0} x \ln x = 0$, deci $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} x(x \ln x) = 0 = f(0)$ şi deci f este continuă în 0.

Mai departe avem:

$$f'(x) = 2x \ln x + x; \ f''(x) = 2 \ln x + 3, \ (\forall)\ x \in (0, \infty).$$

Cum $\lim\limits_{x \searrow 0} f'(x) = 0$, rezultă că $f'(0)$ există şi $f'(0) = 0$. Evident avem:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \text{ şi } f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{3}{2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul de variaţie

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f'	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
f''		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
f	0	↘	$-\frac{2}{3}e^{-3}$	↘	$-\frac{1}{2}e^{-1}$	↗	∞

Graficul lui f este reprezetat în fig. 45.

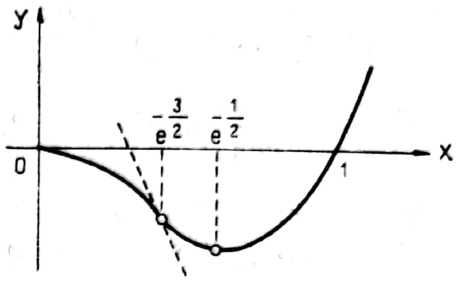


Fig. 45

7.3.21. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* : $f(x) = \ln(1 + x^2)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. *Să se reprezinte grafic* f, *apoi să se afle numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei* $\ln(1 + x^2) = ax + b$.

Soluţie. Evident avem :

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2},\quad f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2},\quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Tabloul de variaţie

	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
f''		$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f	∞	↘	$\ln 2$	↘	0	↗	$\ln 2$	↗	∞

Graficul lui f este reprezentat în fig. 46.

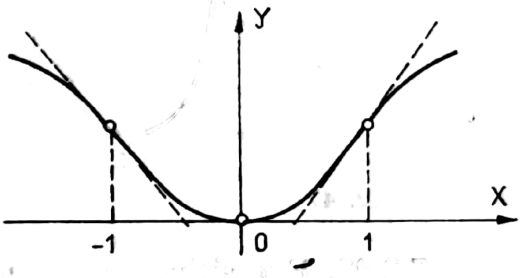


Fig. 46

Se vede imediat că orice dreaptă $y = ax + b$, cu $b \geqslant 0$, intersectează graficul lui f în cel puţin un punct şi în cel mult trei puncte, deci ecuaţia $\ln(1 + x^2) = ax + b$ cu $b \geqslant 0$ are cel puţin una şi cel mult trei rădăcini reale.

Dacă $a = 0$ şi $b < 0$, ecuaţia dată nu are rădăcini reale. Dacă $a \neq 0$ şi $b < 0$, ecuaţia $\ln(1 + x^2) = ax + b$, are exact o rădăcină reală.

Într-adevăr să punem $\varphi(x) = \ln(1 + x^2) - ax - b$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci $\varphi(0) = 0$ şi cum $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1 + x^2)}{ax + b} = 0$, avem $\ln(1 + x^2) \leqslant ax + b$, $(\forall)\ x \geqslant x_0$ pentru un anumit $x_0 > 0$, deci $\varphi(x) < 0$, $(\forall)\ x \geqslant x_0$. Aşadar φ se anulează cel puţin o dată în intervalul $(0, x_0)$ şi evident numai o singură dată.

7.3.22. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţia* f *definită astfel* :

$$x \mapsto -\ln\cos x,\ x \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left(2k\pi - \frac{\pi}{2},\ 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Deoarece funcțiile $x \mapsto \cos x$, $x \in \mathbf{R}$ și $x \mapsto \ln x$, $x \in \mathbf{R}_+^*$ sînt derivabile, deducem că f este derivabilă pe D_f și avem :

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad (\forall)\, x \in D_f, \text{ deci } f'(x) = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x \in 2\pi\,\mathbf{Z}.$$

Cum $f(-x) = f(x)$, $(\forall)\, x \in D_f$, este suficient să studiem f pe $[0, \infty) \cap D_f$. Tabloul de variație al funcției f pe $[0, \infty) \cap D_f$

x	0		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$		2π		$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	
f'	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖			
f	0	$\nearrow \infty$	‖	$-\infty \searrow 0$		$\nearrow \infty$	‖	$-\infty$		

Graficul lui f este reprezentat în fig. 47.

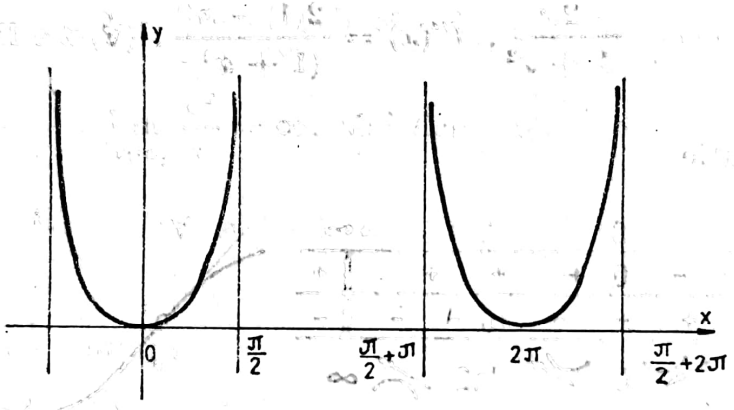


Fig. 47

7.3.23. Exercițiu. *Să se reprezinte grafic funcția* $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ *definită astfel* $f(x) = \dfrac{|x| \ln |x|}{1 - |x|}$, *dacă* $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, $f(0) = 0$ *și* $f(\pm 1) = -1$.

Soluție. Avem $f(x) = f(-x)$, $(\forall)\, x \in [-1, 1]$, deci f simetrică față de 0. Deoarece $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 1} \dfrac{x \ln x}{1 - x}$ avem nedeterminare de forma $\dfrac{0}{0}$, deci aplicînd Hospital obținem :

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{1 + \ln x}{-1} = -1 = f(1),$$

deci f este continuă în $x = 1$. De asemenea avem $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{x \ln x}{1 - x} = 0$, deoarece $\lim\limits_{x \searrow 0} x \ln x = 0$. Așadar $f(0+) = 0$ și cum $f(0-) = f(0+)$, conchidem că f este continuă în $x = 0$.

Se vede imediat că

$$f'(x) = \left(\frac{|x| \ln |x|}{1 - |x|}\right)' = \frac{\frac{x}{|x|}(\ln |x| + 1) - x}{(1 - |x|)^2}, \quad (\forall)\ (x \in (-1, 1) \setminus \{0\}.$$

Atunci $\lim_{\substack{x>0\\x\to 0}} f'(x) = -\infty$, deci $f'_d(0)$ există și este egală cu $-\infty$ Analog deducem că $f'_s(0) = +\infty$, prin urmare f nu este derivabilă în 0. De asemenea avem:

$$\lim_{x\nearrow 1} f'(x) = \lim_{x\nearrow 1} \frac{1 + \ln x - x}{(1-x)^2} = -\frac{1}{2},$$

deci $f'(1)$ există și este egală cu $-\frac{1}{2}$ (T.6.3.8.)

Evident funcția $x \mapsto \ln x + 1 - x$, $x \in (0,1]$, este crescătoare și se anulează în 1, deci $\ln x + 1 - x < 0$, $(\forall)\ x \in (0,1)$. De aici rezultă că $f'(x) < 0$, $(\forall)\ x \in (0,1)$.

Tabloul de variație

x	-1		0		1
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$ $+$ $+$	$\|$	$-$ $-$	$\|$	$-\frac{1}{2}$
$f(x)$	-1 $\nearrow$	$\|$	0 $\searrow$	$\|$	-1

Graficul lui f este reprezentat în fig. 48.

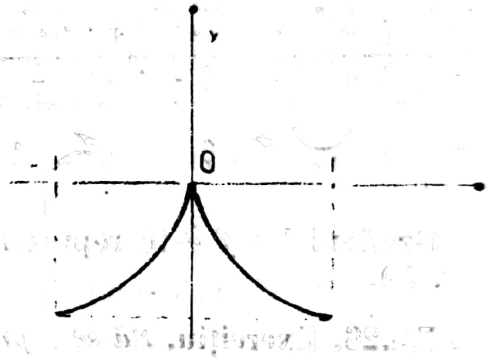


Fig. 48

7.3.24. Exercițiu. *Să se reprezinte grafic funcția* $f(x) = \dfrac{1}{\ln|x-1|}$.

Ind. $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0, 1, 2\}$; $f'(x) = -\dfrac{x-1}{|x-1^2|\ln^2|x-1|}$, $(\forall)\ x \in D_f$.

Tabloul de variație

x	$-\infty$		0		1		2		∞
f'	$\|$	$+$ $+$	$\|$	$+$ $+$	$\|$	$-$ $-$	$\|$	$-$ $-$	$\|$
f	0 $\nearrow$	$+\infty$	$\|$	$-\infty$ $\nearrow$ 0 $\searrow$	$\|$	$-\infty$	$\|$	$+\infty$ $\searrow$ 0	

Graficul lui f este reprezentat în fig. 49.

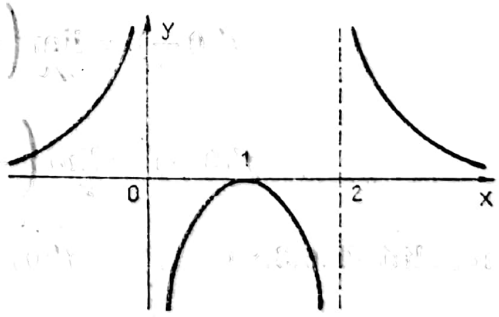


Fig. 49

• **7.3.25. Exercițiu.** *Să se reprezinte grafic funcția* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită astfel:* $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, *dacă* $x \neq 0$ *și* $f(0) = 0$.

Soluție. Am văzut (P.12.4.3.) că f este indefinit derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ și avem :

$$f'(x) = 2x^{-3}\,e^{-\frac{1}{x^2}};\ f''(x) = 2x^{-6}(2 - 3x^2)\,e^{-\frac{1}{x^2}},\ (\forall)\ x \neq 0$$

și

$$f'(0) = f''(0) = 0$$

Este clar că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, deci dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală. Funcția f fiind pară, este suficient să o studiem pe $\mathbf{R}_+$.

Tabloul de variație.

x	0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
f'	0	$+$	$+$	$+$	$+$
f''	0	$+$	0	$-$	$-$
f	0	⌒	0	⌒	1

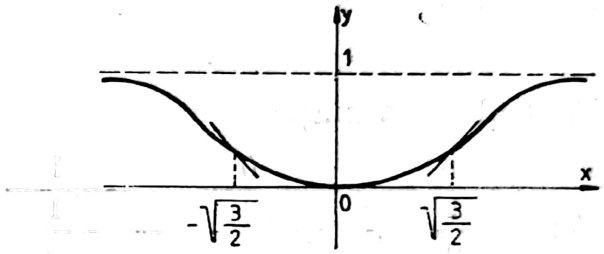


Fig. 50

Graficul lui f este reprezentat în fig. 50.

7.3.26. Exercițiu. *Să se reprezinte grafic, funcția* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită astfel :* $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ *dacă* $x \neq 0$ *și* $f(0) = 0$.

Soluție. Evident f este indefinit derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ și avem :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}},\ f''(x) = \frac{1 + 2x}{x^4}e^{\frac{1}{x}},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}^*$$

Deoarece

$$f'(0-) = \lim_{x\nearrow 0}\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{t\to\infty}(-t^2 e^{-t}) = 0;$$

$$f'(0+) = \lim_{x\searrow 0}\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{t\to\infty}(-t^2 e^{t}) = -\infty,$$

rezultă (T.6.3.8.Cor.1) că $f'_s(0) = 0$ și $f'_d(0) = -\infty$. Cum însă

$$f(0-) = \lim_{x\nearrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0;\ f(0+) = \lim_{x\searrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty} e^{t} = \infty,$$

rezultă că f este discontinuă în 0.

Este clar că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, deci dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală.

Scanned with OKEN Scanner

Talboul de variație

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
f'		−		−	0	+	
f''	−	−	0	+	+	+	+
f	1	↘	e^{-2}	↘	0	↗	1

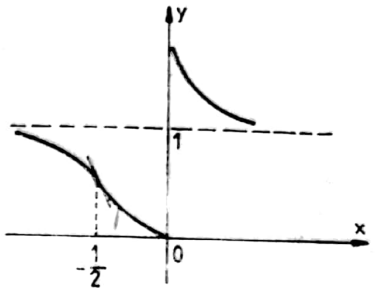


Fig. 51

Graficul lui f este reprezentat în fig. 51

7.3.27. Exercițiu. *Să se reprezinte grafic funcția* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită astfel :* $f(x) = |x - 1|e^{-|x|}$.

Soluție. Fie funcțiile $\varphi(x) = |x - 1|$, $x \in \mathbf{R}$ și $\psi(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$. Evident φ este continuă pe $\mathbf{R}$ și derivabilă pe $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ iar ψ este continuă pe $\mathbf{R}$ și derivabilă pe $\mathbf{R}^*$, deci f este continuă pe $\mathbf{R}$ și derivabilă pe $\mathbf{R}\setminus\{0, 1\}$.

Deoarece $f'_s(0) = 0$, $f'_d(0) = -2$; $f'_s(1) = -e^{-1}$, $f'_d(1) = e^{-1}$, rezultă că f nu este derivabilă în 0 și 1. Mai departe avem :

$$f'(x) = \begin{cases} -x\,e^{x} & , \quad x < 0 \\ (x-2)\,e^{-x}, & x \in (0,1), \\ (2-x)\,e^{-x}, & x > 1 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} -(x+1)\,e^{x}, & x < 0 \\ (3-x)\,e^{-x}, & x \in (0,1) \\ (x-3)\,e^{-x}, & x > 1 \end{cases}$$

Tabloul de variație

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
f'		+	+		+	+	+	+	0	−	−	−	−
f''		+	+	0	−	−	+	+	−	−	0	+	+
f	0	↗	$2e^{-1}$	↗	1	↘	0	↗	e^{-2}	↘	$2e^{-3}$	↘	0

Graficul lui f este reprezentat în fig. 52.

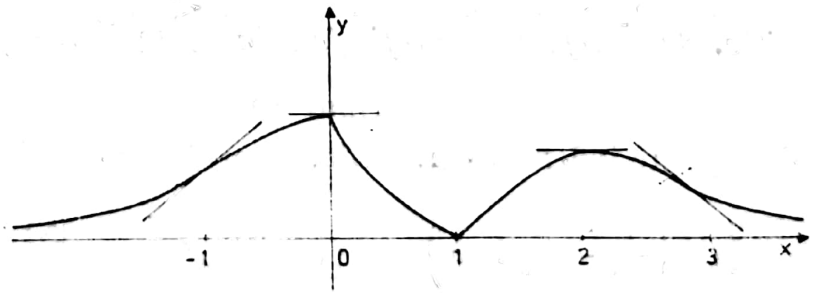


Fig. 52

7.3.28. Exercițiu. *Fie* $f : \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = \dfrac{x\,e^{x}}{x-1}$.

Să se reprezinte f *grafic, apoi să se afle de aici numărul rădăcinilor reale ale ecuației* $x - \lambda(x-1)\,e^{-x} = 0$, $(\lambda \in \mathbf{R})$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Evident f este indefinit derivabilă și avem :

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x - 1)\,e^x}{(x-1)^2}, \quad (\forall)\, x \in D_f$$

Atunci $f'(x) = 0$, $x \in D_f \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, unde $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Tabloul de variație

x	$-\infty$		x_1		0		1		x_2		$+\infty$
f'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$		
f	0	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \,\|+\infty$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Graficul lui f este reprezentat în fig. 53.

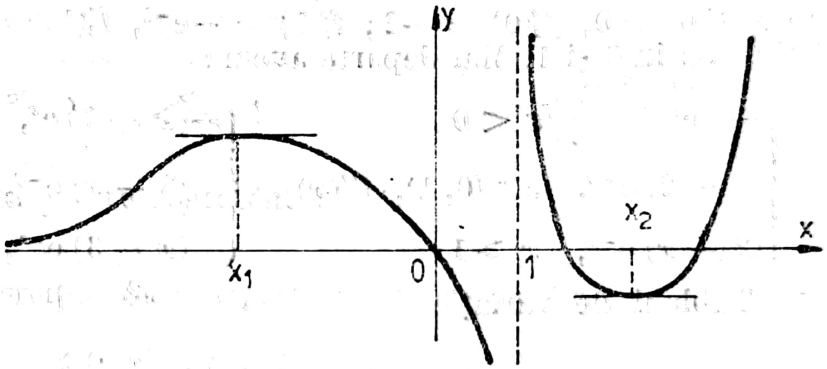


Fig. 53

Numărul soluțiilor ecuației $x - \lambda(x-1)\,e^x = 0$ este același cu al ecuației $f(x) = \lambda$, deci cum

$$f(x_1) = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\, e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})} > 0 > f(x_2) = \frac{-1+\sqrt{5}}{-3+\sqrt{5}}\, e^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})},$$

rezultă că ecuația dată are : 2 soluții reale dacă $\lambda \geqslant f(x_1)$; 3 soluții reale dacă $\lambda = f(x_1)$; 4 soluții reale dacă $0 < \lambda < f(x_1)$; 3 soluții reale dacă $f(x_2) < \lambda \leqslant 0$; 2 soluții reale dacă $\lambda = f(x_2)$ și o soluție reală dacă $\lambda < f(x_2)$.

7.3.29. Exercițiu. *Să se reprezinte grafic funcția* $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ *definită astfel* $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

Soluție. Evident f este indefinit derivabilă. Cum $\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln x$, avem

$$f'(x) = f(x)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\ln a\right) = x^{\frac{1}{x}}(1 - \ln x)\frac{1}{x^2},$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^0 = 1,$$

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} e^{\frac{1}{x}\ln x} = 0, \text{ deoarece } \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} \ln x = -\infty.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul de variație

x	0		e		∞
f'	$+$	$+$ $+$	0	$-$ $-$	$-$
f	0	$\nearrow$	$e^{1/e}$	$\searrow$	1

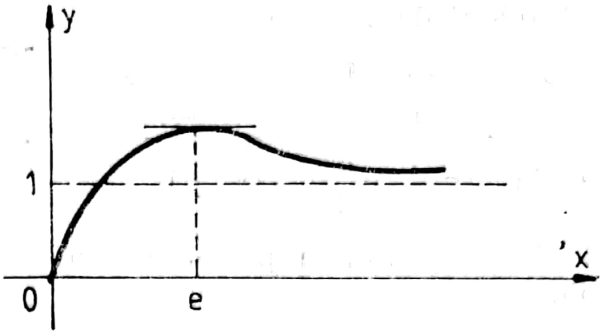


Fig. 54

Graficul lui f este reprezentat în fig. 54.

Corolar 1. *Şirul* $(\sqrt[n]{n})_{n\geq 3}$ *este strict descrescător şi are limita* 1.

Corolar 2.

$$e^{-\frac{1}{e}} < 1 \quad (\textit{se arată că } e^{-\frac{1}{e}} = 0{,}692\ldots)$$

Corolar 3.

$$(\forall)\ n, m \geq 1 \textit{ avem } \min\{\sqrt[n]{m}, \sqrt[m]{n}\} \leq \sqrt[3]{3}$$

Soluție. Evident avem $\sup\limits_{n\geq 1} f(n) = \max\{f(2), f(3)\}$. Cum $3^2 > 2^3$, rezultă că $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$, deci $f(3) > f(2)$ şi deci $\sqrt[n]{n} = f(n) \leq f(3) = \sqrt[3]{3}$, $(\forall)\ n \geq 1$. Dacă $m \geq n$, atunci $\sqrt[m]{n} \leq \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$, deci

$$\min\{\sqrt[n]{m}, \sqrt[m]{n}\} \leq \sqrt[3]{3},\ (\forall)\ n, m \geq 1$$

7.3.30. Exercițiu. *Să se reprezinte grafic funcția* $f: \mathbf{R}\setminus(-1,1) \to \mathbf{R}$ *definită astfel* $f(x) = \arcsin\dfrac{1}{x}$.

Soluție. Evident f este indefinit derivabilă pe $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ şi avem :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}},\ (\forall)\ x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

Deoarece $\lim\limits_{x\nearrow -1} f'(x) = \lim\limits_{x\searrow -1} f'(x) = -\infty$, rezultă (T.6.5.8.) că $f'_s(-1) = f'_d(1) = -\infty$.

Cum $f(-x) = -f(x)$, $(\forall)\ x \in D_f$, deducem că f este impară.

Tabloul de variaţie

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
f'	$\|$	$-$ $-$ $-$	$-\infty$	$-\infty$	$-$ $-$	$-\|$
f	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

Graficul lui f este reprezentat în fig. 55.

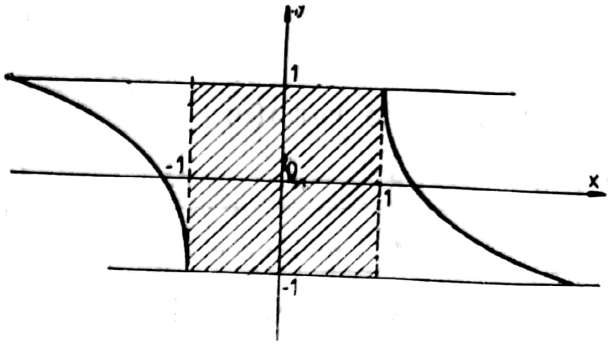


Fig. 55

7.3.31. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f : \mathbf{R} \to [0, \pi)$ *definită astfel* $f(x) = \arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

Soluţie. Deoarece f este pară este suficient să reprezentăm grafic funcţia $g = f|_{[0,\infty)}$. Cum funcţia $x \mapsto \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$, $x \in \mathbf{R}$, este strict crescătoare şi arc cos este strict descrescătoare rezultă că g este strict descrescătoare, deci injectivă. Din relaţia $y = \arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$, determinăm univoc pe x în $[0, \infty)$, ca funcţie de y, pentru orice y din $[0, \pi]$ şi anume $x = \operatorname{tg} \dfrac{y}{2}$. Aşadar g este inversabilă şi avem $g^{-1}(y) = \operatorname{tg} \dfrac{y}{2}$, $y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Cunoscînd reprezentarea grafică a lui g^{-1} deducem reprezentarea grafică a lui g deci şi a lui f(fig. 56).

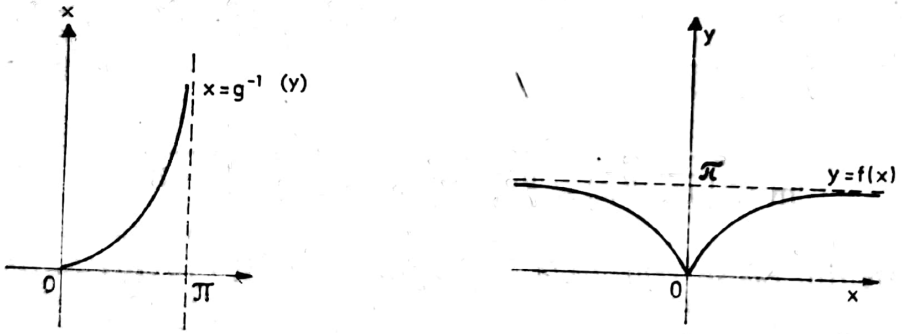


Fig. 56

7.3.32 Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$ *definită astfel* $f(x) = 2^{\operatorname{tg} x}$, *dacă* $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *şi* $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Soluţie. Funcţia f este derivabilă pe $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi avem :

$$f'(x) = \frac{\ln 2}{\cos^2 x} 2^{\operatorname{tg} x}, \quad (\forall)\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece

$$\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} 2^{\operatorname{tg} x} = \lim_{t \searrow -\infty} 2^t = 0 = f(0),$$

rezultă că f este continuă în 0.

Analog se deduce că

$$\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} f'(x) = \lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\ln 2}{\cos^2 x} 2^{\operatorname{tg} x} = 0, \text{ deci } f'_d\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Tabloul de variaţie

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
f'	0	$+$	$+$	$+$	$\|$
f	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞

Graficul lui f este reprezentat în fig. 57

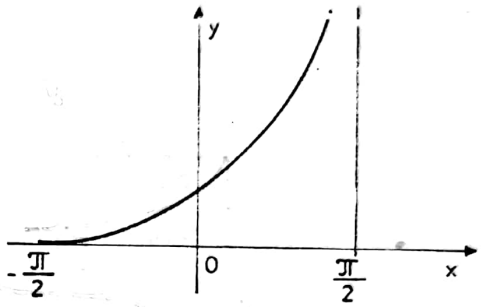


Fig. 57

7.3.33. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* : $f(x) = \cos x$, *dacă* $x \geqslant 0$ *şi* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *dacă* $x < 0$. *Să se determine numerele reale* a, b, c *a.î.* f *să fie continuă şi derivabilă în* $x = 0$, *apoi să se reprezinte grafic.*

Soluţie. Funcţia f este derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ şi avem (P. 6.1.5.) :

$$f'(x) = -\sin x, \text{ dacă } x > 0 \text{ şi } f'(x) = 2ax + b, \text{ dacă } x < 0$$

Cum $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} \cos x = 1$ rezultă că $f(0+) = 1$.

De asemenea $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} (ax^2 + bx + c) = c$, deci $f(0-) = c$.

Condiţia de continuitate în 0 se scrie : $f(0-) = f(0) = f(0+)$, de unde rezultă $c = 1$.

$$\lim_{x \searrow 0} f'(x) = 0 \text{ şi } \lim_{x \nearrow 0} f'(0) = b, \text{ deci } f'_d(0) = 0 \text{ şi } f'_d(0) = b.$$

Condiţia de derivabilitate în 0 se scrie : $f'(0) = f'_d(0)$, de unde rezultă $b = 0$.

Graficul lui f este reprezentat în fig. 58.

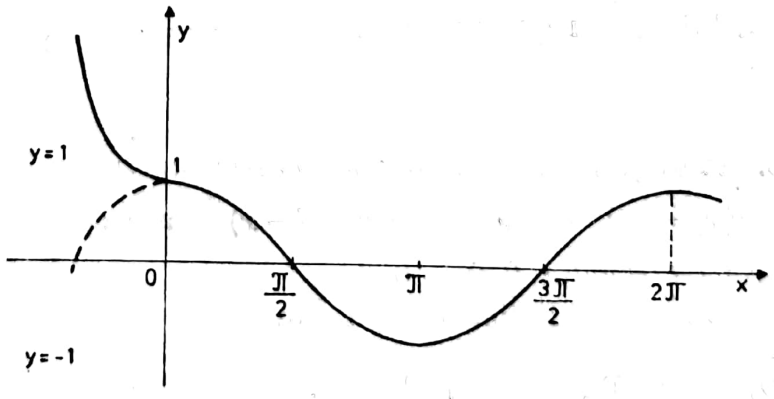


Fig. 58

7.3.34. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ *definită astfel* : $f(x)=(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2$.

Soluţie. Evident f este continuă pe $[-1,1]$ şi derivabilă pe $(-1,1)$ şi avem $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}(\arcsin x-\arccos x)$, $(\forall)\ x\in(-1,1)$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \arcsin x-\arccos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Acest lucru se observă uşor considerînd graficele funcţiilor arcsin şi arccos (fig. 59)

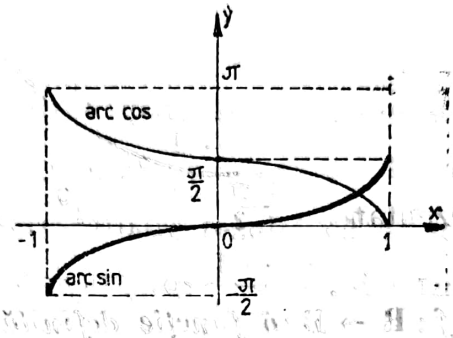


Fig. 59

Evident $\lim\limits_{x\searrow -1} f'(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\nearrow 1} f'(x)=+\infty$, deci $f'_d(-1)=-\infty$ şi $f'_s(1)=+\infty$.

Prin urmare graficul lui f este tangent dreptei $x=-1$ în punctul $\left(-1,\dfrac{5\pi^2}{4}\right)$ şi dreptei $x=1$ în punctul $\left(1,\dfrac{\pi^2}{4}\right)$

Tabloul de variaţie

x	-1		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	∞
$f(x)$	$\frac{5\pi^2}{4}$	$\searrow$	$\frac{\pi^2}{4}$	$\searrow$	$\frac{\pi^2}{8}$	$\nearrow$	$\frac{\pi^2}{4}$

Graficul lui este reprezentat în fig. 60.

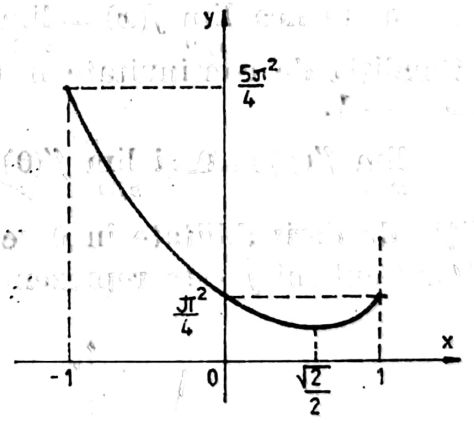


Fig. 60

7.3.35. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţia*

$$f(x)=\arccos x-\arccos(-x)+\arccos(1-x),$$

apoi să se rezolve ecuaţia $f(x)=0$.

Soluţie. Domeniul de definiţie al funcţiei f

$$D_f=\{x\in\mathbf{R};\ |x|\leqslant 1,\ |-x|\leqslant 1,\ |1-x|\leqslant 1\}=[0,1].$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum arc cos x + arc cos $(-x) = \pi$, rezultă că

$$f(x) = 2 \text{ arc cos } x + \text{arc cos } (1 - x) - \pi, \ (\forall)\ x \in [0, 1].$$

Evident f este indefinit derivabilă pe $(0, 1)$ și avem :

$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - x)^2}}, \ (\forall)\ x \in (0, 1)$$

Se vede imediat că $f'(x) = 0 \ \wedge\ x \in (0, 1) \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{3}(4 - \sqrt{13}) \approx 0{,}1314.$

Cum $\lim\limits_{x \searrow 0} f'(x) = \infty$ și $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = -\infty$, deducem că $f'_d(0) = \infty$ și $f'_s(1) = -\infty$.

Tabloul de variație

x	0		$0{,}1314$		1
$f'(x)$	∞	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

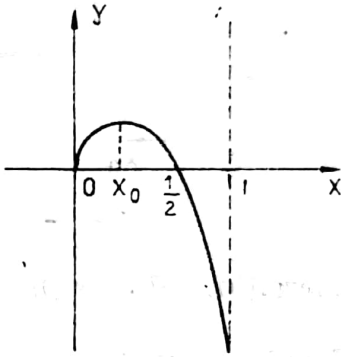


Fig. 61

Graficul lui f este reprezentat în fig. 61.

Ecuația $f(x) = 0$ admite exact două soluții o și a unde a se deduce din relația

$$\sin f(x) = \sin [2 \text{ arc cos } x + \text{arc cos}(1 - x)] = 0,$$

de unde se obține imediat $a = \frac{1}{2}$.

7.3.36. Exercițiu. *Să se reprezinte grafic funcția* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită astfel* $f(x) = |x| + |\sin x|$.

Soluție. Avem $f(-x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deci graficul lui f este simetric în raport cu axa oy.

Deoarece $f(x + 2n\pi) = 2n\pi + f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+ \wedge n \in \mathbf{N}$, este suficient să cunoaștem graficul lui f pe $[0, 2\pi]$. Este clar că :

$$f(x) = \begin{cases} x + \sin x, & x \in [0, \pi] \\ x - \sin x, & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Funcția $g = f|_{[0,2\pi]}$ este continuă pe $[0,2\pi]$ indefinit derivabilă pe $[0, \pi) \cup (\pi, 2\pi]$ și avem :

$$g'(x) = \begin{cases} 1 + \cos x, & x \in [0, \pi) \\ 1 - \cos x, & x \in (\pi, 2\pi], \end{cases} \quad g''(x) = \begin{cases} -\sin x, & x \in [0, \pi) \\ \sin x, & x \in (\pi, 2\pi)], \end{cases}$$

$$f'_d(0) = g'(0) = 2, \ g'_s(\pi) = 0, \ g'_d(\pi) = 2, \ f'(2\pi) = g'(2\pi) = 0.$$

Tabloul de variație

x	0			π			2π
g'	2	$+$	$+$		$+$	$+$	0
g''	0	$-$	$-$		$-$	$-$	0
g	0	↗		π	↗		2

Graficele funcțiilor g și f sînt reprezentate în fig. 62

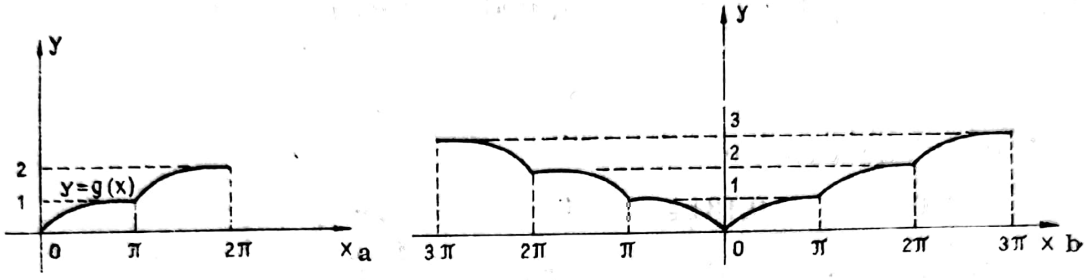


Fig. 62

7.3.37. Exercițiu. *Să se reprezinte grafic funcția* $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită astfel:* $f(x) = e^{-\sin x}|\sin x|$.

Soluție. Evident funcția $x \mapsto |\sin x|$, $x \in \mathbf{R}$ este continuă pe $\mathbf{R}$, derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$, iar în punctele de forma $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ admite derivate laterale nenule și de semne contrarii, deci nu este derivabilă. Cum funcția $x \mapsto e^{-\sin x}$ $x \in \mathbf{R}$, este derivabilă și pozitivă, rezultă că f este continuă pe $\mathbf{R}$, derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$, admite derivate laterale, însă nu este derivabilă în punctele de forma $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Deoarece $f(x + 2\pi) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, rămîne să detaliem cele spuse mai sus numai pe intervalul $[0, 2\pi]$. Cum avem

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\sin x} \sin x, & x \in [0, \pi] \\ -e^{-\sin x} \sin x, & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases},$$

rezultă

$$f'(x) = e^{-\sin x} \cos x \begin{cases} 1 - \sin x, & x \in (0, \pi) \\ -1 + \sin x, & x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Evident $\lim\limits_{x \searrow 0} f'(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} e^{-\sin x} \cos x\,(1 - \sin x) = 1$ și analog $\lim\limits_{x \nearrow \pi} f'(x) = -1$, $\lim\limits_{x \searrow \pi} f'(x) = 1$. Prin urmare avem

$$f'_d(0) = 0,\ f'_s(\pi) = -1,\ f'_d(\pi) = 1 \quad f'_s(k\pi) = -f'_d(k\pi) = -1 \ (k \in \mathbf{Z})$$

$$f'(x) = 0 \wedge x \in (0, \pi) \Leftrightarrow 1 - \sin x = 0 \wedge x \in (0, \pi) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = 0 \wedge x \in (\pi, 2\pi) \Leftrightarrow -1 + \sin x = 0 \wedge x \in (\pi, 2\pi) \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

Graficele funcțiilor g și f sînt reprezentate în fig. 62.

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul de variație

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
f'	|	$+$	0	$-$	|	$+$	0	$-$	|
f	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Graficul lui f este reprezentat în fig. 63.

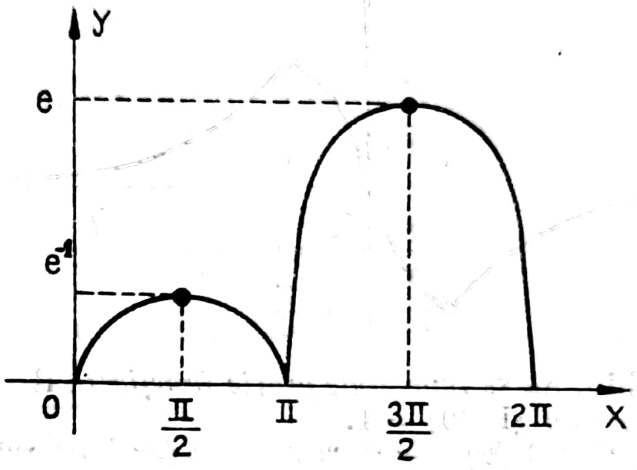


Fig. 63

7.3.38. Exercițiu. *Să se reprezinte grafic funcția* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită astfel:* $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Soluție. Deoarece $(|x| - 1)^2 \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, avem $\dfrac{2|x|}{1+x^2} \leqslant 1$, deci $-1 \leqslant \dfrac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Cum $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, definiția lui f are sens. Evident avem:

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|}, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\},$$

deci

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{1+x^2}, & |x| > 1 \\ \dfrac{2}{1+x^2}, & |x| < 1 \end{cases}, \quad f''(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{(1+x^2)^2}, & |x| > 1 \\ \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}, & |x| < 1 \end{cases}$$

Deoarece $\lim\limits_{x \nearrow 1} f'(x) = \lim\limits_{x \nearrow 1} \dfrac{2}{1+x^2} = 1$, $\lim\limits_{x \searrow 1} f'(x) = \lim\limits_{x \searrow 1} \dfrac{-2}{1+x^2} = -1$, rezultă (T.6.3.8. Cor. 1) că $f'_s(1) = -1$ și $f'_d(1) = -1$, deci $f'(1) = -1$.

Deoarece $f(-x) = -f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, este suficient să studiem f pe intervalul $[0, \infty)$.

Tablou de variaţie pentru $f|_{[0,\infty]}$

x	0		1		$+\infty$
f'	2 $+$	$+$	$\|$	$-$	$-$
f''	$-$	$-$	$\|$	$+$	$+$
f	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

Graficul lui f este reprezentat în fig 64.

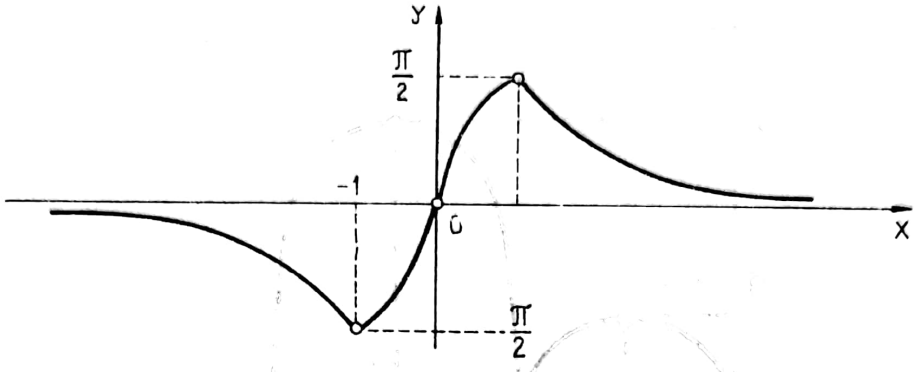


Fig. 64

7.3.39. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită astfel:* $f(x) = (x^2)^x$, *dacă* $x \neq 0$ *şi* $f(0) = 1$.

Soluţie. Cum $x^2 > 0$ $(\forall)$ $x \neq 0$, rezultă că $(x^2)^x$ are sens, deci f este bine definită. Evident avem $f(x) = e^{x \ln x^2} = e^{2x \ln |x|}$, $(\forall)$ $x \neq 0$.

Însă $\lim\limits_{x \searrow 0} x \ln x = 0$, deci $\lim\limits_{x \nearrow 0} x \ln |x| = \lim\limits_{t \searrow 0} (-t \ln t) = 0$ şi deci $\lim\limits_{x \to 0} x \ln |x| = 0$.

La fel se deduce că $\lim\limits_{x \nearrow 0} x \ln |x| = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln |x| = -\infty$

Prin urmare $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x \ln |x|} = e^0 = 1 = f(1)$, deci f continuă în 0 şi de asemenea $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, deci axa ox este asimptotă la $-\infty$.

Evident f este derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ şi avem:

$$f'(x) = [2 + \ln(x^2)^x](x^2)^x, \quad (\forall)\ x \neq 0, \text{ deci } \lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty,$$

de unde deducem că graficul lui f este tangent axei oy în punctul $(0,1)$.

Dacă $f'(x) = 0$, atunci $2 + 2 \ln |x| = 0$, deci $x = \pm e^{-1}$.

Tabloul de variaţie

x	$-\infty$		$-e^{-1}$		0		e^{-1}		∞
f'	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$
f	0	$\nearrow$	$\sqrt[e]{e^2}$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\sqrt[e]{e^{-2}}$	$\nearrow$	∞

Graficul lui f este reprezentat în fig. 65

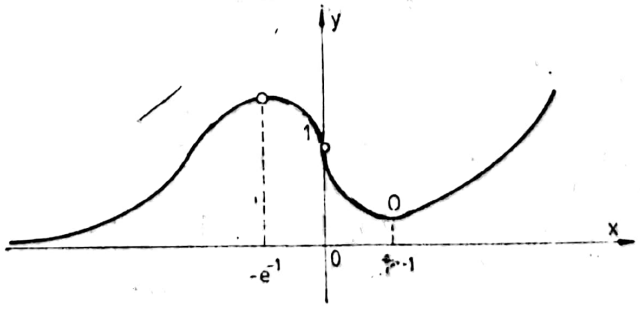


Fig. 65

7.3.40. Exerciţiu *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită astfel* $f(x) = a^x$ $(a > 0)$. *Să se reprezinte grafic* f *şi să se afle numărul de soluţii reale ale ecuaţiei* $a^x = x$. *Discuţie.*

Soluţie. Funcţia f este reprezentată grafic în fig. 66.

Dacă $0 < a < 1$, atunci ecuaţia $a^x = x$ admite o singură soluţie reală.

Fie $1 < a < \infty$ şi $\varphi(x) = a^x - x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Atunci φ derivabilă şi avem $\varphi'(x) = a^x \ln a - 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deci $\varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\dfrac{\ln^2 a}{\ln a}$. Evident avem $\varphi(x_0) = a^{-\frac{\ln^2 a}{\ln a}} + \dfrac{\ln^2 a}{\ln a}$. Deoarece

$$a^{-\frac{\ln^2 a}{\ln a}} = e^{-\frac{\ln^2 a}{\ln a}\cdot \ln a} = \frac{1}{e^{\ln(\ln a)}} = \frac{1}{\ln a},$$

rezultă

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{\ln a} + \frac{\ln^2 a}{\ln a} = \frac{\ln e + \ln^2 a}{\ln a} = \frac{\ln(e \ln a)}{\ln a}$$

Obţinem astfel următorul tablou de variaţie pentru φ :

x	$-\infty$		0		x_0		∞
$\varphi'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\dfrac{\ln(e \ln a)}{\ln a}$	$\nearrow$	∞

Aşadar x_0 este singurul punct de minim pentru φ şi prin urmare ecuaţia

$$\varphi(x = a^x - x = 0 \text{ admite } \begin{cases} 2 \text{ soluţii reale} \\ 1 \text{ soluţie reală} \\ \text{nici o soluţie reală} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x_0) \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(e \ln a)}{\ln a} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0 \Leftrightarrow a = e^{1/e}$$

Cele trei situaţii sînt reprezentate grafic în fig. 67

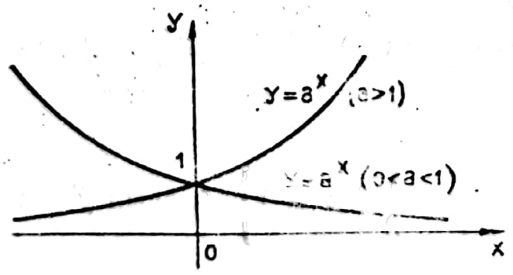


Fig. 66

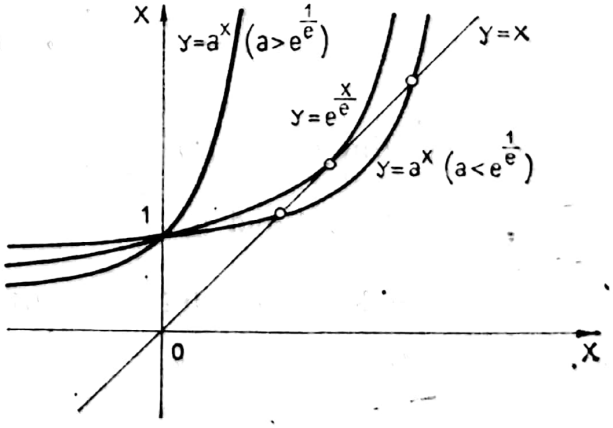


Fig. 67

7.3.41. Exerciţiu. *Fie* $\{x\}$ *distanţa de la* x *la cel mai apropiat întreg şi,* $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ *definită astfel* $f(x)=\dfrac{\{x\}}{x}$, *dacă* $x>0$ *şi* $f(0)=1$. *Să se studieze punctele de continuitate şi derivabilitate şi să se traseze graficul lui* f.

Soluţie. Dacă $x>0$, avem :

$$\{x\}=\begin{cases} x-n, & x\in\left[n,\, n+\dfrac{1}{2}\right] \\ n+1-x, & x\in\left[n+\dfrac{1}{2},\, n+1\right] \end{cases}$$

$$\frac{\{x\}}{x}=\begin{cases} 1-\dfrac{n}{x}, & x\in\left[n,\, n+\dfrac{1}{2}\right] \\ -1+\dfrac{n+1}{x}, & x\in\left[n+\dfrac{1}{2},\, n+1\right] \end{cases}$$

De asemenea avem $f(x)=\begin{cases} 1, & (\forall)\ x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right] \\ -1+\dfrac{2}{x} & (\forall)\ x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right] \end{cases}$

Prin urmare f este continuă şi derivabilă în fiecare punct x din mulţimea, $\left(n, n+\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(n+\dfrac{1}{2},\, n+1\right)$, $(\forall)\ n\geqslant 0$ şi avem :

$$f'(x)=\begin{cases} 0, & (\forall)\ x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right) \\ -\dfrac{2}{x^2}, & (\forall)\ x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right) \\ \dfrac{n}{x^2}, & (\forall)\ x\in\left(n,\, n+\dfrac{1}{2}\right) \\ -\dfrac{n+1}{x^2}, & (\forall)\ x\in\left(n+\dfrac{1}{2},\, n+1\right), \end{cases}$$

unde $n\geqslant 1$.

Evident $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=f(0)=1$, deci f continuă în 0 şi avem $f'_d(0)=0$. De asemenea f continuă în $\dfrac{1}{2}$.

În punctele x aparţinînd mulţimii $\left\{n,\, n+\dfrac{1}{2}\,\middle|\, n\geqslant 1\right\}$ funcţia f este continuă. Într-adevăr avem :

$$\lim_{x\nearrow n} f(x)=\lim_{x\nearrow n}\left[-1+\frac{(n-1)+1}{x}\right]=0,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{x \searrow n} f(x) = \lim_{x \searrow n} \left(1 - \frac{n}{x}\right) = 0 = f(n),$$

deci f continuă în punctul $x = n$. Analog avem

$$\lim_{x \nearrow n+1/2} f(x) = \lim_{x \nearrow n+1/2} \left(1 - \frac{n}{x}\right) = \frac{1}{2n+1},$$

$$\lim_{x \searrow n+1/2} f(x) = \lim_{x \searrow n+1/2} \left(-1 + \frac{n+1}{x}\right) = \frac{1}{2n+1}$$

și $f\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2n+1}$, deci f continuă în $n + \frac{1}{2}$.

În punctele x aparținînd mulțimii $\left\{n,\ n + \frac{1}{2};\ n \geqslant 1\right\}$ sau $x = \frac{1}{2}$, funcția f nu este derivabilă însă admite derivate laterale finite.

Într-adevăr avem :

$$f'_s(n) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(n+h) - f(n)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{-1 + \frac{(n-1)+1}{n+h}}{h} = -\frac{1}{n};$$

$$f'_d(n) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(n+h) - f(n)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{1 - \frac{n}{n+h}}{h} = \frac{1}{n},$$

deci f nu este derivabilă în n.

Analog se deduce că $f'_s\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}$, $f'_d\left(n + \frac{1}{2}\right) =$

$= -\frac{n+1}{(n+1)^2}$, deci f nu este derivabilă nici în $n + \frac{1}{2}$.

De asemenea avem $f'_s\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $f'_d\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1 + \frac{1}{2}}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{2}{3}$,

deci f nu este derivabilă în $\frac{1}{2}$.

Evident $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2x}$, $(\forall)\ x \geqslant 1$, deci $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Graficul lui f este reprezentat în fig. 68.

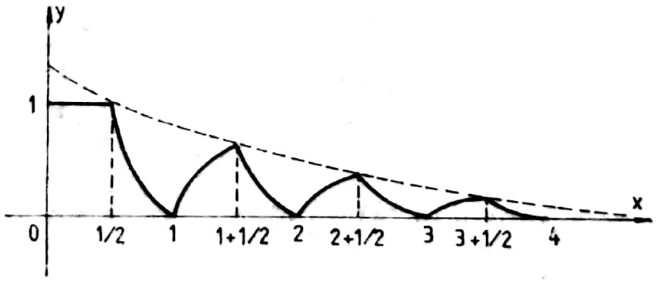


Fig. 68

Observație. Se poate arăta că $\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \infty$.

7.3.42. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = x \ln |x|$, *dacă* $x \neq 0$ *şi* $f(0) = 0$. *Să se reprezinte* f *grafic apoi să se determine numărul rădăcinilor ecuației* $x \ln |x| - \lambda x = 0$, *cu* λ *parametru real.*

Ind. f este impară. Este suficient să reprezentăm funcția $g = f|_{[0,\infty)}$. Evident g este continuă pe $[0, \infty)$, derivabilă pe $(0, \infty)$ şi $g'_d(0) = -\infty$ (fig. 69).

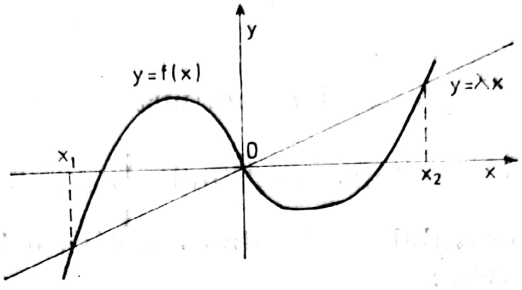
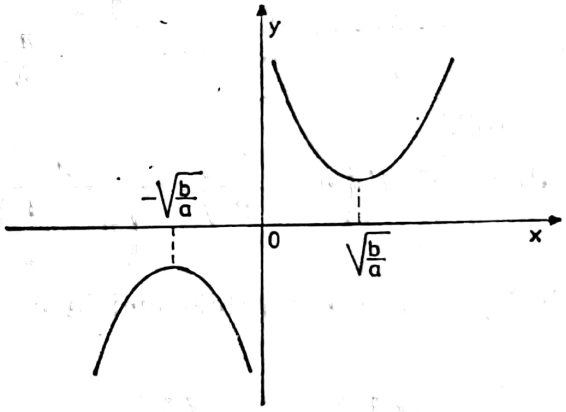


Fig. 69

7.3.43. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcția* $f(x) = ax + \frac{b}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$ *cu* $a, b \in \mathbf{R}_+$.

Ind. Graficul lui f este reprezentat în fig. 70.



7.3.44. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcția* $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, $(ad - bc \neq 0)$,

Ind. Avem $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{cx + d}$ Graficul lui f este reprezentat în fig. 71.

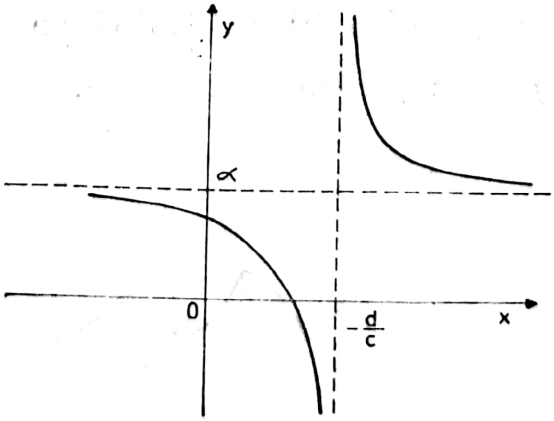


Fig. 71

Scanned with OKEN Scanner

7.3.45. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţiile :*

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q} \ (a \text{ şi } p \neq 0); \quad g(x) = \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} \ (a \text{ şi } p \neq 0).$$

Ind. Avem $f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma}{px + q}$ Graficul lui f este reprezentat în fig. 72

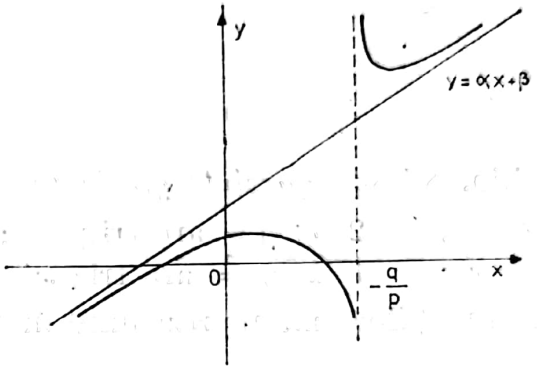
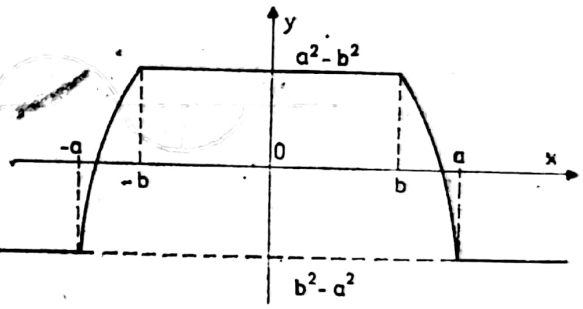


Fig. 72

7.3.46. Exerciţiu. *Să se repre inte grafic funcţia* $f(x) = |x^2 - a^2| - |x^2 - b^2|$ $x \in \mathbf{R}$ $(a > b > 0)$.

Ind. Evident avem :

$$f(x) = \begin{cases} b^2 - a^2, & |x| \geq a \\ a^2 - b^2, & |x| \leq b \\ a^2 + b^2 - 2x^2, & b < |x| < a, \end{cases}$$



Graficul lui f es te reprezentat în fig. 73

7.3.47. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel :*

$$f(x) = (-1)^{[x]}\left(x - p\left[\frac{x}{p}\right] - 1\right) + 1; \quad (p \in \mathbf{N} \text{ parametru})$$

Să se arate că f este periodică apoi să se reprezinte grafic.

Ind. Evident avem :

$$f(x + p) = (-1)^{[x+p]}\left(x + p - p\left[\frac{x}{p} + 1\right] - 1\right) + 1 = f(x), \ (\forall) \ x \in \mathbf{R}.$$

Este suficient să reprezentăm f pe intervalul $[0, p]$.

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ , dacă } x \in [0,1) \cup [2,3) \cup \ldots \\ 2x, \quad \text{„} \quad x \in [1,2) \cup [3,5) \cup \ldots \end{cases}$$

7.3.48. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f(x) = \min\left\{x^3, \dfrac{1}{x}\right\}$, *dacă* $x \neq 0$ *şi* $f(0) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Graficul lui f este reprezentat în fig. 74.

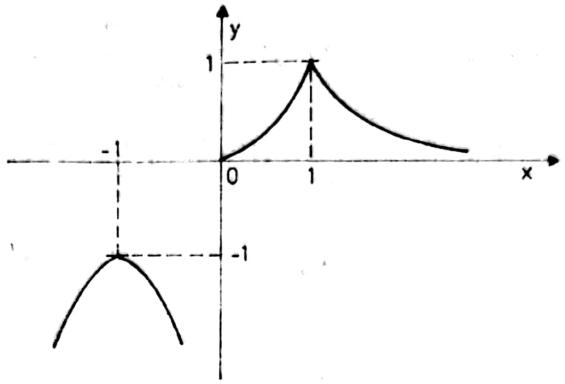


Fig. 74

7.3.49. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţiile :*

1° $f(x) = \text{trig } |x|$; 2° $g(x) = \text{arc trig } |x|$;

3° $h(x) = |\text{trig } x|$; 4° $k(x) = |\text{arc trig } x|$,

Ind. Graficele funcţiilor sînt reprezentate în fig. 75.

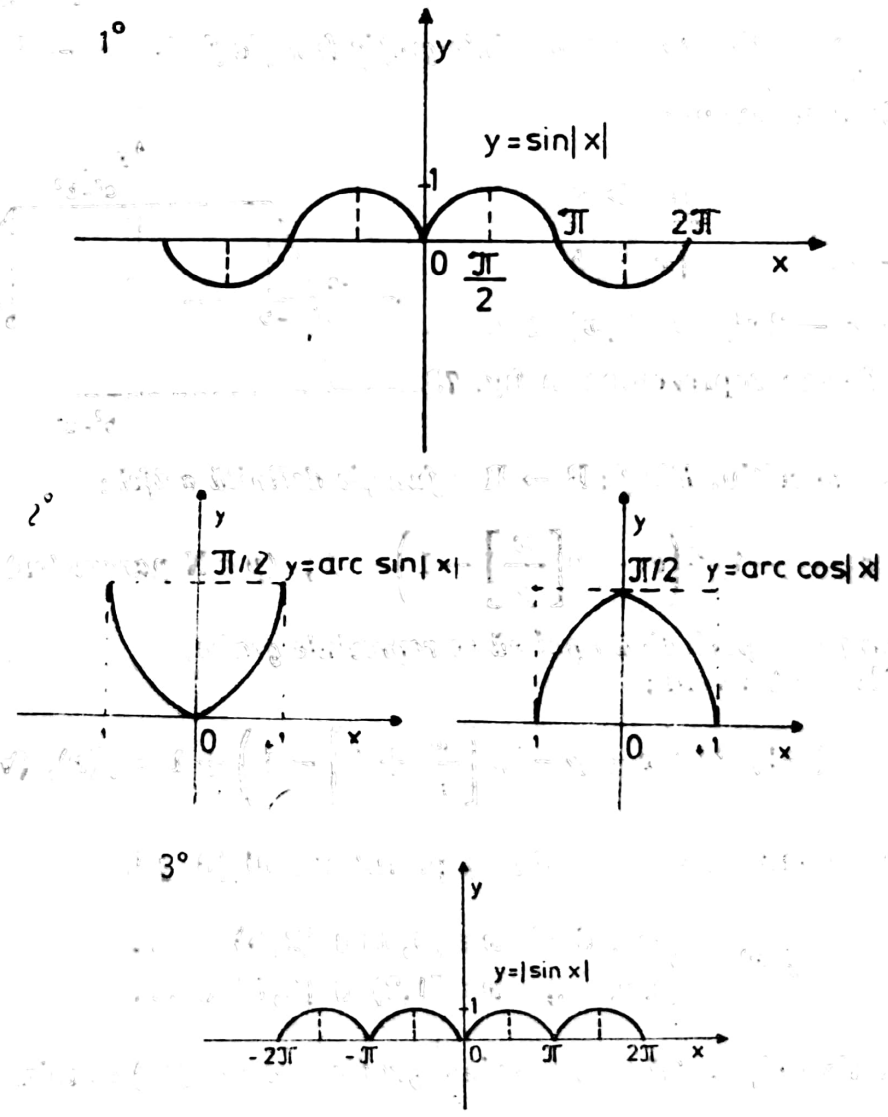


Fig. 75

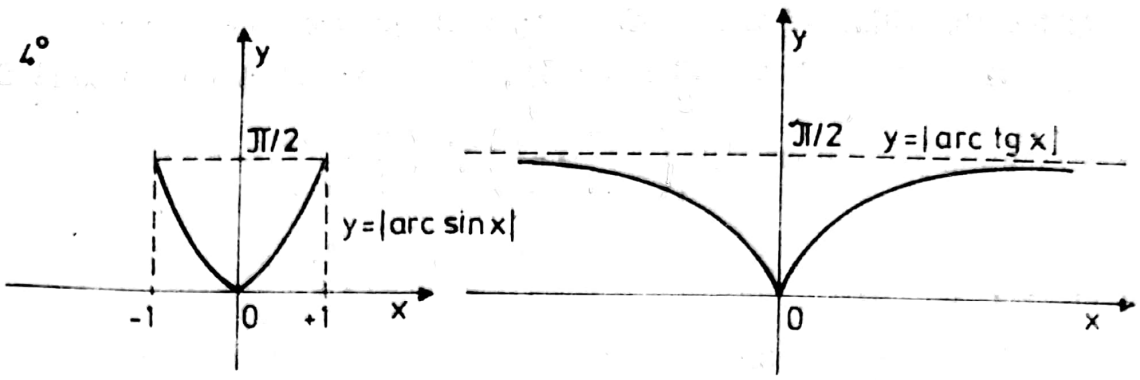


Fig. 75 (continuare)

7.3.50 Exercițiu. *Să se reprezinte grafic funcțiile*: $f(x) = \arcsin(\sin x)$, $x \in \mathbf{R}$; $g(x) = \arccos(\cos x)$, $x \in \mathbf{R}$; $h(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Ind. Graficele funcțiilor f și h sînt reprezentate în fig. 76.

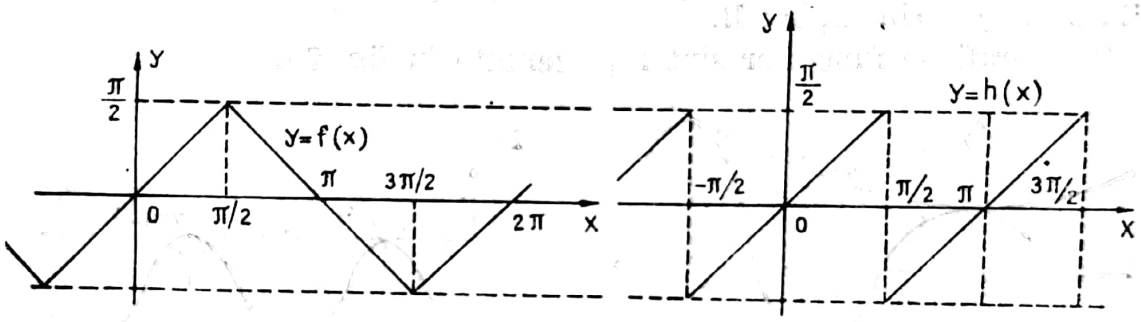


Fig. 76

7.3.51. Exercițiu. *Să se reprezinte grafic funcția* $f(x) = \arcsin \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

Ind. $D_f = \mathbf{R}_+$; $f'(x) = \dfrac{1-x}{|1-x|(1+x)\sqrt{x}}$ $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$.

Tablou de variație

x	0		1		∞
f'	$\infty +$	$+$	$\frac{1}{2}$	$-$	$-\frac{1}{2}$ $-$
f	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

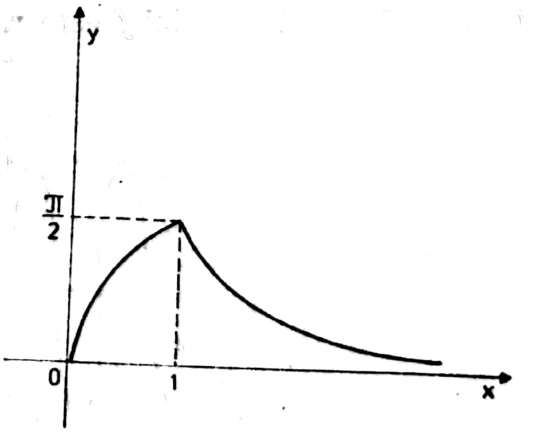


Fig. 77

Graficul lui f este reprezentat în fig. 77

7.3.52. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f(x) = \cos x \, e^{\operatorname{tg} x}$.

Ind. $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbf{Z}\right\}$; f este periodică de perioadă 2π.

Să reprezentăm f pe intervalele $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Tabloul de variaţie

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$
f'	|	$+$	$+$ |	$-$	$-$ |
f	|	$\nearrow \infty$	| $0 \searrow -\infty$ |		

Graficul lui f este reprezentat în fig. 78.

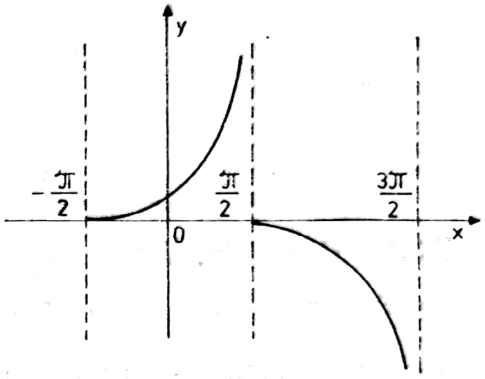


Fig. 78

7.3.53. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţiile*: 1° $f(x) = \operatorname{ch} x \cos x$, $x \in \mathbf{R}$; 2° $g(x) = \sin^2 x$, $x \in \mathbf{R}$.

Ind. Graficele funcţiilor sînt reprezentate în fig. 79.

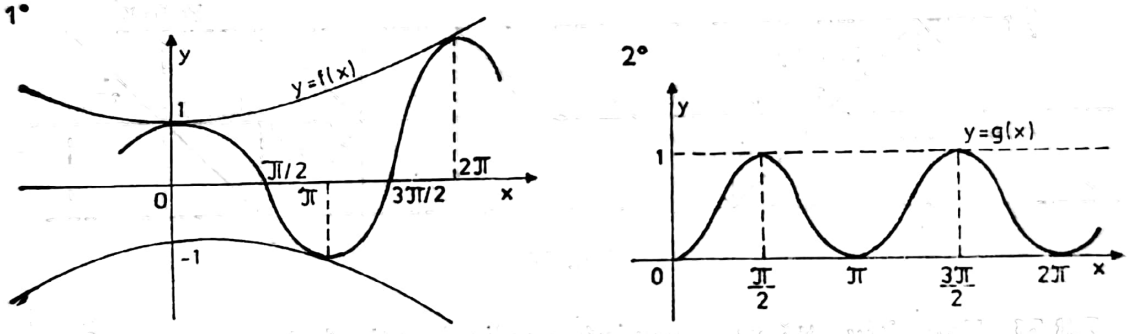


Fig. 79

7.3.54. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţiile*:

1° $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$, 2° $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$

Ind. 1° Graficul funcţiei f este reprezentat în fig. 80

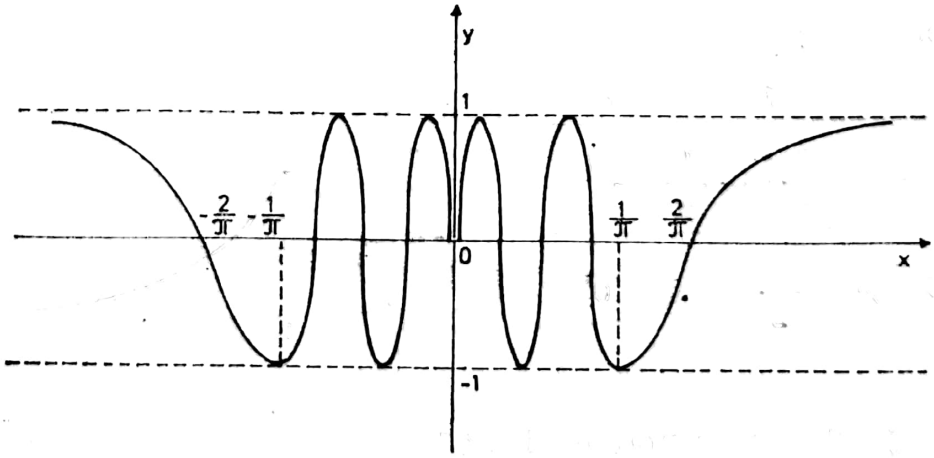


Fig. 80

7.3.55. Exerciţiu. *Să se repre inte grafic funcţiile :*

$1^\circ\ f(x) = x \operatorname{trig} x$; $2^\circ\ f(x) = \operatorname{trig} x^2$; $3^\circ\ f(x) = x\sqrt{|\sin x|}$, $x \in \mathbf{R}$;

$4^\circ\ f(x) = \sin x + \dfrac{1}{\sin x}$, $0 < |x| < \pi$; $5^\circ\ f(x) = \arcsin\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right)$;

$6^\circ\ f(x) = \arcsin \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$, $x \in \mathbf{R}$; $7^\circ\ f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$.

Ind. Graficele funcţiilor 2°, 4° şi 5° sînt reprezentate în fig. 81.

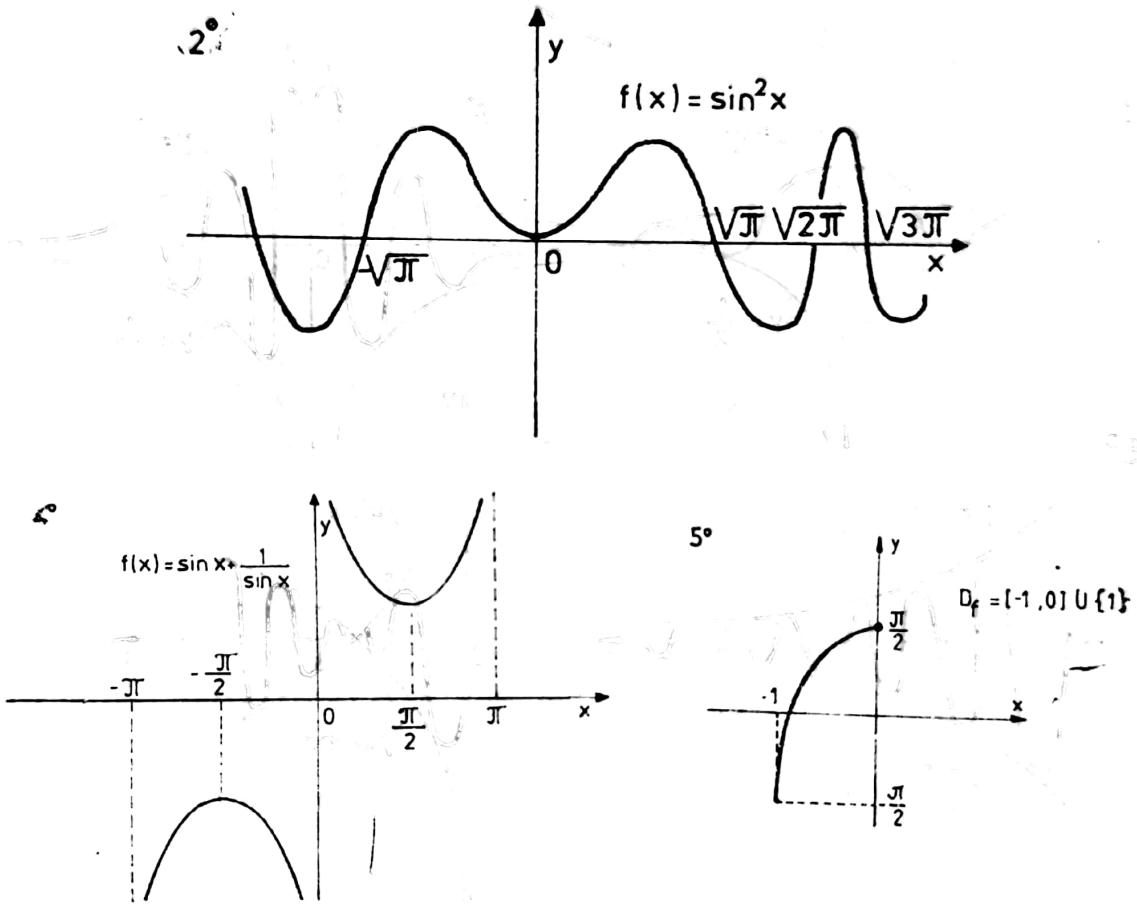


Fig. 81

7.3.56. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţiile :*

$$1^\circ\ f(x) = \begin{cases} x \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}; \quad 2^\circ\ f(x) = \begin{cases} x^p \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (p \in \mathbf{N});$$

$3^\circ\ f(x) = \dfrac{1}{x} \sin x$, $x \in \mathbf{R}^*$; $4^\circ\ f(x) = \dfrac{1}{x} \sin x$, $x \in \mathbf{R}^*$;

$5^\circ\ f(x) = e^{-x} \sin x$, $x \in \mathbf{R}$; $6^\circ\ f(x) = (\ln x) \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}_+^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Graficele funcţiilor sînt reprezentate în fig. 82.

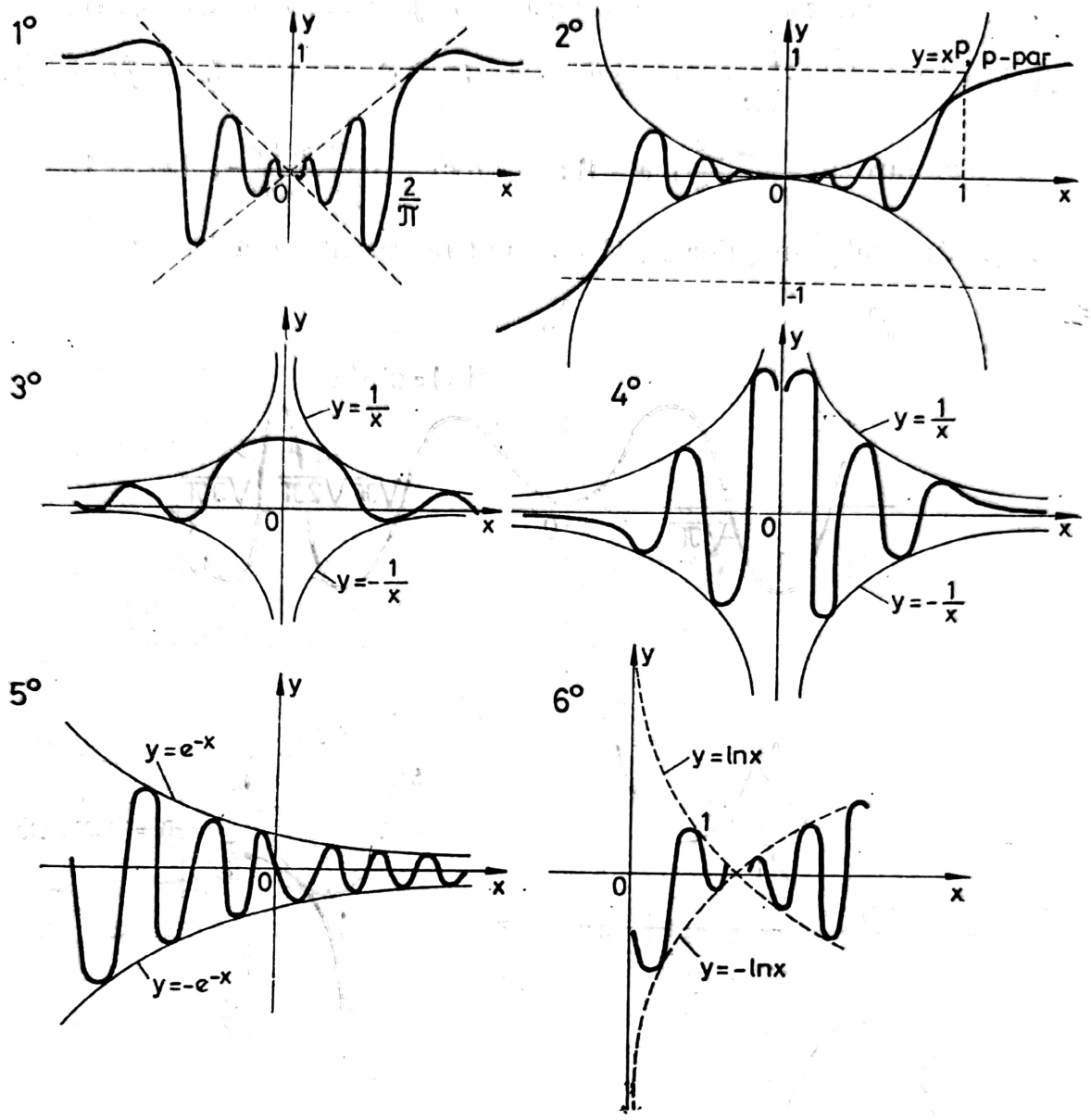


Fig. 82

7.3.57. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţiile:*

$1^\circ\ f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbf{R}$; $2^\circ\ f(x) = |x|\, e^{\frac{1}{x-1}}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$;

$3^\circ\ f(x) = \pm\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $x \in (-1, 1]$; $4^\circ\ f(x) = \sqrt{x - [x]} + [x]$, $x \in \mathbf{R}$.

Ind. Graficicele funcţiilor sînt reprezentate în fig. 83.

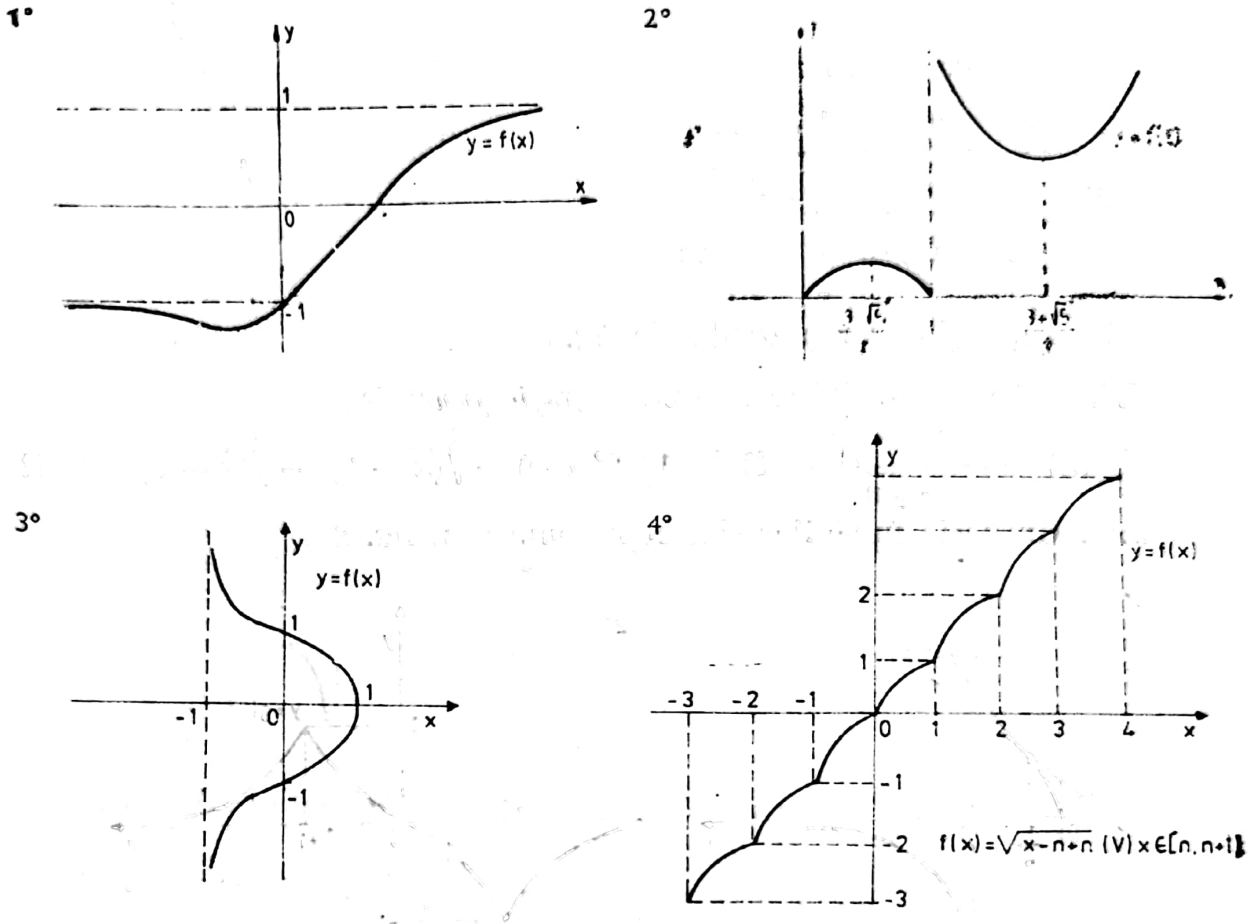


Fig. 83

7.3.58. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f(x) = x^x$.

Ind. $D_f = \mathbf{R}_+$; $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+$.

Tabloul de variaţie

x	0		e^{-1}		1		∞
f'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
f	1	$\searrow$	$0{,}36$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞

Graficul funcţiei f este reprezentat în fig. 84.

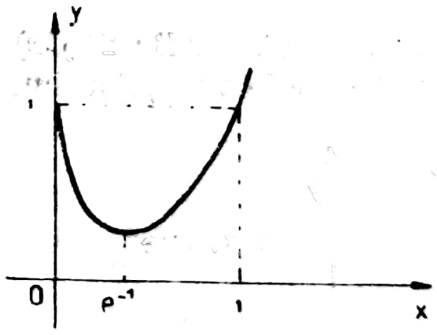


Fig. 84

7.3.59. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

Ind. $D_f = \mathbf{R}$; $f'(x) = -\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$ $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Asimptote: $m_{1,2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$; $n_{1,2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = 0$

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul de variaţie

x	$-\infty$		0		1		∞
f'		$-$	0	$-$	$-\infty$	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

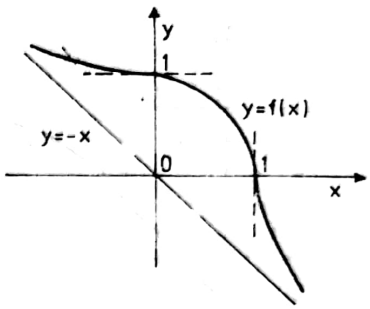


Fig. 85

Graficul funcţiei f este reprezentat în fig. 85.

7.3.60. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţiile:*

1° $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $x \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ 2° $g(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$, $x \in \mathbf{R}$.

Ind. Graficele funcţiilor sînt reprezentate în fig. 86.

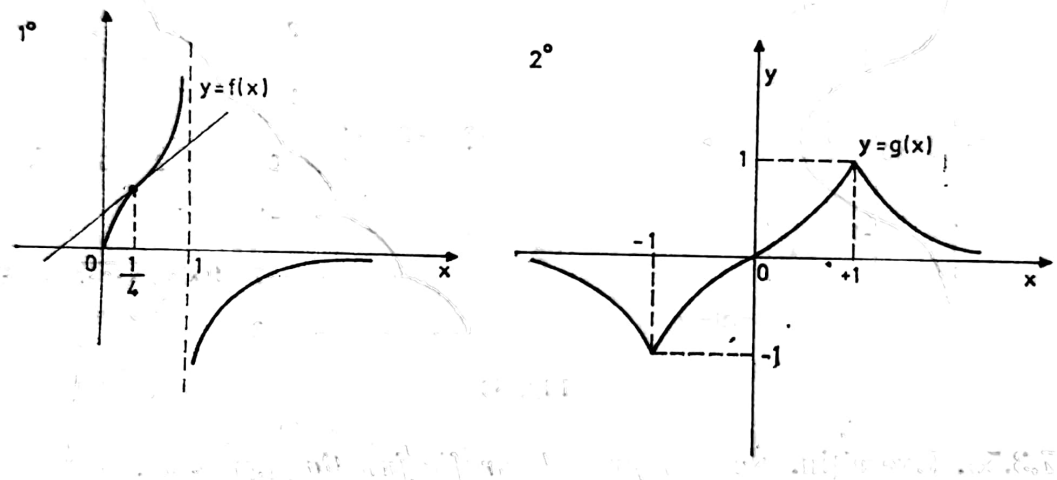


Fig. 86

7.3.61. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţiile:*

1° $f(x) = xe^x$, $x \in \mathbf{R}$; 2° $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $x \in (-1,0) \cup (0,\infty)$.

Ind. Graficele funcţiilor sînt reprezentate în fig. 87.

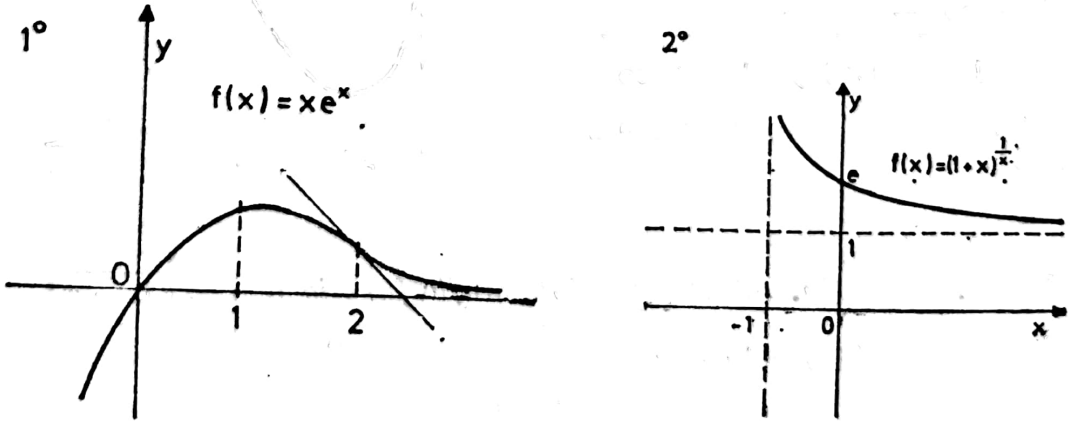


Fig. 87

Scanned with OKEN Scanner

7.3.62. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţiile :*

$1^\circ\ f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$; $2^\circ\ g(x) = \sqrt{\ln \dfrac{1}{|\sin x|}}$.

Ind. $1^\circ\ D_f = (0,1) \cup (1,\infty)$, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{(x \ln x)^2}$, $(\forall)\ x \in D_f$;

$2^\circ\ D_g = \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$, $g'(x) = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x \sqrt{\ln |\sin x|^{-1}}}$, $x \in D_g$,

Graficele funcţiilor sînt reprezentate în fig. 88.

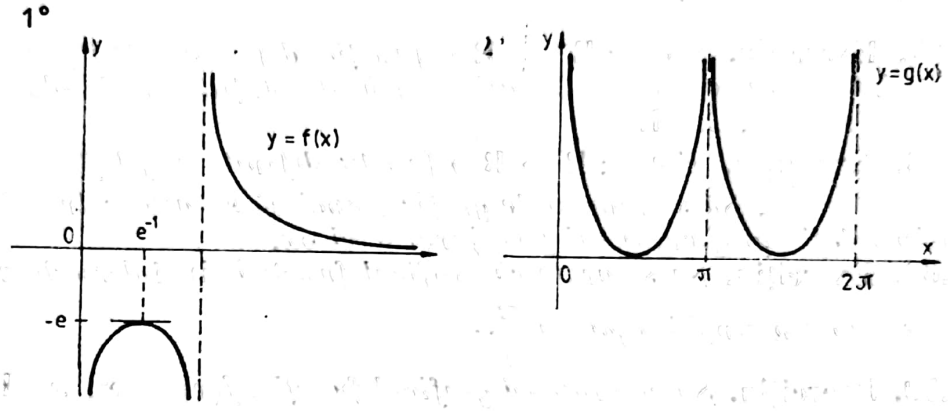


Fig. 88

7.3.63. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţiile*

$1^\circ\ f(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbf{R}$;

$2^\circ\ f(x) = e^{-x}\left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}\right)$, $x \in \mathbf{R}$;

$3^\circ\ f(x) = \ln(1 + \sin x)$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{(2k+1)\pi ; k \in \mathbf{Z}\}$;

$4^\circ\ f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{\ln x}}$, $x \in (1, \infty)$;

$5^\circ\ f(x) = \ln \dfrac{1 + x}{(1 - x)^2}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$;

$6^\circ\ f(x) = \dfrac{x + 1}{\ln |x|}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

7.3.64. Exerciţiu. *Să se reprezinte grafic funcţiile :*

$1^\circ\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x + a|}{x - a}, & x \in \mathbf{R} \setminus \{a\}; \\ 0, & x = a; \end{cases}$

$2^\circ\ f(x) = \left| x + \dfrac{2}{x - 2} \right|$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$;

$3^\circ\ f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $x \in \mathbf{R}_+$;

$4^\circ\ f(x) = |x - a|^2 - |x - b|^2$, $x \in \mathbf{R}$ $(0 < a < b)$;

$5^\circ\ f(x) = |x - 1|^{1-p} \cdot |x + 1|^{1+p}$, $x \in \mathbf{R}$ $(0 < p < 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

7.3.65. Exerciţiu. *Fie* $A = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ *şi* $f: A \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x)=e^{-|x|}\sqrt{\cos x}$. *Să se reprezinte* f *grafic apoi să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea graficului lui* f *în jurul axei* ox. *Să se arate că ecuaţia* $f(x) = \lambda$ *are cel mult un număr finit de soluţii* $(\forall)\ \lambda \in \mathbf{R}^*$.

7.3.66. Exerciţiu. *Fie* $f: \mathbf{R}\setminus\{-1,1\} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x)= xe^{\frac{1}{|x|-1}}$. *Să se reprezinte grafic* f *apoi să se afle numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei* $f(x) = \lambda (\lambda \in \mathbf{R})$.

7.3.67. Exerciţiu. *Fie* $f: \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) = xe^{x\pm\frac{1}{x}}$. *Să se reprezinte* f *grafic apoi să se afle numărul soluţiilor reale ale ecuaţiilor:* $f(x) = x$ *şi* $f(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

7.3.68. Exerciţiu. *Fie* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) = e^{-|x|\sqrt{|\sin x|}}$ *sau* $f(x) = e^{-x\sqrt{|\cos x|}}$. *Să se reprezinte grafic* f *apoi să se afle volumul corpului obţinut prin rotaţia graficului lui* f *în jurul axei* ox.

7.3.69. Exerciţiu. *Să se arate că graficul funcţiei* sin *intersectează graficul funcţiei* cos *sub un unghi egal cu* $\frac{\pi}{4}$.

7.3.70. Exerciţiu. *Să se arate că graficul funcţiei* $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$ *intersectează graficul funcţiei* $g(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$ *sub un unghi egal cu* $\frac{\pi}{2}$.

7.3.71. Exerciţiu. *Fie* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie bijectivă. Dacă graficul lui* f *are asimptote la* $+\infty$ *dreapta* Δ *de ecuaţie* $Ax + By + c = 0$, *atunci graficul lui* f^{-1} *are simptotă la* $+\infty$ *dreapta* Δ' *de ecuaţie* $Bx + Ay + C = 0$.

7.3.72. Exerciţiu. *Fie* $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *două funcţii definite astfel* $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ *şi* $g(x) = x^2 + px + q$; p, q-*parametri reali. Să se determine* p *şi* q *a.î. graficul lui* f *să fie tangent graficului lui* g *în două puncte distincte* (fig. 89).

Ind. Rezolvăm sistemul de ecuaţii:

$$f(x) = g(x);\ f'(x) = g'(x),\ x \neq 1$$

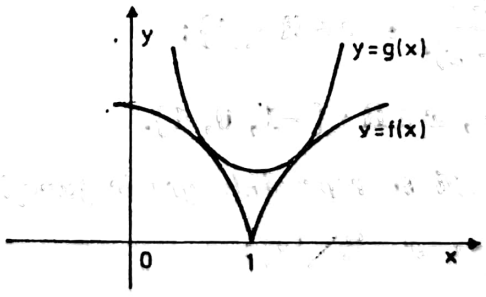


Fig. 89

7.3.73. Exerciţiu. *Fie* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel*

$$f(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1 - \sin\alpha,\ \alpha \text{ parametru } 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Să se determine α *a.î.* $G(f)$-*graficul lui* f *să fie tangent axei* ox.

Ind. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \cos\alpha$. Determinăm $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ a.î. $f(\cos\alpha) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

7.4. Exerciţii de maxim şi minim

7.4.1. Exerciţiu. *Un pieton care merge cu viteza v se află la o distanţă d de o şosea dreaptă pe care circulă autobuze cu viteza $v' > v$. In ce punct al şoselei trebuie să ia pietonul autobuzul pentru a ajunge într-o localitate dată de pe şosea în minimum de timp?.*

Soluţie. Avem următoarea schemă (fig. 90) :

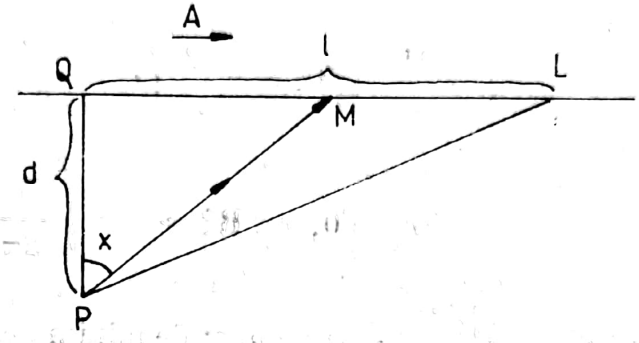


Fig. 90

Să calculăm timpul t în funcţie de unghiul $x = \widehat{MPQ}$ pe care-l realizează pietonul cînd parcurge distanţa $PM + ML$. Avem :

$$\|MP\| = \frac{d}{\cos x}, \quad \|ML\| = \|QL\| - \|QM\| = l - d \operatorname{tg} x,$$

deci

$$t = \frac{\|PM\|}{v} + \frac{\|ML\|}{v'} = \frac{d}{v \cos x} + \frac{l - d \operatorname{tg} x}{v'}.$$

Considerăm funcţia $f(x) = \dfrac{d}{v \cos x} + \dfrac{l - d \operatorname{tg} x}{v'}$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Atunci

$$f'(x) = \frac{d \sin x}{v \cos^2 x} - \frac{d}{v' \cos^2 x} = \frac{d}{v \cos^2 x}\left(\sin x - \frac{v}{v'}\right),$$

deci

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \operatorname{arc\,sin} \frac{v}{v'}.$$

Se vede imediat că $x = \operatorname{arc\,sin} \dfrac{v}{v'}$ este un punct de minim pentru f, deci pentru t.

7.4.2. Exerciţiu. *Să se construiască o cutie cilindrică cu capac, de volum dat şi cu un consum minim de tablă.*

Soluție. Fie V și S volumul respectiv aria totală a unui cilindru de raz r și înălțime h, (fig. 91). Avem $V = \pi r^2 h$

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2,$$

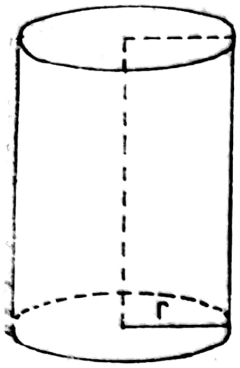


Fig. 91

deci $S = 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2.$

Să considerăm funcția $f(r) := \frac{2V}{r} + 2\pi r^2, \ r \in \mathbf{R}^*$.

Atunci

$$f'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = \frac{2}{r^2}\left(r^3 - \frac{V}{2\pi}\right), \ (\forall)\ r \in \mathbf{R}_+^*,$$

deci

$$f'(r) = 0, \ r \in \mathbf{R}_+^* \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Se vede imediat că $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ este un punct de minim pentru f.

Din relațiile $V = \pi r^2 h$ și $2\pi r^3 = V$, rezultă că $h = 2r$.

Prin urmare obținem o cutie de volum V cu un consum minim de metal, dacă diametrul cutiei este egal cu înălțimea ei și este egal cu $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

7.4.3. Exercițiu. *Să se determine un con drept de volum minim circumscris unei sfere de rază r.*

Soluție. Fie α unghiul de la vîrful conului $\theta = \frac{\alpha}{2}$ și h înălțimea conului.

Atunci avem (fig. 92) :

$$OV = \frac{r}{\sin\theta}, \ h = r + \frac{r}{\sin\theta}, \ R = h \operatorname{tg}\theta,$$

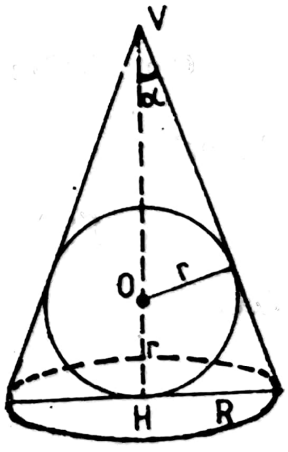


Fig. 92

deci

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi h^3 \operatorname{tg}^2\theta}{3} = \frac{\pi r^3}{3} \cdot \frac{(1+\sin\theta)^3}{\sin^3\theta} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\pi r^3 (1+\sin\theta)^2}{3\sin\theta(1-\sin\theta)}$$

Să considerăm funcția

$$f(\theta) = \frac{\pi r^3 (1+\sin\theta)^2}{3\sin\theta(1-\sin\theta)}, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Pentru $\sin\theta = x$, avem $\theta = \arcsin x$. Atunci

$$g(x) = f(\arcsin x) = \frac{\pi r^3 (1+x)^2}{3x(1-x)}, \ x \in (0,1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Se caută punctele de minim ale funcției g. Găsim imediat $x = \frac{1}{3}$, deci

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi r^3 \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2}{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)} = \frac{8\pi r^3}{3} = 2 \cdot \left(\frac{4\pi r^3}{3}\right).$$

Prin urmare conul de volum minim circumscris unei sfere date are volumul egal cu de 2 ori volumul sferei.

7.4.4. Exercițiu. *Să se construiască o cutie fără capac de volum maxim dintr-o foaie pătrată prin decuparea din fiecare colț al foii a câte un pătrățel de aceiași latură.*

Soluție. Fie a latura pătratului și x laturile pătrățelelor pe care le decupăm (fig. 93).

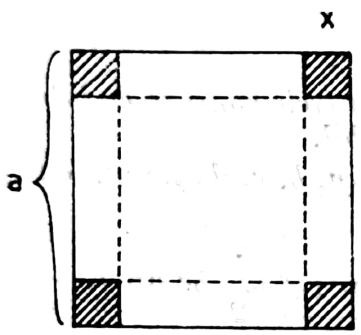


Fig. 93

Fundul cutiei are aria egală cu $(a - 2x)^2$.
Volumul cutiei este egal cu $x(a - 2x)^2$
Să considerăm funcția $f(x) = x(a-2x)^2$, $x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$.
Deoarece

$$f(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x, \ (\forall)\ x \in \left(0, \frac{a}{2}\right),$$

avem

$$f'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2, \ (\forall)\ x \in \left(0, \frac{a}{2}\right),$$

deci

$$f'(x) = 0, \ x \in \left(0, \frac{a}{2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}.$$

Se vede imediat că $\frac{a}{6}$ este un punct de maxim pentru f. Deci volumul maxim este $f\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{a^2}{9}$, pentru $x = \frac{a}{6}$.

Observație. În Ex. 7. 4.4. se poate pleca de la o foaie de formă dreptunghiulară.

7.4.5. Exercițiu. *Să se înscrie într-o emisferă de rază $r > 0$ un paralelipiped drept de volum maxim, care are baza un pătrat.*

Soluție. Fie x latura bazei și y înălțimea unui paralelipiped înscris în emisferă (fig. 94). Evident avem relația:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{AB}^2,$$

deci

$$r^2 = \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 + y^2$$

și deci

$$y = \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{2}}$$

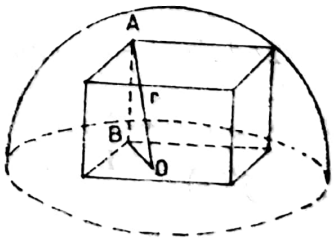


Fig. 94

Atunci volumul V al paralelipipedului înscris se scrie

$$V = x^2 y = x^2 \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{2}}.$$

Considerăm funcţia $f(x) = x^2 \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{2}}$, $x \in [0, r\sqrt{2}]$ ($r\sqrt{2}$ fiind latura unui pătrat înscris în cercul de rază r). Evident avem :

$$f'(x) = \frac{4xr^2 - 3x^2}{\sqrt{2}\sqrt{2r^2 - x^2}}, \quad (\forall)\ x \in [0, r\sqrt{2}),$$

deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{2r}{\sqrt{3}}\right\}$. Cum însă $f'(x) < 0$ (resp. $f'(x) > 0$), dacă $x < \frac{2r}{\sqrt{3}}$ $\left(\text{resp. } x > \frac{2r}{\sqrt{3}}\right)$, rezultă că $x_0 = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ este punct de maxim. Aşadar, obţinem : $V_{max} = f\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right) = \frac{r\sqrt{3}}{3}$

7.4.6. Exerciţiu. *Să se arate că printre toate patrulaterele convexe de laturi date cel care are aria maximă este patrulaterul inscriptibil.*

Soluţie. Fie $ABCD$ un patrulater convex de laturi a, b, c, d; notăm cu x unghiul din A şi cu y unghiul din C (fig. 95). Atunci :

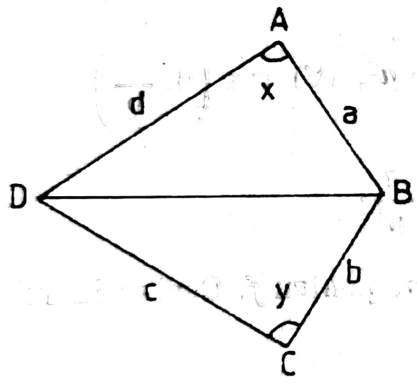


Fig. 95

$$\text{aria } ABCD = \frac{1}{2} ad \sin x + \frac{1}{2} bc \sin y$$

Cum avem

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos x = DB = b^2 + c^2 - 2bc \cos y, \quad (1)$$

rezultă că

$$y = y(x) = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2 - 2ad \cos x}{2bc}$$

Rămîne să determinăm maximul funcţiei :

$$f(x) = \frac{1}{2} ad \sin x + \frac{1}{2} bc \sin y(x), \quad x \in (0, \pi)$$

Avem

$$f'(x) = \frac{1}{2} ad \cos x + \frac{1}{2} bc \cos y(x) \cdot y'(x) \qquad (2)$$

Din (1), prin derivare în raport cu x, obţinem :

$$-2ad \sin x = -2bc \sin y \cdot y'(x) \Leftrightarrow y'(x) = \frac{ad}{bc} \cdot \frac{\sin x}{\sin y(x)},$$

deci

$$f'(x) = \frac{1}{2} ad \cos x + \frac{1}{2} bc \cos y(x) \cdot \frac{ad}{bc} \cdot \frac{\sin x}{\sin y(x)}$$

şi deci

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x + y(x)) = 0 \Leftrightarrow x + y(x) = k$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $0 < x + y(x) < 2\pi$, rezultă că $x + y(x) = \pi$. Deoarece

$$f''(x) = -\frac{1}{2}ad \sin x - \frac{1}{2}bc \sin y(x) \cdot y'^2(x) + \frac{1}{2}bc \cos y(x) \cdot y''(x)$$

și $y = 180 - x$, obținem :

$$f''(x) = -\frac{1}{2}ad \sin x - \frac{1}{2}bc \sin x < 0$$

Prin urmare, $x + y(x) = \pi$ este punct de maxim pentru f.

7.4.7. Exercițiu. *O sursă luminoasă S și un observator O se află la distanța d_1 resp. d_2 de o oglindă plană. Să se determine poziția unui punct M de pe oglindă, unde o rază de lumină care pleacă din S se reflectă în M pentru a ajunge în O.*

Soluție. Se pleacă de la ipoteza că o rază de lumină parcurge distanța între două puncte în linie dreaptă. Avem următoarea schemă (fig. 96) :

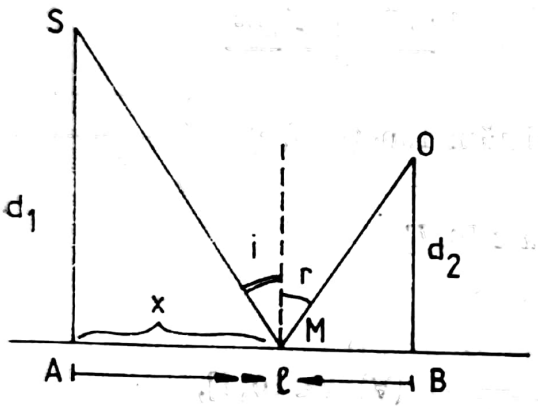


Fig. 96

$i = \sphericalangle$ de incidentă

$r = \sphericalangle$ de reflexie

Să determinăm poziția lui M în funcție de x a.î. $SM + MO$ să fie minimă. Avem :

$$SM + MO = \sqrt{d_1^2 + x^2} + \sqrt{d_2^2 + (l - x)^2}$$

Considerăm funcția

$$f(x) = \sqrt{d_1^2 + x^2} + \sqrt{d_2^2 + (l - x)^2},\ x \in (0, l)$$

Evident avem :

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{d_1^2 + x^2}} - \frac{2(l - x)}{\sqrt{d_2^2 + (l - x)^2}},\ (\forall)\ x \in (0, l),$$

deci

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{d_1^2 + x^2}} = \frac{(l - x)^2}{\sqrt{d_2^2 + (l - x)^2}} \Leftrightarrow x = \frac{d_1 l}{d_1 + d_2}.$$

Se vede imediat, studiind semnul lui f', că $x = \frac{d_1 l}{d_1 + d_2}$ este un punct de minim pentru f. Atunci

$$\text{tg } \widehat{AMS} = \frac{d_1}{x} = \frac{d_1 + d_2}{l} \text{ și tg } \widehat{BMO} = \frac{d_2}{l - x} = \frac{d_1 + d_2}{l},$$

deci

$$\widehat{AMS} = \widehat{BMS} \Leftrightarrow \boxed{i = r}.$$

Relația $i = r$ poartă denumirea de *legea reflexiei luminii a lui Descartes : unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie.*

7.4.8. Exercițiu. *Fie o cuvă plină cu apă de înălțime h, S o sursă luminoasă situată la distanța d de suprafața apei și O un observator Să se determine un punct M de pe suprafața apei unde o rază de lumină care pleacă din S se refractă în M pentru a ajunge în O* (fig. 97)..

Soluţie. Se pleacă de la ipoteza că lumina se propagă în linie dreaptă în aer ca şi în apă şi are o viteză v în aer şi v' în apă cu $v' < v$.

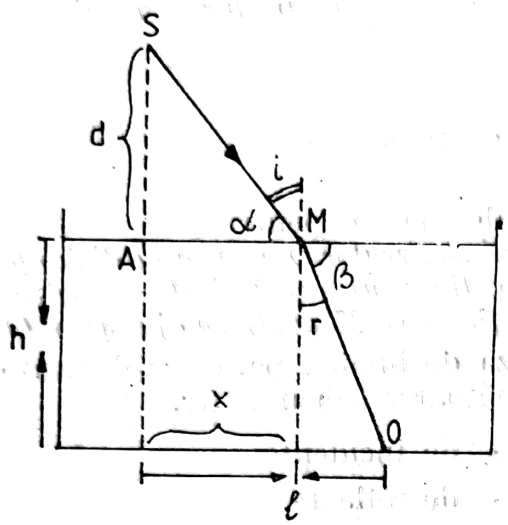


Fig. 97

$i = \sphericalangle$ de incidenţă

$r = \sphericalangle$ de refracţie

$\gamma = \dfrac{v}{v'}$ indicele de refracţie al apei în raport cu aerul.

Să calculăm în funcţie de x timpul necesar ca o rază care pleacă din S să parcurgă distanţa $|SM| + |MO|$. Avem :

$$t = \frac{|SM|}{v} + \frac{|MO|}{v'} = \frac{\sqrt{d^2 + x^2}}{x} + \frac{\sqrt{h^2 + (l - x)^2}}{v'}$$

Considerăm funcţia $f(x) = \dfrac{\sqrt{d^2 + x^2}}{v} + \dfrac{\sqrt{h^2 + (l - x)^2}}{v'}$, $x \in [0, l]$.

Evident avem :

$$f'(x) = \frac{x}{v\sqrt{d^2 + x^2}} - \frac{l - x}{v'\sqrt{h^2 + (l - x)^2}}, \quad (\forall)\ x \in [0, l],$$

deci

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{v\sqrt{d^2 + x^2}} = \frac{l - x}{v'\sqrt{h^2 + (l - x)^2}}.$$

Fie $\varphi(x) = \dfrac{x}{v\sqrt{d^2 + x^2}}$, $x \in [0, l]$ şi $\psi(x) = \dfrac{l - x}{v'\sqrt{h^2 + (l - x)^2}}$, $x \in (0, l)$.

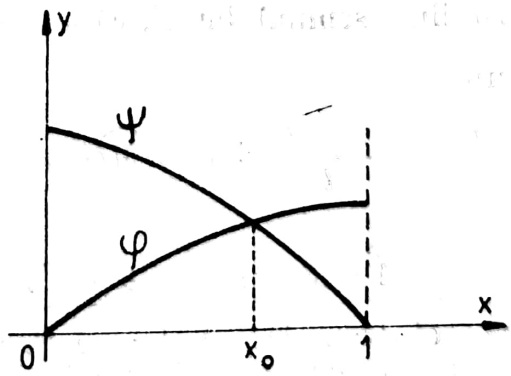


Fig. 98

Se vede imediat că $\varphi' > 0$ şi $\psi' < 0$, deci φ este strict crescătoare iar ψ este strict descrescătoare (fig. 98).

Din fig. 98 deducem că $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ şi că x_0 este punct de minim.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $\cos\alpha = \frac{x}{|SM|} = \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}}$ și $\cos\beta = \frac{l-x}{|MO|} = \frac{l-x}{\sqrt{h^2 + (l-x)^2}}$, relația (1) se transcrie $\frac{\cos\alpha}{v} = \frac{\cos\beta}{v'}$, deci

$$\boxed{\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{v'}} \qquad (2)$$

Relația (2) poartă denumirea de *legea refracției luminii a lui Descartes*: *sinusul unghiului de incidență supra sinusul unghiului de refracție este egal cu indicele de refracție.*

7.4.9. Exercițiu. *O statuie de înălțime l este așezată pe un piedestal de înălțime h. La ce distanță de piedestal trebuie să ne oprim pentru a vedea statuia sub un unghi maxim.*

Soluție. Avem următoarea schemă (fig. 99):

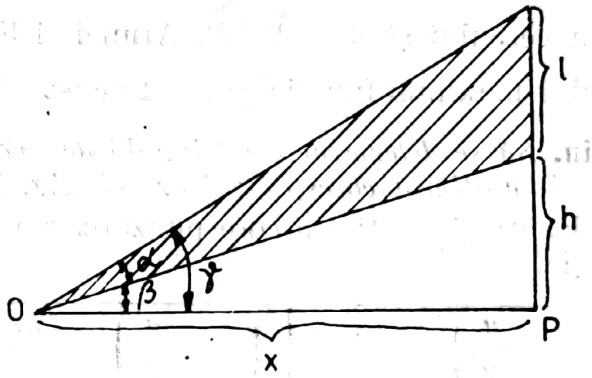


Fig. 99

Evident avem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\gamma - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{l+h}{x} - \frac{h}{x}}{1 + \frac{l+h}{x}\cdot\frac{h}{x}} = \frac{lx}{x^2 + lh + h^2}.$$

Să considerăm funcția $f(x) = \frac{lx}{x^2 + lh + h^2}$, $x \in \mathbf{R}_+$. Atunci

$$f'(x) = \frac{l(x^2 + lh + h^2) - 2lx^2}{(x^2 + lh + h^2)^2} = \frac{l(lh + h^2 - x^2)}{(x^2 + lh + h^2)^2}, \quad x \in \mathbf{R}_+,$$

deci

$$f'(x) = 0,\ x \in \mathbf{R}_+ \Leftrightarrow x = \sqrt{lh + h^2}.$$

Se vede imediat că $x = \sqrt{lh + h^2}$ este un punct de maxim pentru f. Atunci tg x este maximă, deci $\alpha = \operatorname{arc\,tg} f(\sqrt{lh + h^2})$ este maxim.

7.4.10. Exercițiu. *Să se înscrie într-un cerc de rază r un triunghi isoscel de arie maximă.*

Ind. Se notează cu x distanța de la centrul cercului la baza triunghiului. Atunci aria $\Delta = (r + x)\sqrt{r^2 - x^2}$. Se caută maximul funcției $f(x) = (r + x)\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in (0, r)$. Se obține $x = \frac{r}{2}$; triunghiul este echilateral.

7.4.11. Exerciţiu. *Să se determine un sector circular de arie maximă care are perimetrul dat* (fig. 100).

Ind.

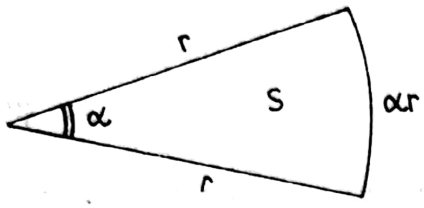


Fig. 100

$$p = 2r + \alpha r$$

$$\text{aria } S = \frac{\alpha r^2}{2} = \frac{1}{2}(pr - r^2)$$

Se caută maximul funcţiei

$$f(r) = \frac{1}{2}(pr - r^2),\ r \in \left(0, \frac{p}{2}\right)$$

Se obţine $r = \frac{p}{4}$ şi $\alpha = 2$ radiani $\approx 114°$.

7.4.12. Exerciţiu. *Să se determine un punct M pe un cerc de diametru AB a.î. $AM + MB$ este maximă.*

Ind. Fie r raza cercului şi $\theta = \widehat{MAB}$. Atunci $AM = 2r \cos\theta$, $BM = 2r \sin\theta$. Se determină maximul funcţiei $f(\theta) = 2r\cos\theta + 2r\sin\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

7.4.13. Exerciţiu. *Să se determine un triunghi de perimetru minim în care se cunoaşte o latură şi înălţimea corespunzătoare ei* (fig. 101).

Ind. Fie a şi h latura şi înălţimea corespunzătoare care sînt cunoscute. Se caută minimul funcţiei

$$f(x) = a + \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + h^2} + \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + h^2},\quad x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$$

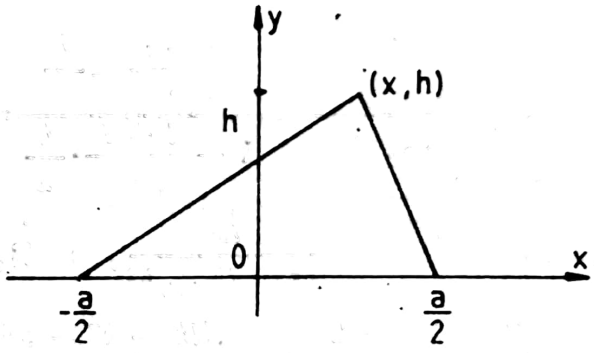


Fig. 101

7.4.14. Exerciţiu. *Să se determine dimensiunile unei ferestre de perimetru dat şi de forma unui dreptunghi deasupra căruia se află un semicerc, a.î. prin fereastra să treacă maximum de lumină* (fig. 102).

Ind. $p = 2x + y + \frac{\pi y}{2}$, aria $= xy + \frac{\pi y^2}{4}$

Să determinăm maximul funcţiei

$$f(x) = \frac{2x(p - 2x)}{2 + \pi} + \frac{\pi(p - 2x)^2}{(2 + \pi)^2},\quad x \in \left(0, \frac{p}{2}\right)$$

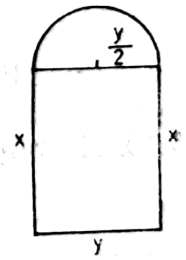


Fig. 102

7.4.15. Exerciţiu. *Să se determine laturile unui triunghi dreptunghic de arie maximă a cărui ipotenuză este dată.*

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Fie c ipotenuza Δ. Se determină maximul funcției $f(x) = x\sqrt{c^2 - x^2}$, $x \in [0, c]$.

7.4.16. Exercițiu. *Să se înscrie într-o sferă de rază r un con drept care să aibă volumul maxim resp. aria totală maximă.*

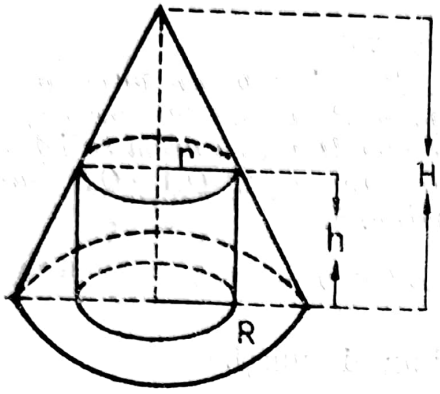


Fig. 103

Ind. Fie h înălțimea conului. Se arată că

$$h = \frac{4}{3}r \text{ resp. } h = (23 - \sqrt{17})\frac{r}{16}.$$

7.4.17. Exercițiu. *Să se înscrie într-un con dat un cilindru de volum maxim* (fig. 103).

Ind. Se determină maximul funcției

$$f(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 H\left(1 - \frac{r}{R}\right), \quad r \in (0, R).$$

7.4.18. Exercițiu. *Să se determine un număr pozitiv care adunat cu inversul său are suma minimă.*

Ind. Se caută minimul funcției $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}_+^*$.

7.4.19. Exercițiu. *Să se înscrie într-o elipsă de semiaxe a și b un dreptunghi de arie maximă.*

Ind. Laturile dreptunghiului sînt $\sqrt{a}\ 2$ și $b\sqrt{2}$.

7.4.20. Exercițiu. *Să se determine într-o elipsă de semiaxe a și b doi diametrii conjugați pentru care suma lungimilor lor este maximă.*

7.4.21. Exercițiu. *Să se determine o prismă triunghiulară regulată de volum maxim a cărei arie totală este dată.*

7.4.22 Exercițiu. *Să se înscrie într-o sferă de rază r un cilindru de volum maxim.*

Ind. Fie d(resp. h) diametrul (resp. înălțimea) cilindrului. Avem $V = \frac{\pi d^2 h}{4}$ și $d^2 + h^2 = (2r)^2$. Determinăm extremele funcției $f(h) = \frac{\pi h}{4}(4r^2 - h^2)$, $0 < h < 2r$. Se obține $h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, $V_{max} = \frac{4\pi r^3}{3\sqrt{3}}$

7.4.23. Exercițiu. *Care este raportul dintre înălțimea și raza unui con de volum dat a.î. să fie satisfăcută una din condițiile:*

1° aria laterală este minimă?; 2° aria totală este minimă?.

7.4.24. Exercițiu. *Să se determine un triunghi în care se cunoaște o latură și unghiul opus a.î. să fie satisfăcută una din condițiile:*

1° aria este maximă; 2° perimetrul este maxim.

7.4.25. Exercițiu. *Fie un sector de rază dată. Să se determine α- unghiul la centru a.î. volumul conului obținut din sector să fie maxim.*

Ind. $\alpha = \pi\sqrt{6}$.

7.4.26. Exercițiu. *Fie P un punct situat pe un cerc. Să se determine o coardă AB pe cerc paralelă cu tangenta la cerc în punctul P a.î. triunghiul PAB are o arie maximă.*

Scanned with OKEN Scanner

7.4.27. Exerciţiu. *Să se circumscrie unei sfere de rază r un con drept* a.î. *să fie satisfăcută una din condiţiile :*

1° *volumul este maxim* ; 2° *aria totală este maximă.*

Răsp. 1° Înălţimea conului este $4r$.

7.4.28. Exerciţiu. *Să se înscrie într-o sferă de rază r un con a.î. să fie satisfăcută una din condiţiile :*

1° *volumul este maxim* ; 2° *aria totală este maximă*

7.4.29. Exerciţiu. *Fie xOy un reper ortogonal, $P = P(a, b)$ un punct din primul cadran şi D o dreaptă variabilă care trece prin P şi care taie ox resp. oy în punctele A resp. B. Să se determine poziţia dreptei D a.î. să avem satisfăcută una din condiţiile următoare : 1° $OA + OB$ este minimă ; 2° $OA \cdot OB$ este minimă ; 3° AB este minim ; 4° aria ΔOAB este minimă.*

Ind. 1° Fie $\theta = \widehat{OAB}$. Atunci $OA + OB = AB(\sin\theta + \cos\theta) =$

$= \left(\frac{a}{\cos\theta} + \frac{b}{\sin\theta}\right)(\sin\theta + \cos\theta)$. Determinăm minimul funcţiei

$$f(0) = \left(\frac{a}{\cos\theta} + \frac{b}{\sin\theta}\right)(\sin\theta + \cos\theta)\,,\quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Se arată că $\theta = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{b/a}$ este punct de minim pentru f.

7.4.30. Exerciţiu. *Să se determine un dreptunghi de arie dată care să aibă perimetrul minim.*

Ind. Fie p, A şi x perimetrul, aria respectiv una din laturile dreptunghiului. Atunci $p = 2x + \frac{2A}{x}$. Se determină extremele funcţiei $f(x) = 2x + \frac{2A}{x}$, $x \in \mathbf{R}_+$. Obţinem un pătrat.

7.4.31. Exerciţiu. *Să se arate că printre toate elipsele pentru care suma semiaxelor este aceeaşi, cea care are aria maximă este cercul.*

7.4.32. Exerciţiu. *Să se arate că printre toate paralelipipedele drepte care au aceeaşi arie totală, cel care are volumul maxim este cubul.*

7.4.33. Exerciţiu. *Să se arate că printre toate piramidele triunghiulare care au aceeaşi arie totală, cea care are volumul maxim este tetraedrul.*

7.5. Curbură şi rază de curbură

7.5.1. Exerciţiu. *Să se calculeze curbura pentru funcţiile :*

1° $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$, *în punctele* $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$ *şi* $x = \frac{3\pi}{2}$;

2° $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$, *în punctele* $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$ *şi* $x = \pi$;

3° $\rho(\theta) = a + b\cos\theta$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, *în punctul* $\theta = 0$.

Soluţie. 1° Evident avem $C(x) = \frac{-\sin x}{[1 + \cos^2 x]^{3/2}}$, deci $C(0) = 0$;

$C\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $C\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$.

2° Analog cu 1°.

Scanned with OKEN Scanner

3° Evident avem $\rho'(\theta) = -b \sin \theta$, $\rho''(\theta) = -b \cos \theta$, deci

$$C(\theta) = \frac{(a + b\cos\theta)^2 + 2b^2\sin^2\theta + b\cos\theta(a + b\cos\theta)}{[(a + b\cos\theta)^2 + b^2\sin^2\theta]^{3/2}} =$$

$$= \frac{a^2 + 2b^2 + 3ab\cos\theta}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta)^{3/2}}$$

și deci

$$C(0) = \frac{a^2 + 2b^2 + 3ab}{(a + b)^2}$$

Corolar 1 *Cardioida are raza de curbură în 0 egală cu 0.*

7.5.2. Exerciţiu. *Să se determine punctele x de curbură maximă şi minimă pentru parabola* $f(x) = ax^2 + bx + c$., $x \in \mathbf{R}$.

Soluţie. Evident avem :

$$C(x) = \frac{2a}{[1 + (2ax + b)^2]^{3/2}} (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Se vede imediat că funcţia $\mathbf{R} \ni x \mapsto C(x)$ este maximă cînd funcţia $x \mapsto 1 + (2ax + b)^2$, $x \in \mathbf{R}$, este minimă, deci cînd $x = -\frac{b}{2a}$.

Prin urmare *parabola are curbura maximă în vîrful său.*

Deoarece $C(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ şi $\lim\limits_{x \to \pm\infty} C(x) = 0$, rezultă că funcţia C nu are puncte de minim, deci parabola nu are puncte de curbură minimă.

7.5.3. Exerciţiu. *Să se determine punctele x de curbură maximă şi minimă pentru cosinus hiperbolic.*

Soluţie. Avem : $f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$,

deci

$$C(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{(1 + \operatorname{sh}^2 x)^{3/2}} = \frac{\operatorname{ch} x}{(\operatorname{ch}^2 x)^{3/2}} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Funcţia C este maximă cînd funcţia ch este minimă, deci cînd $x = 0$, Atunci $C(0) = 1$.

Ca şi în Ex. 7.5.2 se vede că cosinusul hiperbolic nu posedă puncte de curbură minimă.

7.5.4. Exerciţiu. *Să se calculeze evoluta elipsei.*

Soluţie. Ecuaţia eclipsei este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sau $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leqslant x \leqslant a$.

Ecuaţia parametrică a evolutei este :

$$X = x - \frac{[1 + y'^2(x)]y'(x)}{y''(x)}, \quad Y = y(x) + \frac{1 + y'^2(x)}{y''(x)}, \quad -a \leqslant x \leqslant a.$$

Cum $y' = \mp \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$ şi $y'' = \mp \frac{ab}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$, deducem :

$$X = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^3, \quad Y = \frac{a^2 - b^2}{b^4} y^3(x) \quad (-a \leqslant x \leqslant a).$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația carteziană a evolutei se face eliminînd pe x din relațiile de mai sus. Evident avem :

$$aX = (a^2 - b^2)\left(\frac{x}{a}\right)^3 ; \quad bY = (a^2 - b^2)\left(\frac{y}{b}\right)^3,$$

deci

$$(aX)^{2/3} + (bY)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = (a^2 - b^2)^{2/3}.$$

Prin urmare ecuația evolutei este

$$(aX)^{2/3} + (bY)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

Corolar 1. *Evoluția unui cerc se reduce la un punct, centrul cercului.*

7.5.5. Exercițiu. *Să se arate că evoluta parabolei* $y^2 = 2px$ *este* $y^2 = \frac{1}{27p}(x - p)^3$ (*Parabola lui Neilly*)

Soluție. Derivînd relația $y^2 = 2px$ în raport cu x de două ori avem :

$$2yy' = 2p, \; yy'' + y'^2 = 0,$$

deci

$$y' = \frac{p}{y} \text{ și } y'' = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Atunci ecuația parametrică a evolutei se scrie :

$$X = x - \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)\frac{p}{y}}{-\frac{p^2}{y^3}}; \quad Y = y + \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}}.$$

Efectuînd calculele deducem : $X = p + \frac{3y^2}{2p}$; $Y = -\frac{y^3}{p^2}$.

Eliminînd pe x din relațiile de mai sus obținem :

$$(X - p)^3 = \frac{27}{8} \cdot \frac{y^6}{p^3} = \frac{27\,p}{8} Y^2$$

7.5.6. Exercițiu. *Să se determine punctele de curbură maximă și minimă pentru funcțiile :*

1° $f(x) = x^{2n}$ $x \in \mathbf{R}$; 2° $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$;

3° $f(x) = \ln x$, $x \in \mathbf{R}_+$; 4° $f(x) = \frac{1}{1 + \lambda^2 x^2}$ $x \in \mathbf{R}$ (λ — *parametru real*) ;

5° $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$; 6° $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$;

7° *Elipsă* : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 8° *Hiperbolă* : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Indicație. 1° Curbura maximă în $x = 0$; nu are puncte de curbură minimă.

Scanned with OKEN Scanner

2° $C(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deci C nu are puncte de minim;

$x = -\dfrac{\ln 2}{2}$ punct de maxim.

3° $C(x) = -\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+$, deci C nu are puncte de maxim;

$x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ punct de minim.

4° Punct de curbură maximă $x = 0$ cu $C(0) = 2\lambda^2$.

5° $C(x) = -\dfrac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Atunci $|C(x)| \leqslant 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$;

$C\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$, și $C\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1$, deci punctele de curbură maximă (resp. minimă) sînt: $\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$ $\left(\text{resp. } \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

6° Analog cu 5°.

7° Punctele de curbură maximă și minimă sînt vîrfurile elipsei.

8° Punctele de curbură maximă sînt vîrfurile hiperbolei; nu are puncte de curbură minimă.

7.6. Aplicații diverse în algebră, trigonometrie și geometrie

7.6.1. Exercițiu. *Să se găsească valoarea minimă a lui* $a^2 + b^2$ *cînd* $a,b \in \mathbf{R}$ *și ecuația* $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ (1) *are cel puțin o rădăcină reală.*

Ind. Ecuația (1) pentru $x \in \mathbf{R}$ fixat, reprezintă o dreaptă (Δ) în coordonatele a și b. Distanța de la origine la (Δ), $\sqrt{a^2+b^2}$, este egală cu $\dfrac{x^4+1}{\sqrt{(x^3+x)^2+(x^2)^2}}$. Afirmația dată se reduce la a afla minimul funcției $f(x) = \dfrac{(x^4+1)^2}{(x^3+x)^2+x}$, $x \in \mathbf{R}^*$. Obținem că $x_0 = \pm 1$ este punct de minim și $f(x_0) = \dfrac{4}{5}$.

7.6.2. Exercițiu. *Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației* $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{\lambda}{\cos x} = 2$, *în intervalul* $(0, \pi)$.

Ind. Se consideră funcția $f(x) = 2\cos x = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0, \pi)$. Se reprezintă f grafic și se determină numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f(x) = \lambda$, $x \in (0, \pi)$.

7.6.3. Exercițiu. *Să se rezolve inecuația*: $\sin x = \sqrt{3}\cos x < 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

Ind. Se studiază funcția $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x - 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

7.6.4. Exercițiu. *Fie funcția* $f(x) = \dfrac{x^2 + \lambda x - 1}{x - 1}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$. *Să se determine parametrul real* λ a.î. $x = 0$ *să fie un punct de extrem local.*

Scanned with OKEN Scanner

7.6.5. Exerciţiu. *Fie funcţia* $f(x) = \dfrac{\lambda(x-1)^3}{x^2+\lambda x+1}$, λ *parametrul real. Pentru ce valori ale lui* λ *funcţia* f *este monotonă pe domeniul său de definiţie*

Ind. Dacă $|\lambda| > 2$, atunci f are asimptote verticale, deci nu este monotonă. Dacă $|\lambda| < 2$, atunci f are cel puţin un extrem local, deci nu este monotonă.

7.6.6. Exerciţiu. *Să se arate că funcţia*

$$f(x) = \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \sin(x+a) & 1 \\ \cos(x+b) & \sin(x+b) & 1 \\ \cos(x+c) & \sin(x+c) & 1 \end{vmatrix}, \quad x \in \mathbf{R}$$

este constantă.

Ind. Se arată că $f' = 0$.

7.6.7. Exerciţiu. *Să se calculeze determinantul*

$$\begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ x & x+a_2 & & x \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x & x & & x+a \end{vmatrix} \quad (x \in \mathbf{R}),$$

utilizînd derivatele sale.

Ind. Fie $f(x)$ valoarea determinantului în $x \in \mathbf{R}$. Se vede imediat că $f'' = 0$, deci $(\exists)\ A, B \in \mathbf{R}$ a.î. $f(x) = Mx + B$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Evident avem:

$$B = f(0) = \begin{vmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \dots a_n$$

şi

$$A = f'(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 a_3 \dots a_n) + (a_1 a_3 a_4 \dots a_n) + \dots + (a_1 a_2 \dots a_{n-1}).$$

7.6.8. Exerciţiu (Liouville). *Fie* α *o rădăcină a unei ecuaţii algebrice ireductibile cu coeficienţi întregi şi de* grad $n \geq 2$. *Atunci există* $\gamma > 0$ *depinzînd numai de* α *a.î.* $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{\gamma}{q^n}$, $(\forall)\ p, q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n$, $x \mathbf{R}$ $(c_0 \neq 0)$ un polinom ireductibil de grad n cu $c_i \in \mathbf{Z}$ $(0, \leqslant i \leqslant n)$ și α o rădăcină a lui f. Deoarece funcția $x \mapsto f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$ este continuă, există $M > 0$ a.îî.

$$|f'(x)| \leqslant M, \quad (\forall)\ x \in [\alpha - 1, \quad \alpha + 1]$$

Fie $p, q \in \mathbf{Z}$ cu $q > 0$ și $\frac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$. Polinomul f fiind ireductibil avem $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$, deci

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{|c_0p^n + c_1p^{n-1} + \ldots + c_n|}{q^n} \geqslant \frac{1}{q^n},$$

deoarece $c_0p^n + c_1p^{n-1} + \ldots + c_n \in \mathbf{Z}$.

Aplicînd T.6.3.4. există ξ cuprins între α și $\frac{p}{q}$ a.î.

$$\left|f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \cdot |f'(\xi)|,$$

deci

$$\frac{1}{q^n} \leqslant \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right)\right| < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| M$$

și deci

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Mq^n} = \frac{\gamma}{q^n}, \text{ cu } \gamma = \frac{1}{M} \text{ independent de } \frac{p}{q}.$$

Fie acum $p, q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$ cu $\frac{p}{q} \notin [\alpha - 1, \alpha + 1]$. Evident există $p' \in \mathbf{Z}$ cu $1 - \alpha \leqslant \frac{p'}{q} \leqslant 1 + \alpha$, deci

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \left|\alpha - \frac{p'}{q}\right| > \frac{\gamma}{q^n}$$

Corolar 1. *Numărul* $\alpha = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{10^{n!}}$ *este transcendent.*

Soluție. Evident avem :

$$0 < \alpha - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{10^{k!}} = \sum_{k \geqslant m+1} \frac{1}{10^{k!}} < \frac{1}{10^{(m+1)!}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{2}{10^{(m+1)!}},$$

deci

$$0 < \alpha - \frac{p_m}{10^{m!}} < \frac{2}{10^{(m+1)!}}, \text{ unde } p_m \in \mathbf{N},$$

și deci

$$0 < \alpha - \frac{p_m}{q_m} < \frac{2}{q_m^{m+1}}, \quad \text{unde} \quad q_m = 10^{m!} \in \mathbf{N}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă α este algebric, există $n \in \mathbf{N}$ și $\gamma \in \mathbf{R}_+$ care depinde numai de α a.î.

$$\left|\alpha - \frac{p_m}{q_m}\right| > \frac{\gamma}{q_m^n}, \quad (\forall)\ m \in \mathbf{N},$$

deci

$$\frac{2}{q_m^{m+1}} > \frac{\gamma}{q_m^n}, \quad (\forall)\ m \in \mathbf{N}$$

și deci

$$10^{m!(m-n+1)} < \frac{2}{\gamma}, \quad (\forall)\ m \in \mathbf{N}, \text{ absurd}$$

Prin urmare α este transcendent.

7.6.9. Exercițiu. *Să se arate relația:*

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad (\forall)\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Soluție. Fie $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Evident $f'(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ deci (T.6.3.4. Cor. 2) f constantă și cum $f(0) = \frac{\pi}{2}$, concludem că $f = \frac{\pi}{2}$.

Corolar 1.

$$\arcsin \frac{1}{x} + \arccos \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

7.6.10. Exercițiu *Să se arate inegalitățile:*

1° $\sum_{i=1}^{n} \sin x_i \leqslant n \sin\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$, $(\forall)\ x_i \in [0, \pi]$;

2° $\sum_{i=1}^{n} \cos x_i \leqslant n \cos\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$, $(\forall)\ x_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

3° $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{tg} x_i \geqslant n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$, $(\forall)\ x_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Soluție. 1° Fie funcția $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$. Deoarece $f'' \leqslant 0$, rezultă (P.7.1.6.) f concavă, deci (P.67.1.2. Cor. 1) avem:

$$\sin\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin x_i.$$

Corolar 1.

$$\sqrt[n]{\sin x_1 \cdot \sin x_2 \ldots \sin x_n} \leqslant \sin\frac{x_1 + x_2 + x_n}{n}, \quad (\forall)\ x \in [0, \pi]$$

Corolar 2. *Fie α, β, γ unghiurile unui triunghi. Atunci are loc inegalitatea* $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Scanned with OKEN Scanner

7.6.11. Exerciţiu. *Să se stabilească cu ajutorul teoremei lui Lagrange următoarele relaţii cunoscute în trigonometrie :*

1° $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$;

2° $\operatorname{arc\,cos} \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = 2 \operatorname{arc\,tg} x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$;

3° $\operatorname{arc\,sin} \frac{2x}{1 + x^2} = \begin{cases} 2 \operatorname{acr\,tg} x, & |x| \leqslant 1 \\ \operatorname{sign} x - 2 \operatorname{arctg} x, & |x| > 1. \end{cases}$

Soluţie. 1° Fie $f(x) = \cos^2 x - \frac{1}{2}\cos 2x$. Evident f este derivabilă şi avem :

$$f'(x) = -2 \sin x \cos x - \frac{1}{2}(-2) \sin 2x = 0, \quad (\forall), x \in \mathbf{R},$$

deci (T.6.3.4. Cor. 2) f este constantă. Cum $f(0) = \frac{1}{2}$, avem $f = \frac{1}{2}$, etc.

2° Deoarece $\left|\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right| \leqslant 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, relaţia dată are sens. Considerăm funcţia :

$$f(x) = \operatorname{arc\,cos} \frac{1 - x^2}{1 + x^2} - 2 \operatorname{arc\,tg} x, \quad x \in \mathbf{R}$$

f fiind pară şi $f(0) = 0$, este suficient să arătăm că $f|_{\mathbf{R}_+^*} = 0$. Evident $f'(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$, deci f constantă pe $\mathbf{R}_+^*$ şi cum $f(0) = 0$, conchidem că $f = 0$ pe $\mathbf{R}_+^*$.

3° Fie $f_1(x) = \operatorname{arc\,sin} \frac{2x}{1 + x^2}$, $f_2(x) = 2 \operatorname{arc\,tg} x$, $x \in \mathbf{R}$. Evident f_1 (resp. f_2) este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ (resp. $\mathbf{R}$) şi avem :

$$f_1'(x) = \frac{2(1 - x^2)}{\sqrt{(1 - x^2)(1 + x^2)}} = \begin{cases} \frac{2}{1 + x^2}, & |x| < 1 \\ -\frac{2}{1 + x^2}, & |x| < 1 \end{cases}; \quad f_2'(x) = \frac{2}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Aşadar $(f_1 - f_2)'(x) = 0$, $(\forall)\ x \in (-1, 1)$, deci $f_1 - f_2 = c_1$ pe $(-1, 1)$ şi cum $(f_1 - f_2)(0) = 0$, avem $f_1 = f_2$ pe $(-1, 1)$.

Analog $f_1 + f_2 = c_2$ (resp. c_3) pe $(-\infty, -1)$ (resp. $(1, \infty)$) şi deoarece $(f_1 + f_2)(1 +) = \frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{4} = \pi$ (resp. $(f_1 + f_2)(-1 -) = -\pi$), rezultă că $c_2 = \pi$ (resp. $c_3 = -\pi$).

7.6.12. Exerciţiu. *Fie ABC un triunghi care are unghiurile a, b, c cu $a < b < c$. Să se arate inegalitatea :*

$$-\frac{1}{2} < \frac{\sin a}{(a - b)(a - c)} + \frac{\sin b}{(b - c)(b - a)} + \frac{\sin c}{(c - a)(c - b)} < 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie funcția $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$. Evident $f'' < 0$ pe $(0, \pi)$ deci f este concavă. Dacă $\lambda := \frac{c-b}{c-a}$, atunci $\lambda \in (0,1)$ și avem $1-\lambda = \frac{b-a}{c-a}$, $\lambda a + (1-\lambda)\, c = b$, deci

$$f(\lambda a + (1-\lambda)\, x) > f(a) + (1-\lambda)\, f(b) \Leftrightarrow 0 > -\sin b + \frac{c-b}{c-a} \sin a + \frac{b-a}{c-a} \sin c$$

Mai departe considerăm funcția $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0, \pi)$. Evident $g' < 0$, deci g strict descrescătoare și deci

$$g\left(\frac{c-b}{2}\right) > g\left(\frac{c-a}{2}\right),$$

de unde avem :

$$k := -\sin b + \lambda \sin a + \sin c - \lambda \sin c = 2 \sin \frac{c-b}{2} \cos \frac{b+c}{2} -$$

$$- 2\lambda \sin \frac{c-a}{2} \cos \frac{a+c}{2} = (c-b)\left[g\left(\frac{c-b}{2}\right) \sin \frac{a}{2} - g\left(\frac{c-a}{2}\right) \sin \frac{b}{2}\right] >$$

$$> (c-b)\, g\left(\frac{c-b}{2}\right)\left(\sin \frac{a}{2} - \sin \frac{b}{2}\right) = -4 \sin \frac{c-b}{2} \sin \frac{b-a}{2} \cos \frac{a+b}{4}$$

și deoarece

$$\sin \frac{c-b}{2} < \frac{c-b}{2}, \quad \sin \frac{b-a}{4} < \frac{b-a}{4}, \quad \cos \frac{a+b}{4} < 1,$$

deducem

$$k > -4 \frac{c-b}{2} \cdot \frac{b-a}{4} \cdot = -\frac{1}{2}(c-b)\, b-a)$$

adică

$$-\sin b + \frac{c-b}{c-a} \sin a + \frac{b-a}{c-a} \sin c > -\frac{1}{2}(c-b)(b-a) \text{ etc.}$$

7.6.13. Exerciţiu. *Fie a, b, c laturile unui triunghi și $p \geqslant 1$. Atunci $\sqrt[p]{a}$, $\sqrt[p]{b}$, $\sqrt[p]{c}$ sînt laturile unui nou triunghi.*

Soluție. Fie $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = \sqrt[p]{x}$. Evident $f'' < 0$, deci f este concavă. Cum $f(0)=0$ rezultă (Ex. 7.1.3.) că f este subaditivă. Atunci $\sqrt[p]{a} \leqslant \sqrt[p]{b+c} \leqslant \sqrt[p]{b} + \sqrt[p]{c}$ etc. . . .

7.6.14. Exerciţiu. *Fie P un poligon convex cu n laturi de lungime $a_1, a_2, \ldots, a_n$ și M un punct în interiorul lui P situat la distanțele $d_1, d_2, \ldots, d_n$ de laturile poligonului. Atunci*

$$a_1 d_1^p + a_2 d_2^p + \ldots + a_n d_n^p \leqslant (resp. \geqslant) \frac{2^p s^p}{(a_1 + \ldots + a_n)^{p-1}},$$

dacă $p \in (0,1)$ (resp. $p \notin (0,1)$), unde $s =$ aria P.

Ind. Punem $\lambda_i = \dfrac{a_i}{a_1 + \ldots + a_n}$ și $f(x) = x^p$, $x \in \mathbf{R}_+$. Cum f este concavă (resp. convexă), avem:

$$f(\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \ldots + \lambda_n d_n) \geqslant (\text{resp. } \leqslant)\ \lambda_1 f(d_1) + \ldots + \lambda_n f(d_n)$$

7.6.15. Exercițiu. *Utilizînd teorema lui Lagrange să se arate care este eroarea pe care o facem înlocuind* arctg 1,1 *prin* $\dfrac{\pi}{4}$.

Ind. $\operatorname{arctg} 1{,}1 - \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{0{,}1}{1 + (1 + 0{,}1\theta)}$ $(0 < \theta < 1)$ etc.

7.6.16. Exercițiu. *Să se arate, utilizînd teorema lui Lagrange, inegalitatea:*

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{72} < \sin 50^\circ < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{36}.$$

Soluție. Avem $50^\circ = \dfrac{5\pi}{18}$ rad., deci

$$\sin \frac{5\pi}{18} - \sin \frac{\pi}{4} = \left(\frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{4}\right) \cos \xi,\ \xi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{18}\right).$$

Deoarece $\dfrac{1}{2} = \cos \dfrac{\pi}{3} < \cos \dfrac{5\pi}{18} < \cos \xi < 1$, rezultă

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{36} + \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \frac{5\pi}{18} < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{36}.$$

7.6.17. Exereițiu. *Să se arate identitățile:*

1° $\operatorname{arc\,sin} x + \operatorname{arc\,cos} \sqrt{1 - x^2} = \dfrac{\pi}{2}$, $(\forall)\ |x| \leqslant 1$;

2° $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1 - x}{1 + x} = \begin{cases} -\dfrac{3\pi}{4}, & \text{dacă } x < -1 \\ \dfrac{\pi}{4}, & \text{,, } x > -1. \end{cases}$

Ind. Fie $f(x) = \operatorname{arc\,sin} x + \operatorname{arc\,cos} \sqrt{1 - x^2}$, $|x| \leqslant 1$. Se arată că $f' = 0$, deci f este constantă și $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

7.6.18. Exereițiu. *Care dintre numerele* $2^{\sqrt{3}}$ *și* $3^{\sqrt{2}}$ *este mai mare?*

Ind. Se consideră funcția $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x \in \mathbf{R}_+^*$. Cum f este strict crescătoare pe $(0, e)$, avem $f(\sqrt{2}) < f(\sqrt{3})$ etc.

7.6.19. Exereițiu *Să se arate că ecuația* $\dfrac{1}{2} \cos x - \dfrac{1}{(x+1)^2} = 0$ *are în intervalul* $(2\pi, 3\pi)$ *cel puțin o soluție.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie funcția $f(x) = \sin x - \frac{x-1}{x+1}$, $x \in \mathbf{R}_+$. Atunci $f(2\pi) < 0$, $f\left(\frac{5\pi}{2}\right) > 0$ și $f(3\pi) < 0$, deci $(\exists)\ x_1 \in \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ și $x_2 \in \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right)$ a.î. $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Din T.6.3.2. rezultă că $\exists (x_0 \in (x_1, x_2)$ cu $f'(x_0) = 0$. Cum $f'(x) = \cos x - \frac{2}{(x+1)}$ $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+$, obținem rezultatul din enunț.

7.6.20. Exercițiu. *Să se arate că ecuația* $(x+1)\,2^{x+1} = 1$ *are în intervalul* $[-1, 0)]$ *o soluție și numai una singură.*

Ind. Fie funcția $f(x) = (x+1)\,2^{x+1} - 1$, $x \in [-1, 0)]$. Atunci f este derivabilă și $f'(x) = 2^{x+1}(1 + (x+1)\ln 2) > 0$, $(\forall)\ x \in [-1, 0]$, deci f este strict crescătoare. Observăm apoi că $f(-1) \cdot f(0) < 0$.

7.6.21. Exercițiu. *Să se afle numărul de soluții ale ecuației* $\lg_a x = x$ $(a > 0)$.

Ind. Se studiază variația funcției $f(x) = \lg_a x - x$, $x \in \mathbf{R}_+^*$. Ecuația dată are 1° o soluție dacă $0 < a < 1$; 2° două soluții dacă $1 < a < e$; 3° o soluție dacă $a = e^{\frac{1}{e}}$; 4° nici o soluție dacă $a > e$.

7.6.22. Exercițiu. *Să se calculeze sumele:*

1° $\sum_{k=1}^{n} k \cos kx$; 2° $\sum_{k=1}^{n} k \sin kx$.

Ind. Se derivează relațiile (Ap. 4.1. Cor. 1):

$$\sum_{n=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{n+1}{2} x; \quad \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{n+1}{2} x.$$

7.6.23. Exercițiu. *Să se calculeze sumele:*

1° $\operatorname{ch}\theta + 2\operatorname{ch}2\theta + 3\operatorname{ch}3\theta + \ldots + n\operatorname{ch}n\theta$;

2° $\operatorname{sh}\theta + 2\operatorname{sh}2\theta + 2\operatorname{sh}3\theta + \ldots + n\operatorname{ch}n\theta$.

Ind. Se procedează la fel ca în Ex. 7.6.22.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 8

PRIMITIVE

8.1. Primitive. Proprietăţi generale

8.1.1. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, *dacă* $x \neq 0$ *şi* $f(0) = 1$. *Atunci* f ***admite primitive.***

Soluţie. Din P.5.5.9. Car. 2 rezultă că f este continuă pe $\mathbf{R}^*$. Mai departe avem (P.5.5.15 (1°)) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$, deci (T.5.5.6.) f este continuă în 0. Din T.8.1.8. rezultă că f admite primitive.

8.1.2. Exeriiţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ***o funcţie definită*** *astfel* $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{sign} x$. ***Atunci*** f ***nu admite primitive.***

Soluţia 1. Observăm că f nu are proprietatea Darboux;

$$\frac{1}{2} \in [1, 2] = [f(0), f(1)] \quad \text{şi} \quad f(x) \neq \frac{1}{2}, \ (\forall)\ x \in (0,1)$$

Aplicăm mai departe P.8.1.8.

Soluţia 2. Evident avem:

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} (1 + x^2)(-1) = -1 \quad \text{şi} \quad \lim_{x \searrow 0} f(x) = +1$$

Aşadar $f(0-)$ şi $f(0+)$ există şi sînt diferite între ele, deci 0 este discontinuitate de prima speţă. Din P.8.1.8. rezultă că f nu admite primitivă.

8.1.3. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\int \sqrt{|1 - x|}\, dx$, $x \in \mathbf{R}$.

Soluţie. Evident avem: $\sqrt{|1 - x|} = \begin{cases} \sqrt{1 - x}, & x \leqslant 1 \\ \sqrt{x - 1} & x > 1. \end{cases}$

Atunci (P.8.1.16. Cor. 2) $(\exists)$ $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ a.î. funcţia

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{3}\sqrt{(1 - x)^3} + C_1, & x \leqslant 1 \\ +\dfrac{2}{3}\sqrt{(x - 1)^3} + C_2, & x > 1. \end{cases}$$

este o primitivă a lui f. Determinăm C_2 în funcţie de C_1 din condiţia $F(-1) = F(1+)$. Cum $F(1-) = C_1$ şi $F(1+) = C_2$, avem $C_1 = C_2$ etc.

Scanned with OKEN Scanner

8.1.4. Exerciţiu. *Să se calculeze* $F(x) = \int x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$, $x \in (-1, 1)$.

Soluţie. Facem substituţia $x = \varphi(t) = \cos t$, $t \in (0, \pi)$. Evident φ este derivabilă şi aplică bijectiv $(0, \pi)$ pe $(-1, 1)$. Atunci

$$F(x) = \int \cos t \sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\cos t}} \sin t\,dt \Big|_{t=\arccos x} + C$$

Deoarece

$$\cos t \cdot \sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\cos t}} \cdot \sin t = \cos t \cdot \operatorname{ctg}\frac{t}{2} \cdot 2 \sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} =$$

$$= (\cos t)\frac{1+\cos t}{2} = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\cos^2 t =$$

$$= \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}(1 + \cos 2t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}\cos 2t,$$

rezultă

$$F(x) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{8}\sin 2t \Big|_{t=\arccos x} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\arccos x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{4}\sqrt{1-x^2} + C.$$

8.1.5. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) = 2x + 1$, *dacă* $x > 1$ *şi* $f(x) = x^2$, *dacă* $x \leqslant 1$. *Să se calculeze o primitivă a lui* f.

Soluţie. Evident f este continuă, deci are primitive. Atunci (P.8.1.16. Cor. 2) $(\exists)$ $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ a.î. funcţia

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - x + C_1, & x > 1 \\ \frac{1}{3}x + C_2, & x \leqslant 1, \end{cases}$$

este o primitivă a lui f. Determinăm constanta C_2 în funcţie de C_1 (sau invers) din condiţia : $F(1-) = F(1+)$. Cum $F(1+) = C_1$ şi $F(1+) = \frac{1}{3} + C_2$, avem $C_1 = \frac{1}{3} + C_2$, deci $C_2 = -\frac{1}{3} + C_1$. Prin urmare funcţia $F(x) = x^2 - x + C_1$, dacă $x > 1$ şi $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} + C_1$, dacă $x \leqslant 1$, este o primitivă a lui F.

8.1.6. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) = \max\{1, x^2\}$. *Să se arate că* f *esadmite primitive şi să se calculeze o primitivă a sa.*

Soluţie. Din P.5.5.24. rezultă că f este continuă, deci (T.8.1.8) f admite primitive. Evident avem $f(x) = 1$, dacă $x \in [-1, 1]$ şi $f(x) = x^2$, dacă

Scanned with OKEN Scanner

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Atunci (P.8.1.6. Cor. 2) $(\exists)$ $C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}$ a.î. funcţia :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + C_1, & x \in (-\infty, -1) \\ x + C_2, & x \in [-1, 1] \\ \frac{1}{3}x^3 + C_3, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

este o primitivă a lui f şi unde două din constantele C_1, C_2, C_3 se determină în funcţie de a treia, din condiţiile : $F(-1-) = F(-1+)$, $F(1-) = F(1+)$. Cum avem :

$$F(-1-) = \frac{1}{3} + C_1, F(-1+) = -1 + C_2, F(1-) = 1 + C_2, F(1+) = \frac{1}{3} + C_3,$$

obţinem $C_3 = C_1 + \frac{4}{3}$ şi $C_2 = C_1 + \frac{2}{3}$ etc.

8.1.7. Exerciţiu. *Fie* $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) = \alpha + \sin\frac{1}{x}$, *dacă* $x \in [-1, 0)$, $f(0) = 0$ *şi* $f(x) = \beta + \sin\frac{1}{x}$, *dacă* $x \in (0,1]$. *Atunci* f *admite primitive* $\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$.

Soluţie. Fie $g, h : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ două funcţii definite astfel $g(x) = \sin\frac{1}{x}$, dacă $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ şi $g(0) = 0$; $h(x) = \alpha$, dacă $x \in [-1, 0)$, $h(0) = 0$ şi $h(x) = \beta$, dacă $x \in (0,1]$. Evident $f = g + h$. Am văzut (P.8.1.8. Exemplul 2) că g admite primitive. Atunci :

f admite primitive $\Leftrightarrow f - g$ admite primitive $\Leftrightarrow h$ admite primitive $\Leftrightarrow h$ constantă $\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$.

Corolar 1. *Fie* $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) = 1 + \sin\frac{1}{x}$, dacă $x \in [-1, 0)$, $f(0) = 0$ şi $f(x) = 1 + \sin\frac{1}{x}$, *dacă* $x \in (0,1]$. *Atunci* f *nu admite primitive.*

8.1.8. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) = \cos^2\frac{1}{x}$, *dacă* $x \neq 0$ *şi* $f(0) = \alpha \in \mathbf{R}$. *Atunci* : 1° f *admite primitive* $\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$; 2° f *are proprietatea Darboux* $\Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$.

Soluţie. $1 - f(x) = \begin{cases} \sin^2\frac{1}{x}, & x \in \mathbf{R}^* \\ 1 - \alpha, & x = 0. \end{cases}$ Din P.8.1.8. Exemplul 2 deducem :

1° f admite primitive $\Leftrightarrow 1 - f$ admite primitive $\Leftrightarrow 1 - \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$.

2° f are proprietatea Darboux $\Leftrightarrow 1 - f$ are prorietatea Dorboux $\Leftrightarrow 0 \leqslant 1 - \alpha \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Corolar 1. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) = \cos^2 \frac{1}{x}$, *dacă* $x \in \mathbf{R}^*$ şi $f(0) = \alpha \in [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. *Atunci* f *are proprietatea Darboux şi nu admite primitive.*

8.1.9. Exerciţiu. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R} \to$ *interval şi* $f : \mathbf{R}$ *o funcţie monotonă. Atunci* f *admite primitive* $\Leftrightarrow f$ *este continuă.*

Soluţie. ($\Rightarrow$). f fiind monotonă, rezultă (T.5.5.18. Cor. 2) că are numai discontinuităţi de prima speţă. Cum f are primitive, rezultă (P.8.1.8) că f are numai discontinuităţi de a doua speţă.

Aşadar f nu are discontinuităţi de nici un fel.

8.1.10. Exerciţiu. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă. Atunci modificînd valorile lui* f *într-o mulţime nevidă cel mult numerabilă de puncte, funcţia rezultată nu admite primitive.*

Soluţie. Fie A cel mult numerabilă, nevidă, inclusă în I şi $g : I \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea că $f(x) = g(x)$, $(\forall)\ x \in I \setminus A$ şi $f(x) \neq g(x)$ $(\forall)\ x \in A$. Presupunem că g admite primitive. Funcţia f fiind continuă, admite primitive (T.8.1.8.) Din P.8.1.4. rezultă că $f = g$, absurd. Rămîne că g nu admite primitive.

8.1.11. Exerciţiu. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie mărginită care admite primitive. Atunci orice primitivă a lui* f *este lipschitziană.*

Soluţie. Prin ipoteză avem $M := \|f\|_\infty < +\infty$ şi $(\exists)\ F : I \to \mathbf{R}$ derivabilă cu $F' = f$. Atunci (T.6.3.4.), $(\forall)\ x, y \in I$, există ζ cuprins între x şi y a.î.

$$F(x) - F(y) = (x - y) F'(\zeta) = (x - y) f(\zeta)$$

deci

$$|F(x) - F(y)| \leqslant M |x - y| \text{ etc.}$$

8.1.12. Exerciţiu. *Să se demonstreze şi în alt mod* (v. T.9.3.1. Cor. 1 şi T. 12.1.15. Cor. 1) *că orice funcţie continuă* $f : I \to \mathbf{R}$, *admite primitive.*

Soluţie. Fie $J \subseteq I$ un interval compact fixat. Atunci (T.12.1.18 Cor. 1) $(\exists)\ f_n : J \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ un şir de funcţii polinomiale a.î. $f_n \overset{u}{\to} f|_J$. Cum evident fiecare $f_n (n \geqslant 1)$ admite primitive, rezultă (T.12.1.15) că $f|_J$ admite primitive. Din P.8.1.3. conchidem că f admite primitive.

8.1.13. Exerciţiu. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie de două ori antiderivabilă şi local mărginită. Atunci* $(\forall)\ g : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă, rezultă că* gf *admite primitive.*

Soluţie. Prin ipoteză $(\exists)\ F : I \to \mathbf{R}$ de două ori derivabilă a.î. $F' = f$. Fie funcţia $G(x) := xF'(x) - F(x)$, $x \in I$. Evident G este derivabilă şi avem :

$$G'(x) = F'(x) + xF''(x) - F'(x) = xf(x), \quad (\forall)\ x \in I$$

Aşadar funcţia xf admite primitive, de unde deducem prin inducţie că funcţia $x^n f$ admite primitive, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci Pf admite primitive pentru orice funcţie polinomială $P : I \to \mathbf{R}$.

Fie mai departe $g : I \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă şi $J \subseteq I$ un interval compact fixat. Din T.12.1.18. Cor. 1 rezultă că $(\exists)\ g_n : J \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ un şir de funcţii polinomiale a.î. $g_n \overset{u}{\to} g|_J$ deci (P.12.1.3) $g_n \cdot f \overset{u}{\to} g(f)|_J$. Cum fiecare $g_n \cdot f|_J$ $(n \geqslant 1)$ admite primitive, rezultă (T.12.1.15) că $(gf)|_J$ admite primitive, deci (P.8.1.3) gf admite primitive.

8.1.14. Exerciţiu. *Fie* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. *Să se determine o funcţie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *cu proprietăţile :* 1° f *mărginită;* 2° f *continuă pe* (a, b) *iar în punctele* a *şi* b *este discontinuă şi nulă;* 3° f *admite primitive.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ o funcție definită astfel

$$f(x)=(2x-a-b)\sin\frac{1}{(x-a)(x-b)},\ \text{dacă } x\in(a,b)\ \text{și } f(a)=f(b)=0.$$

Din P.5.5.9. Cor. 1 rezultă că f este continuă pe $(a\ b)$. Funcția $g(x)=\sin\frac{1}{x}$, dacă $x\in\mathbf{R}^*$ și $g(0)=0$, admite primitive (P.8.1.8. Exemplul 3), fie G o primitivă a lui g și $F(x)=G((x-a)(x-b))$, $x\in[a,b]$. Atunci (T.6.1.10.) F este derivabilă și avem :

$$F'(x)=G'((x-a)(x-b))\cdot(2x-a-b)=f(x),\quad(\forall)\ x\in(a,b);$$

$$F'(a)=G'(0)\cdot(a-b)=0;\quad F'(b)=G'(0)(b-a)=0.$$

Așadar $F'=f$, deci F este o primitivă a lui f.

Fie mai departe $\varphi:\left(a,\frac{a+b}{2}\right)\to\left(-\infty,-\frac{(a+b)^2}{4}\right)$ o funcție definită astfel $\varphi(x)=\frac{1}{(x-a)(x-b)}$. Evident φ este omeomorfă și strict crescătoare.

Evident $(\exists)\ n_0\geqslant 1$ a.î. $y_n:=\frac{\pi}{2}-2n\pi<-\frac{1}{4}(a+b)^2$, $(\forall)\ n\geqslant n_0$ Cum $y_n\to-\infty$, avem că $x_n:=\varphi^{-1}(y_n)\to a$, deci

$$f(x_n)=(2x_n-a-b)\sin y_n=2x_n-a-b\to a-b\quad(n\to\infty)$$

și deci f nu este continuă în a.

Analog se arată că f este discontinuă în b.

Evident avem $\|f\|_\infty\leqslant b-a$, deci f mărginită.

8.1.15. Exercițiu. *Fie $a,b\in\mathbf{R}$ $a<b$ și $A\subseteq[a,b]$ o mulțime finită nevidă. Să se determine o funcție $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ cu proprietățile : 1° f mărginită ; 2° f continuă pe $[a,b]\setminus A$, iar pe A este discontinuă și nulă ; 3° f* admite primitive.

Soluție. Fie $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ o enumerare a mulțimii A ; presupunem pentru a face o alegere că x_0 și x_1 aparțin lui A. Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ o funcție definită astfel : $(\forall)\ i=\overline{1,n}$ punem $f(x_{i-1})=f(x_i)=0$ și

$$f(x)=(2x-x_{i-1}-x_i)\sin\frac{1}{(x-x_{i-1})(x-x_i)},\quad(\forall)\ x\in(x_{i-1},x_i)$$

Din Ex. 8.1.41. rezultă : f mărginită ; f continuă pe $[a,b]\setminus A$; f discontinuă și nulă pe A ; $f|_{[x_{i-1},x_i]}$ admite primitive, $(\forall)\ i=\overline{1,n}$. Din P.8.1.4. Cor 2 rezultă că f admite primitive.

8.2. Calculul cu primitive

8.2.1. Exercițiu. *Să se calculeze* $F=\int\frac{x^6-x^2-x}{1-x^4}\,dx$.

Soluție. Evident avem $\frac{x^6-x^2-x}{1-x^4}=-x^2-\frac{x}{1-x^4}$, deci

$$\frac{x}{x^4-1}=\frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{C_1}{x-1}+\frac{C_2}{x+1}+\frac{C_3x+C_4}{x^2+1},$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin identificare se deduce $C_1 = C_2 = \frac{1}{4}$, $C_3 = \frac{1}{2}$, $C_4 = 0$. Atunci

$$F = -\int x^2\,dx + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)dx - \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}\ln|x^2-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1).$$

8.2.2. Exerciţiu. *Să se calculeze primitiva* $F = \int \sin 2x^n \cdot \cos x\,dx$.

Soluţie. (i) Dacă n este par, $n = 2k$, facem substituţia $\sin x = t$. Atunci

$$F = \int 2^n \sin^n x \cos^n x \cdot \cos x\,dx = 4^k \int \sin^{2k} x\,(1 - \sin^2 x)^k \cos x\,dx =$$

$$= 4^k \int t^{2k}(1-t^2)^k\,dx \text{ etc.}$$

(ii) Dacă n este impar, $n = 2k+1$, facem substituţia $\cos x = t$. Atunci

$$F = 4^k \int \sin^{2k+1} x \cos^{2k+2} x\,dx = 4^k \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^{2k+2} x \sin x\,dx =$$

$$= -4^k \int (1-t^2)^k t^{2k+1}\,dt \text{ etc.}$$

8.2.3. Exerciţiu. *Să se calculeze primitiva* $\int \frac{R(e^x)}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$, R *funcţie raţională.*

Soluţie. Cu substituţia $\sqrt{1+e^x} = t$, avem $e^x\,dx = 2$, deci $dx = \frac{2t\,dt}{t^2-1}$ şi deci

$$\int \frac{R(e^x)}{\sqrt{1+e^x}}\,dx = 2\int \frac{R(t^2-1)}{t^2-1}\,dt = \int R_1(t)\,dt,$$

unde R_1 este o funcţie raţională.

8.2.4. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele* $\int \mathrm{ch}^n x\,dx, \int \mathrm{sh}^n x\,dx$ $(n \in \mathbf{N})$.

Soluţie. Notăm $A_n = \int \mathrm{ch}^n x$ şi $B_n = \int \mathrm{sh}^n x\,dx$.

Antiderivînd prin părţi avem:

$$A_n = \int \underbrace{\mathrm{ch}^{n-1} x}_{u}\ \underbrace{\mathrm{ch}\,x\,dx}_{dv} = \mathrm{ch}^{n-1} x\,\mathrm{sh}\,x - (n-1)\int \mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^{n-2} x\,dx.$$

Însă $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, deci

$$A_n = \mathrm{ch}^{n-1} x\,\mathrm{sh}\,x - (n-1)\int (\mathrm{ch}^2 x - 1)\,\mathrm{ch}^{n-2} x\,dx =$$

$$= \mathrm{ch}^{n-1} x\,\mathrm{sh}\,x - (n-1)(A_n - A_{n-2}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci $nA_n = \operatorname{ch}^{n-1} x \operatorname{sh} x + (n-1) A_{n-2}$ şi deci

$$A_n = \frac{1}{n} \operatorname{ch}^{n-1} x \operatorname{sh} x + \frac{n-1}{n} A_{n-2}.$$

Analog deducem relaţia :

$$B_n = \frac{1}{n} \operatorname{sh}^{n-1} x \operatorname{ch} x - \frac{n-1}{n} B_{n-2}.$$

8.2.5. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele* $\int x^n$, $\operatorname{ch} x \, dx$, $\int x^n \operatorname{sh} x \, dx$ $(n \in \mathbf{N})$.

Soluţie. Notăm $A_n = \int x^n \operatorname{ch} x \, dx$ şi $B_n = \int x^n \operatorname{sh} x \, dx$. Antiderivînd prin părţi avem :

$$A_n = \int \underbrace{x^n}_{u} \underbrace{\operatorname{ch} x \, dx}_{dv} = x^n \operatorname{sh} x - n \int x^{n-1} \operatorname{sh} x - dx,$$

deci

$$A_n = x^n \operatorname{sh} x - n B_{n-1} \tag{1}$$

Analog $B_n = \int \underbrace{x^n}_{u} \underbrace{\operatorname{sh} x \, dx}_{dv} = x^n \operatorname{ch} x - n \int x^{n-1} \operatorname{ch} x \, dx,$

deci

$$B_n = x^n \operatorname{ch} x - n A_{n-1} \tag{2}$$

Din (1) şi (2) deducem imediat :

$$A_n = x^n \operatorname{sh} x - n x^{n-1} \operatorname{ch} x + n(n-1) A_{n-2}$$
$$B_n = x^n \operatorname{ch} x - n x^{n-1} \operatorname{sh} x + n(n-1) B_{n-2}.$$

8.2.6. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele* $\int e^x \cos^n x \, dx$, $\int e^x \sin^n x \, dx$ $(n \in \mathbf{N})$.

Soluţie. Notăm $F_n = \int e^x \cos^n x \, dx$. Atunci avem succesiv :

$$F_n = \int e^x \cos^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx = F_{n-2} + \int \underbrace{e^x \sin x}_{u} \underbrace{\cos^{n-2} x \, d(\cos x)}_{dv} =$$

$$= F_{n-2} + e^x \sin x \cdot \frac{\cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} \int \cos^{n-1} x (e^x \sin x + e^x \cos x) \, dx =$$

$$= F_{n-2} + \frac{1}{n-1} e^x \cos^{n-1} x + \frac{1}{n-1} \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\cos^{n-1} x \, d(\cos x)}_{dv} - \frac{1}{n-1} \int e^x \cos^n x \, dx =$$

$$= F_{n-2} + \frac{1}{n-1} e^x \cos^{n-1} x + \frac{1}{n-1} \left(e^x \frac{1}{n} \cos^n x \right) - \int \frac{1}{n} e^x \cos^n x \, dx \Big) - \frac{1}{n-1} F_n =$$

$$= F_{n-2} + \frac{1}{n-1} e^x \cos^{n-1} x + \frac{1}{n(n-1)} e^x \cos^n x - \frac{1}{n(n-1)} F_n - \frac{1}{n-1} F_n,$$

deci

$$\left(1+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n-1}\right)F_n =$$

$$= \frac{1}{n-1}\,e^x\cos^{n-1}x + \frac{1}{n(n-1)}\,e^x\cos^n x + F_{n-2} \quad \text{și deci}$$

$$F_n = \frac{n}{n^2+1}\,e^x\cos^{n-1}x + \frac{1}{n^2+1}\,e^x\cos^n x + \frac{n(n-1)}{n^2+1}F_{n-2}.$$

8.2.7. Exercițiu. *Să se calculeze primitivele* $\int(\arcsin x)^n\,dx$; $\int(\arccos x)^n\,dx$ $(n\in\mathbf{N})$.

Soluție. Notăm $A_n=\int(\arcsin x)^n\,dx$ și $B_n=\int(\arccos x)^n\,dx$.

Antiderivînd prin părți avem:

$$A_n=\int\underbrace{(\arcsin x)^n}_{u}\underbrace{dx}_{dv}=x(\arcsin x)^n-n\int\underbrace{(\arcsin x)^{n-1}}_{u}\underbrace{\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{dv}=$$

$$= x(\arcsin x)^n + n(\arcsin x)^{n-1}\sqrt{1-x^2} -$$

$$- n(n-1)\int\sqrt{1-x^2}\,(\arcsin x)^{n-2}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

deci

$$\boxed{A_n = x(\arcsin x)^n + n(\operatorname{crc}\sin x)^{n-1}\sqrt{1-x^2} - n(n-1)A_{n-2}}$$

Procedînd analog pentru B_n se obține relația:

$$\boxed{B_n = x(\arccos x)^n - n(\arccos x)^{n-1}\sqrt{1-x^2} - m(n-1)B_{n-2}}$$

8.2.8. Exercițiu. *Să se determine* $a, b, c, A, B, C \in \mathbf{R}$ *a.î. primitive* $F(x)=\int\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)^2 dx$ *să fie o funcție rațională.*

Soluție. Prin ridicare la pătrat se obține:

$$F(x) = -\left(\frac{A^2}{x-a}+\frac{B^2}{x-b}+\frac{C^2}{x-c}\right)+\frac{2BC}{b-c}\int\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-c}\right)dx +$$

$$+\frac{2CA}{c-a}\int\left(\frac{1}{x-c}-\frac{1}{x-a}\right)dx+\frac{2AB}{a-b}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)dx =$$

$$= R(x)+\ln\left(\frac{x-b}{x-c}\right)^{\frac{2BC}{b-x}}\left(\frac{x-c}{x-a}\right)^{\frac{2DA}{c-a}}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{2AB}{a-b}} =$$

$$= R(x)+\ln(x-a)^{\frac{2AB}{a-b}-\frac{2CA}{c-a}}(x-b)^{\frac{2BC}{c-b}-\frac{2AB}{a-b}}(x-c)^{\frac{2CA}{c-a}-\frac{2BC}{b-c}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci F este rațională $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{a-b}=\frac{CA}{c-a};\ \frac{BC}{c-b}=\frac{AB}{a-b};\ \frac{CA}{c-a}=\frac{BC}{b-c}\Leftrightarrow \frac{AB}{a-b}=$$

$$=\frac{CA}{c-a}=\frac{BC}{b-c}\Leftrightarrow A(b-c)=B(c-a)=C(a-b).$$

8.2.9. Exercițiu. *Fie* $x_i,\ \lambda_i\in\mathbf{R},\ 1\leqslant i\leqslant 2$ *fixați. Să se determine un polinom* P *de grad minim a.î.* x_i *este punct de extrem și* $P(x_i)=\lambda_i,\ (\forall)\ 1\leqslant i\leqslant 2.$

Soluție. Deoarece P este o funcție derivabilă și x_i un punct de extrem, din th. Fermat avem $P'(x_i)=0,\ 1\leqslant i\leqslant 2$. P fiind de grad minim cu proprietatea din enunț, rezultă că P' este un polinom de grad minim având rădăcinile x_1 și x_2, deci $P'(x)=\alpha(x-x_1)(x-x_2)\ (\forall)\ x\in\mathbf{R}$. Atunci

$$P(x)=\int P'(x)\,dx+c=\alpha\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(x_1+x_2)x^2+x_1x_2\right]+c\ (c\ \text{const.}).$$

Determinăm apoi constantele α și c din condițiile $P(x_i)=\lambda_i,\ 1\leqslant i\leqslant 2$.

8.2.10. Exercițiu. *Să se calculeze primitiva* $\int\frac{dx}{(1-x^4)^n}\ (n\in\mathbf{N})$.

Soluție. Notăm primitiva cu A_n. Plecăm de la A_{n-1} și antiderivăm prin părți

$$A_{n-1}=\int\underbrace{\frac{1}{(1-x^4)^{n-1}}}_{u}\underbrace{dx}_{dv}=\frac{x}{(1-x^4)^{n-1}}-4(n-1)\int\frac{x^4}{(1-x^4)^n}\,dx,$$

deci

$$A_{n-1}=\frac{x}{(1-x^4)^{n-1}}+4(n-1)A_{n-1}-4(n-1)A_n$$

și deci

$$(4n-4)A_n=\frac{x}{(1-x^4)^{n-1}}+(4n-5)A_{n-1}.$$

8.2.11. Exercițiu. *Să se calculeze primitiva* $\int\frac{dx}{x^4+1}$, *utilizînd substituții de forma* $x\pm\frac{1}{x}=t$.

Soluție. Evident avem:

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu substituţia $x - \frac{1}{x} = t$, prima primitivă devine :

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}.$$

Cu substituţia $x + \frac{1}{x} = t$, a doua primitivă devine :

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|.$$

Prin urmare :

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|.$$

8.2.12. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele* :

$$A = \int \frac{x^2\,dx}{(x\sin x)+\cos x)^2}, \quad B = \int \frac{x^2\,dx}{(x\cos x - \sin x)^2}.$$

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă $t = x - \operatorname{arc\,tg} x$ avem :

$$dt = \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx, \quad \text{deci } dt = \frac{x^2}{1+x^2}\,dx;$$

$$\operatorname{tg} t = \operatorname{tg}(x - \operatorname{arc\,tg} x) = \frac{\operatorname{tg} x - x}{1 + x\operatorname{tg} x} = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x},$$

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \operatorname{tg}^2 t = 1 + \frac{(\sin x - x\cos x)^2}{(\cos x + x\sin x)^2} = \frac{1+x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}.$$

Prin urmare

$$A = \int \frac{1+x^2}{(\cos x + x\sin x^2)} \cdot \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}.$$

Pentru calculul lui B plecăm de la relaţia :

$$\frac{1}{\sin^2 t} = 1 + \operatorname{ctg}^2 t = 1 + \frac{(\cos x + x\sin x)^2}{(\sin x - x\cos x)^2} = \frac{1+x^2}{(x\cos x - \sin x)^2}.$$

8.2.13. Exerciţiu. *Să se calculeze primitiva*

$$\int \frac{x^m\,dx}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)} \quad (0 \leqslant m < n).$$

Soluţie. Evident avem :

$$\frac{x^m}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)} = \frac{c_1}{x-a_1} + \frac{c_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{c_n}{x-a_n} \quad (c_i \in \mathbf{R})$$

Dacă amplificăm cu $x - a_i$ și dăm lui x valoarea a_i obținem

$$\frac{a_i^m}{(a_i - a_1) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n)} = c_i \qquad (1)$$

Prin urmaere:

$$\int \frac{x^m \, dx}{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \ln|x - a_i|,$$

cu c_i dați de (1).

8.2.14. Exercițiu. *Să se calculeze primitivele:*

$$\int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2 + 1}}, \quad \int \frac{x^n \, dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \; (n \in \mathbf{N}).$$

Soluție. Notăm $\int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2 + 1}}$ cu A_n. Plecăm de la A_{n-2} și antiderivăm prin părți:

$$A_{n-2} = \int \underbrace{x^{-n+1}}_{u} \underbrace{\frac{x \, dx}{\sqrt{1 + x^2}}}_{dv} = x^{-n+1}\sqrt{1 + x^2} - (-n + 1)\int x^{-n}\sqrt{1 + x^2}\, dx =$$

$$= x^{-n+1}\sqrt{1 + x^2} + (n - 1)\int \frac{(1 + x^2)\, dx}{x^n \sqrt{1 + x^2}} = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^{n-1}} + (n - 1)(A_n + A_{n-2}),$$

deci

$$A_n = -\frac{\sqrt{1 + x^2}}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{n - 2}{n - 1} A_{n-2}, \; (\forall) \quad n \geqslant 2 \qquad (1)$$

Dacă n este par, din (1) deducem:

$$A_n = -\frac{\sqrt{1 + x^2}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{\sqrt{1 + x^2}}{(n-3)x^{n-3}} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-3} A_{n-4} = \dots =$$

$$= -\frac{\sqrt{1 + x^2}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{\sqrt{1 + x^2}}{(n-3)x^{n-3}} - \dots \pm$$

$$\pm \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-3} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 + x^2}}{1 \cdot x}$$

Dacă n este impar, din (1) deducem:

$$A_n = -\frac{\sqrt{1 + x^2}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{\sqrt{1 + x^2}}{(n-3)x^{n-3}} - \dots \pm \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-3} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} A_1,$$

unde

$$A_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}, \text{ cu substituția } t = \sqrt{x^2 + 1}, \text{ devine}$$

$$A_1 = \int \frac{x \, dx}{x^2\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{t \, dt}{(t^2 - 1)\, t} = \frac{1}{2} \ln \frac{t - 1}{t + 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $B_n = \int \frac{x^n \, dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$ se procedează analog și se obține relația :

$$B_n = \frac{x^{n-1}\sqrt{x^2 - 1}}{n} + \frac{n-1}{n} B_{n-2}, \quad (\forall)\, n \geqslant 2.$$

8.2.15. Exercițiu. *Să se calculeze primitivele* $\int \frac{dx}{\sin x}$ *și* $\int \frac{dx}{\cos x}$, *utilizînd substituția* $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

Soluție. Evident avem :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

8.2.16. Exercițiu. *Să se calculeze primitiva* $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx$ *folosind formula de antiderivare prin părți.*

Soluție. Evident avem :

$$A = \int \underbrace{\sqrt{x^2 + a^2}}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int x \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \left(\int \frac{x^2 + a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}),$$

deci

$$2A = x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

și deci

$$A = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}).$$

8.2.17. Exercițiu. *Să se calculeze primitiva* $\int \frac{dx}{\operatorname{trig}^2 x - \operatorname{trig}^2 a}$, $a \in \mathbf{R}$.

Soluție. Cazul trig $a = 0$ este imediat. Presupunem trig $a \neq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

1° Cu substituţia $\operatorname{tg} x = t$, dacă $a \neq \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, obţinem :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x - \cos^2 a} = \int \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}}{1 - \frac{\cos^2 a}{\cos^2 x}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{1 - (1 + t^2)\cos^2 a} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 a - t^2 \cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} \int \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{tg}^2 a - t^2} = \frac{1}{\cos^2 a} \cdot \frac{1}{2 \operatorname{tg} a} \ln \frac{|\operatorname{tg} a + t|}{|\operatorname{tg} a - t|} =$$

$$= \frac{1}{2 \sin 2a} \ln \frac{|\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} x|}{|\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} x|}.$$

2° Deoarece $\sin^2 x - \sin^2 a = \cos^2 a - \cos^2 x$ $(\forall)\ a, x \in \mathbf{R}$ avem

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x - \sin^2 a} = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 a - \cos^2 x} = \frac{-1}{2 \sin 2a} \ln \frac{|\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} x|}{|\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} x|}$$

3° Evident avem :

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 a} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} a} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a} - \frac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a} \right)$$

şi

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a} = \frac{\cos x \cos a}{\sin(x - a)} = \frac{\cos((x - a) + a) \cdot \cos a}{\sin(x - a)} =$$

$$= \operatorname{ctg}(x - a) \cdot \cos^2 a - \frac{1}{2} \sin 2a.$$

Înlocuind a cu $-a$ obţinem :

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a} = \operatorname{ctg}(x + a) \cdot \cos^2 a + \frac{1}{2} \sin 2a,$$

deci

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 a} = \frac{\cos^2 a}{2 \operatorname{tg} a} (\operatorname{ctg}(x - a) - \operatorname{ctg}(x + a) - \sin 2a)$$

şi deci

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 a} = \frac{\cos^2 a}{2 \operatorname{tg} a} \left(\ln \frac{|\sin(x - a)|}{|\sin(x + a)|} - x \sin 2a \right).$$

4° Se procedează ca în 3° şi se obţine :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 a} = \frac{\sin^2 a}{2 \operatorname{ctg} a} \left(\ln \frac{|\sin(x + a)|}{|\sin(x - a)|} - x \sin 2a \right).$$

8.2.19. Exerciţiu. *Să se calculeze primitiva* $\int \frac{1 + x^4}{1 + x^6} \mathrm{d}x$.

Scanned with OKEN Scanner

Ind. $\int\frac{1+x^4}{1+x^6}\,dx=\int\frac{1-x^2+x^4}{1+x^6}\,dx+\int\frac{x^2}{1+x^6}\,dx=\int\frac{dx}{1+x^2}+\frac{1}{3}\int\frac{d(dx^3)}{1+(x^3)^2}$.

8.2.19 Exerciţiu. *Să se calculeze primitiva* $\int\sin x\cos x\cos 2x\ldots\cos 2^{n-1}x\,dx$.

Ind. Ţinem seama de identitatea (Ap. 4.3.)

$$\cos x\cos 2x\ldots\cos 2^{n-1}x=\frac{\sin 2^n x}{2^n\sin x}.$$

8.2.20. Exerciţiu. *Să se calculeze primitiva* $\int\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\,dx$.

Ind. $\int\underbrace{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}}_{u}\cdot\underbrace{dx}_{dv}=x\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}-\int x\frac{-dx}{1+x^2}$.

8.2.21. Exerciţiu. *Să se calculeze primitiva* $\int\frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{1\pm\sin^2 x}}$.

Ind. Cu substituţia $\sin^2 x=t$ obţinem primitiva $\int\frac{dt}{\sqrt{1\pm t^2}}$.

8.2.22. Exerciţiu. *Să se calculeze primitiva* $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Ind. Cu substituţia $x^2=t$, se obţine primitiva $\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1\pm t^2}}$.

8.2.23. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele*

1° $\int\ln(x^2+x+1)dx$; 2° $\int\ln(x^4+x^2+1)dx$.

Ind. 1° Antiderivînd prin părţi, obţinem

$$\int\ln(x^2+x+1)dx=x\ln(x^2+x+1)-\int\frac{x(2x+1)}{x^2+x+1}\,dx\text{ etc.}$$

2° $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$,

$$\int\ln(x^4+x^2+1)dx=\int\ln(x^2+x+1)\,dx+\int\ln(x^2-x+1)\,dx,$$

$$\int\ln(x^2-x+1)dx=-\int\ln(t^2+t+1)dt.$$

8.2.24. Exerciţiu. *Să se calculeze primitiva* $A=\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,e^{\frac{1}{x}}\,dx$.

Ind. Cu substituţia $t=\frac{1}{x}$ obţinem : $A=-\int e^t\sin t\,dt$. Utilizăm mai departe 11.21.2.

Scanned with OKEN Scanner

8.2.25. Exerciţiu *Să se calculeze primitivele :*

$1^\circ \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$; $2^\circ \int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{3-\sin^2 x}}$; $3^\circ \int \frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x}\,dx$;

$4^\circ \int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{a^2+b^2\sin^2 x}}\ (a^2+b^2\neq 0)$; $5^\circ \int \frac{\cos x}{a^2+b^2\sin x}\ (a^2+b^2)\neq 0)$;

$6^\circ \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{4\pm \operatorname{arc\,tg}^2 x}}$; $7^\circ \int \frac{\cos x}{3+\sin^2 x}\,dx$; $8^\circ \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

Ind. Facem substituţiile următoare :

1° $\arcsin x = t$; 2° $\sin x = t$; 3° $\ln x = t$; $4^\circ \wedge 5^\circ$ $\sin x = t$; 6° $\operatorname{arc\,tg} x = t$; 7° $\sin x = t$; 8° $\ln x = t$.

8.2.26. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele :*

$1^\circ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$; $2^\circ \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2\pm x^2}}$; $3^\circ \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2\pm b^2x^6}}\ (a,\ b\in \mathbf{R}_+^*)$;

$4^\circ \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

Ind. Facem substituţiile următoare :

$1^\circ \wedge 2^\circ$ $x=\frac{a}{t}$; 3° $x^3=t$; 4° $\operatorname{arc\,tg} x = t$, utilizăm apoi 10.2.

8.2.27. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele :*

$1^\circ \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $2^\circ \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\ (a\in \mathbf{R}_+^*)$.

Ind. 1° $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ etc.

8.32.2.8. Exerciţiu. *Să se calculeze primitiva*

$$A=\int \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx.$$

Ind. Facem substituţia $x+\frac{1}{x}=t$. Atunci $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = dt$ şi

$$A=\int \sqrt{\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,dt.$$

8.2.29. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele de forma* $\int \frac{1}{x}R(\ln x)\,dx$, *unde* R *este o funcţie raţională.*

Ind. Facem substituţia $\ln x = t$.

8.2.30. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele de forma*

$\int R(e^x)\sqrt{ae^{2x}+be^x+c}\,dx$, *unde* R *este o funcţie raţională.*

Ind. Punem $e^x=t$ şi obţinem $\int R(t,\sqrt{at^2+bt+c})\frac{1}{t}\,dt$.

Utilizăm mai departe substituţiile lui Euler.

Scanned with OKEN Scanner

8.2.31. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele* :

$$A = \int \sin(a \ln x)\mathrm{d}x, \quad B = \int \cos(a \ln x)\mathrm{d}x.$$

Ind. Cu substituţia $\ln x = t$ avem $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t$, deci

$$A = \int e^t \sin at \, \mathrm{d}t; \quad B = \int e^t \cos at \, \mathrm{d}t.$$

Ţinem mai departe seama de 11.21.2.

8.2.32. Exerciţiu. *Să se calculeze primitiva* $\int \frac{\ln x}{x^n}\mathrm{d}x$ $(n \geqslant 2)$.

Ind. Antiderivînd prin părţi se obţine :

$$\int \ln x \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} \ln x - (-n+1)\int x^{-n}\,\mathrm{d}x.$$

8.2.33. Exerciţiu. *Să se calculeze primitiva* $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}}$.

Ind. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}} = \frac{1}{2}\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x.$

8.2.34. Exerciţiu. *Să se calculeze primitiva* $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)(\ln \ln x)}$.

Ind. Se face substituţia $t = \ln \ln x$.

8.2.3.5. Exerciţiu. *Să se calculeze primitiva*

$$\int \left(\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x}\right)\mathrm{d}x.$$

Ind. Ţinem seama de identitatea

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x.$$

8.2.36. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele* :

$$\int \frac{\sin nx}{\sin x} \cos nx \, \mathrm{e}^{mx}\,\mathrm{d}x; \quad \int \frac{\sin nx}{\sin x} \sin nx \, \mathrm{e}^{m}\,dx \; (m, n \in \mathbf{N}).$$

Ind. Ţinem seamă de 11.21.2. şi de relaţiile :

$$\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)\,x = \frac{\sin nx}{\sin x}\cos nx,$$

$$\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin nx}{\sin x}\sin nx.$$

8.2.37. Exerciţiu. *Să se calculeze primitiva* $A = \int x^{n-1} \ln(x^{2n} - 1)\,\mathrm{d}x$.

Ind. Avem $A = \int x^{n-1}\ln(x^n - 1)\mathrm{d}x + \int x^{n-1}\ln(x^n + 1)\mathrm{d}x$ etc.

Scanned with OKEN Scanner

Facem mai departe substituția $x^n \pm 1 = t$.

8.2.38. Exercițiu. *Să se calculeze primitiva* $\int e^{\arcsin x}\,dx$.

Ind. $A = \int \underbrace{e^{\arcsin x}}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = x\,e^{\arcsin x} - \int x\,\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$\int \underbrace{e^{\arcsin x}}_{u}\cdot\underbrace{\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{dv} = -\sqrt{1-x^2}\,e^{\arcsin x} + \int \sqrt{1-x^2}\,\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

Deducem pe A din relația evidentă:

$$A = x\,e^{\arcsin x} + \sqrt{1-x^2}\cdot e^{\arcsin x} - A.$$

8.2.39. Exercițiu. *Să se stabilească relațiile:*

1° $\int x^n \ln x\,dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right]$;

2° $\int x^n(\ln x)^m dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^m - \frac{m}{n+1}\int x^n(\ln x)^{m-1}\,dx$;

3° $\int \frac{x^n}{(\ln x)^m}\,dx = -\frac{x^{n+1}}{(m-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{n+1}{m-1}\int \frac{x^n}{(\ln x)^{m-1}}\,dx.$

Ind. Se antiderivează prin părți.

8.2.40. Exercițiu. *Să se calculeze primitiva* $\int P(x)\,\operatorname{arctrig}\,x\,dx$, *P — polinom.*

Ind. Se antiderivează prin părți.

8.2.41. Exercițiu *Să se calculeze primitiva* $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}}$

Ind. $F = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x\sqrt{2-\sin^2 x}} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x\sqrt{\left(\frac{2}{\sin x}\right)-1}}$

Punem $\frac{\sqrt{2}}{\sin x} = t$ și obținem:

$$F = \int \frac{-\frac{1}{2}\,dt}{\sqrt{t^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|$$

8.2.42. Exercițiu. *Să se calculeze primitiva*

$$F(x) = \int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx,\quad x \in \mathbf{R}^*$$

Scanned with OKEN Scanner

Ind. $\int \underbrace{(\arcsin x)}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{dv}\,dx = -\frac{1}{x}\arcsin + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} =$

$$= -\frac{1}{x}\arcsin x - \int \frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} \text{ etc.}$$

8.2.43. Exerciţiu. *Să se calculeze primitiva* $F(x) = \int \sqrt{\frac{e^x+1}{e_x-1}}dx$, $x \in \mathbf{R}_+^*$.

Ind. Punem $e^x = t$ şi obţinem :

$$F = \int \frac{1}{t}\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}\,dt|_{t=\ln x} + C \quad \text{etc.}$$

8.2.44. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele* :

$$\int x \ln\frac{1-x}{1+x}\,dx, \quad \int \frac{x\ln(1+x)}{(1+x)^2}\,dx$$

Ind. Se aplică formula de antiderivare prin părţi

8.2.45. Exerciţiu. *Să se calculeze primitiva* $\int P(x)\ln Q(x)\,dx$, *unde* $P, Q \in \mathbf{R}[X]$.

Ind. Se aplică T ... şi se obţin primitive de forma $\int R(x)\,dx$, cu R raţională.

8.2.46. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele* : $\int \frac{dx}{x^4-1}$; $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$;

$\int \frac{dx}{x^6 \pm 1}$; $\int \frac{dx}{(x^3 \pm 1)^2}$; $\int \frac{(x+1)dx}{(x-2)^2(x^2+1)}$; $\int \frac{(x^2+3)dx}{(x-1)(x^2+1)^2}$; $\int \frac{dx}{(x^2+1)^5}$;

$\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$; $\int \frac{dx}{x^8-1}$; $\int \frac{dx}{(x+a)(x+2a)\ldots(x+na)}$; $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$.

Ind. v. P. 8.3.3.

8.2.47. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele* :

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 \pm a^2)(x^2 \pm b^2)}; \int \frac{x^3\,dx}{(x^2 \pm a^2)(x^2 \pm b^2)}; \int \frac{dx}{x^4-1}; \int \frac{x^3\,dx}{x^4-1};$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)(x^2 \pm b^2)}; \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}.$$

Ind. v. P. 8.3.4.

Scanned with OKEN Scanner

8.2.48. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele* $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$;

$\int \frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x})^2}$; $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$; $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[6]{x})}$; $\int \frac{(\sqrt{x}+x)\,dx}{x^3-\sqrt[3]{x}}$;

$\int \frac{1-\sqrt{x}}{(1+\sqrt[4]{x^3})^3}\,dx$.

Ind. v. P. 8.3.5.

8.2.49. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele :* $\int \frac{x-\sqrt{x+1}}{x+1+\sqrt{x+1}}\,dx$;

$\int \frac{1+x+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$; $\int \frac{x+2}{x(x+\sqrt[3]{x}+1)}\,dx$; $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^3}}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

Ind. v. P. 8.4.1.

8.2.50. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele :*

$$\int \frac{x-2}{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx;\quad \int x\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\,dx;\quad \int \frac{x^2-1}{x^2+1}\sqrt{x-1}\,dx.$$

Ind. v. P.8.4.2.

8.2.51. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele :* $\int \frac{dx}{\sqrt{x-3x^2}}$;

$\int \frac{x\,dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$; $\int (x+1)\sqrt{x^2-x+1}\,dx$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+4}}dx$;

$\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ *(facem mai întîi substituţia* $ax+b=t$*).*

Inv. v. P.8.4.3.

8.2.52. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele :* $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{-x}}$; $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^x+e^{2x}}$;

$\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}}$; $\int \frac{e^x\,dx}{(1+e^x+e^{2x})^2}$; $\int \frac{e^{-x}\,dx}{2+e^{2x}+e^{-2x}}$.

Ind. v. P. 8.3.6.

8.2.53. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele :*

$$\int x^{-5/4}(1-x^{-3/2})^{-3}\,dx;\quad \int x^2(1-x^{-2/3})^{-5/2}\,dx;\quad \int x^{-1/2}(1-x^{2/3})^{5/4}\,dx;$$

$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x^{-4})^3}}$; $\int x^{-1/3}(1+x^4)^{5/6}dx$; $\int x^{-1}(ax^n+b)^p\,dx$ $\left(\text{aici } \frac{m+1}{n}=0\in \mathbf{Z}\right)$

Ind. v. P.8.4.5.

Scanned with OKEN Scanner

8.2.54. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele* : $\int \frac{dx}{\sin x}$; $\int \frac{dx}{\cos x}$;

$\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$; $\int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} 4x}$; $\int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{\cos x + \operatorname{tg} x}$; $\int \frac{\sin x + \cos 2x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x} dx$.

Ind. v. P. 8.5.1.

8.2.55 Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele* : $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x_4} dx$; $\int \frac{dx}{1 + \sin^4 x}$;

$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$; $\int \frac{\sin x + \sin 2x}{\cos x + \cos 2x} dx$; $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$; $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} dx$;

$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$; $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$.

Ind. v. P. 8.5.2.

8.2.56. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele* : $\int \operatorname{ch}^3 x\, dx$; $\int \operatorname{th} x\, dx$:

$\int \frac{dx}{a + b \operatorname{sh} x}$; $\int \frac{dx}{a + b \operatorname{ch} x} (a^2 + b^2 \neq 0)$; $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$; $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$; $\int \frac{dx}{\operatorname{th} x}$; $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$.

Ind. v. P. 8.5.3.

8.2.57. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele* : $\int \sin^2 x \cos^5 x\, dx$,

$\int \sin^4 x \cos^4 x\, dx$; $\int \sin^3 x \cos^5 x\, dx$; $\int \sin^5 x \cos^4 x\, dx$.

Ind. v. P. 8.5.4.

8.2.58. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele* : $\int \sin^4 x\, dx$; $\int \cos^7 x\, dx$;

$\int \sin^5 x\, dx$; $\int \cos^6 x\, dx$; $\int \cos^7 x\, dx$; $\int \sin^n x \cos x\, dx$; $\int \sin^n x \sin 3x\, dx$.

Ind. v. P. 8.5.6.

8.2.59. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele* :

$$\int \frac{dx}{\operatorname{trig}^2 x}; \int \frac{dx}{\operatorname{trig}^3 x}; \int \frac{dx}{\operatorname{trig}^4 x}; \int \frac{dx}{\operatorname{trig}^5 x}.$$

P. 8.5.7.

8.2.60. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele* :

$$\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx; \quad \int x^2 \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx; \quad \int x \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx;$$

$$\int (x^2 \pm a^2) \sqrt{(x^2 \mp a^2)^3}\, dx; \quad \int (1 + \sqrt{x^2 \pm a^2})^n\, dx;$$

$$\int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} (n \in \mathbf{N}); \quad \int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} (n \in \mathbf{N}).$$

Ind. v. P. 8.6.1.

Scanned with OKEN Scanner

8.2.61. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele :*

$$\int x^4 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x ; \int x^5 \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x ; \int x^2 \mathrm{e}^{3x} \,\mathrm{d}x ; \int x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x ; \int x^n \mathrm{e}^{-x} \,dx.$$

Ind. v. P. 8.6.2.

8.2.62. Exerciţiu. *Să se calculeze primitivele :* $\int x^3 \sin x \,\mathrm{d}x ; \int x^4 \cos x \,\mathrm{d}x ;$

$\int x^2 \sin 2x \,\mathrm{d}x ; \int x^5 \cos 2x \,\mathrm{d}x ; \int (x+1)^3 \cos 3x \,\mathrm{d}x.$

Ind. v. P. 8.6.3.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 9

INTEGRABILITATE

9.1. Calculul cu funcţii integrabile

9.1.1. Exerciţiu. *Fie* $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x)=1$ *dacă* $x\in[0,1]\setminus\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right\}$ *şi* $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$, $(\forall)\ n\in\mathbf{N}$. *Să se arate cu ajutorul definiţiei că* f *este integrabilă şi* $\int_0^1 f=1$.

Soluţie. Fie $\varepsilon>0$ fixat şi $N\geqslant 1$ a.î. $\frac{1}{N}\leqslant\varepsilon$. Considerăm mai departe $\Delta=\{0=x_0<x_1<\dots<x_p=1\}$ o diviziune a lui $[0,1]$ cu $\nu(\Delta)<\frac{\varepsilon}{N}$ şi ξ_Δ o mulţime de puncte intermediare asociată lui Δ. Atunci

$$\sigma_f(\Delta,\xi_\Delta)=\sum_{i=1}^{p}f(\xi_i)\cdot(x_i=x_{i-1})\leqslant 1$$

şi

$$\sigma_f(\Delta,\xi_\Delta)\geqslant\sum_{i=2}^{p}f(\xi_i)\cdot(x_i-x_{i-1}).$$

Deoarece $f(\xi_i)=0$, $(\forall)\ \xi_i\in\left\{1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{N}\right\}$ şi $x_i-x_{i-1}\leqslant\nu(\Delta)$, rezultă că

$$\sigma_f(\Delta,\xi_\Delta)\geqslant\sum_{i=1}^{p}1\cdot(x_i-x_{i-1})-N\cdot\nu(\Delta)=$$

$$=(1-x_1)-N\cdot\nu(\Delta)\geqslant(1-\varepsilon)-\varepsilon=1-2\varepsilon.$$

Aşadar

$$1-2\varepsilon\leqslant\sigma_f(\Delta,\xi_\Delta)\leqslant 1,\ (\forall)\ \nu(\Delta)\leqslant\frac{\varepsilon}{N},$$

deci f este integrabilă şi $\int_0^1 f=1$.

9.1.2. Exerciţiu. *Fie* $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* : $f(x)=1$, *dacă* $x\in(0,1]$ *şi* $f(0)=0$. *Să se arate, plecînd de la definiţie, că* f *este integrabilă şi* $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție 1. Oricare ar fi $\Delta = \{x_0 = 0 < x_1 \ldots < x_p = 1\}$ o diviziune a lui $[0,1]$ și $\xi_\Delta = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p\}$ o mulțime de puncte intermediare asociate lui Δ avem:

$$\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) = \begin{cases} 1, & 0 < \xi_1 \leqslant x_1 \\ 1 - x_1, & \xi_1 = 0. \end{cases}$$

Fie $\varepsilon > 0$ și Δ de normă $\leqslant \varepsilon$. Atunci $x_1 = x_1 = x_0 \leqslant \nu(\Delta)$, deci $|\sigma_f(\Delta; \xi_\Delta) - 1| < \varepsilon$ și deci f este integrabilă (R) și avem $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

Soluția 2. Evident $s_f(\Delta) = 1 - x_1$ și $S_f(\Delta) = 1$, deci $S_f(\Delta) - s_f(\Delta) = x_1 < \nu(\Delta)$. Cum $s_f(\Delta) \leqslant S_f(\Delta)$, deducem că $\sup\limits_\Delta s_f(\Delta) = \inf\limits_\Delta S_f(\Delta) = 1$, deci $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 1$ și deci f este integrabilă Darboux, prin urmare avem $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

9.1.3. Exercițiu. *Fie funcția* $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1, 2]$. *Atunci* f *este integrabilă și avem* $\int_1^2 f(x)\,dx = \ln 2$.

Soluție. Deoarece f este continuă rezultă (T. 9.1.14. Cor. 1) că f este integrabilă. Atunci (T. 9.1.4. Cor. 1), $(\forall)$ $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de diviziuni ale lui $[1, 2]$ cu $\nu(\Delta_n) \to 0$ și $(\forall)$ $(\xi_{\Delta_n})_{n\geqslant 1}$ un șir de mulțimi de puncte intermediare cu ξ_{Δ_n} asociată lui Δ_n, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) = \int_1^2 f(x)\,dx.$$

Fie $q = \sqrt[n]{2}$, $\Delta_n = \{1, q, q^2, \ldots, q^n = 2\}$ și $\xi_{\Delta_n} = \{q, q^2, \ldots, q^n\}$. Atunci

$$\nu(\Delta_n) = \max\{q - 1, q(q-1), \ldots, q^{n-1}(q-1)\} = q^{n-1}(q-1) \to 0,$$

$$\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n})_n = \sum_{i=1}^n (q^j = q^{j-1})\frac{1}{q^j} = n\frac{q=1}{q} = \sqrt[n]{1/2}\,\frac{2^{1/n} - 1}{1/n}.$$

Se știe însă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{1/n} - 1}{1/n} = \ln$, deci

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/2}\,\frac{2^{1/n} - 1}{1/n} = 1 \cdot \ln 2 = \ln 2.$$

9.1.4. Exercițiu. *Fie* $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel:* $f(x) = x^2$, *dacă* $x \neq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ *și* $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$, $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}$. *Atunci* f *nu este integrabilă.*

Soluție. Mulțimea $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ fiind numerabilă, este evident neglijabilă, deci f este continuă a.p.t. Însă f nu este mărginită, deci cf. T.9.1.14, f nu este integrabilă.

Scanned with OKEN Scanner

9.1.5. Exercițiu *Fie* $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$, *dacă* $x\in(0,1]$ *și* $f(0)=0$. *Atunci* f *este integrabilă.*

Ind. $0\leqslant\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1$, $(\forall)\ x\in(0,1]$, deci f este mărginită. Evident f este continuă în $x_0\in(0,1]\Leftrightarrow\frac{1}{x_0}\notin\mathbf{Z}$, deci f este continuă pe mulțimea $[0,1]\setminus\left\{0,1,\frac{1}{2}\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}$ și deci f este continuă a.p.t. Aplicăm apoi T.9.1.14.

9.1.6. Exercițiu. *Să se calculeze* $\int_a^b e^x\,dx$ *cu ajutorul sumelor Riemann.*

Soluție. Plecam de la relația:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

Notăm $h=h(n)=\frac{b-a}{n}$. Atunci avem:

$$\int_a^b e^x\,dx=\lim_{n\to\infty}h\sum_{k=1}^{n}e^a\cdot e^{hk}=\lim_{n\to\infty}he^a\frac{e^h(1-e^{nh})}{1-e^h}=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{1-e^h}\cdot e^h(e^a-e^b).$$

Evident însă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h(n)}{1-e^{h(n)}}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{1-e^h}=-1\ \text{și}\ \lim_{n\to\infty}e^{h(n)}=\lim_{h\to 0}e^h=1$$

Prin urmare

$$\int_a^b e^x\,dx=e^b-e^a.$$

9.1.7. Exercițiu. *Să se calculeze integrale* $L:=\int_0^1\frac{dx}{x^2+2\alpha+1}$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$.

Soluție. $x^2+2\alpha+1=(x+\alpha)^2+(1=\alpha^2)$.

1° Dacă $\alpha\neq 1$, avem:

$$L=\frac{dx}{(x+\alpha)^2+(1-\alpha^2)}=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1+\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)$$

2° Dacă $\alpha=1$, avem $L=\int_0^1\frac{dx}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x+1}\Big|_\alpha^1=\frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

9.1.8. Exercițiu. *Să se calculeze integrala* $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$.

Soluție. Avem descompunerea (T. 4.9.9.) $\frac{1}{x^3+1} = \frac{c_1}{x+1} + \frac{c_2x+c_3}{x^2-x+1}$.

Prin identificare se deduce $c_1 = -c_2 = \frac{1}{3}$, $c_3 = -\frac{2}{3}$, deci

$$A = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\left(-x+\frac{1}{2}\right)+\left(2-\frac{1}{2}\right)}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{3}\ln(x+1)\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)\Big|_0^1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{ar\,ctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Big|_0^1 = \frac{\ln 2}{3} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

9.1.9. Exercițiu. *Să se arate că* $\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = 0$.

Soluție. Evident avem $0 < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$, $(\forall)\ x \in [n, n+1]$, deci

$$0 \leqslant \int_n^{n+1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \to 0 \ (n\to\infty).$$

9.1.10. Exercițiu. *Să se calculeze integrala* $L = \int_0^{\pi}\left|\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right|dx$.

Soluție. Evident avem:

$$\left|\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \\ \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}, & x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Atunci

$$L = \int_1^{\pi/4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x\right)dx + \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left(\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)dx + \int_{3\pi/4}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x\right)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{4} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

etc.

9.1.11. Exercițiu. *Să se calculeze integrala* $L = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Facem schimbarea de variabilă $x = \varphi(t) = \frac{\pi}{2} - t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; obținem:

$$L = \int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos^3(\pi/2 - t)\cdot(-1)\cdot dt}{\sin^3(\pi/2 - t) + \cos^3(\pi/2 - t)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t\, dt}{\cos^3 t + \sin^3 t}$$

Atunci $L + L = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$, deci $L = \frac{\pi}{4}$.

9.1.12. Exercițiu. *Să se calculeze integralele:* $\int_0^1 e^x \sin^2 x\, dx$, $\int_0^1 e^x \cos^2 x\, dx$.

Soluție. Deoarece $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ și (v. 8.6.5.)

$$\int e^x \cos 2x\, dx = \frac{e^x}{4}(\cos 2x + 2 \sin 2x) + C, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

avem

$$\int_0^1 e^x \sin^2 x\, dx = \left[\frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^x}{4}\cdot(\cos 2x + 2 \sin 2x)\right]_0^1 \text{ etc.}$$

9.1.13. Exercițiu. *Să se calculeze integrala* $\int_0^1 [2^n x]_*\, dx$.

Soluție. Fie $f(x) = [2^n x]_*$, $x \in [0, 1]$. Evident f este continuă pe $[0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots \frac{2^n - 1}{2^n}, 1\right\}$. Fie $k = \overline{1, 2^n}$ fixat; dacă $\frac{k-1}{2^n} \leqslant x < \frac{k}{2^n}$ avem $k - 1 \leqslant \frac{x}{2^n} < k$, deci $f(x) = k - 1$ și deci f este etajată. Atunci (P.9.3.3.Cor.3) avem:

$$\int_0^1 f = \sum_{k=1}^{2^n} (k-1)\left(\frac{k}{2^n} - \frac{k-1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}(k-1) = \frac{2^n - 1}{2}$$

9.1.14. Exercițiu. *Să se arate inegalitatea:*

$$1 - e^{-\pi/2} < \int_0^{\pi/2} e^{-\sin x}\, dx < \frac{\pi}{2}(1 - e^{-1}).$$

Ind. Din inegalitatea cunoscută

$$\frac{2x}{\pi} < \sin x < x, \quad (\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

rezultă

$$e^{-x} < e^{-\sin x} < e^{-2x/\pi}, \quad (\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

de unde prin integrare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se deduce inegalitatea căutată.

9.1.15. Exercițiu. *Să se stabilească relația:*

$$2\sqrt{e} \leqslant \int_0^1 e^{x^3}\, dx + \int_0^1 e^{1-x^3}\, dx \leqslant 1 + e$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $f(x) = e^{x^2} + e^{0-x^2}$, $x \in [0, 1]$. Evident f este derivabilă și avem $f'(x) = 2x(e^{x^2} - e^{1-x^2})$, $(\forall)$ $x \in [0, 1]$, deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x = +\frac{1}{\sqrt{2}}$. Atunci

$$\sup f([0,1]) = \max\left\{f(0), f(1), f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} = 1 + e$$

$$\inf f([0,1]) = \min\left\{f(0), f(1), f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} = 2\sqrt{e},$$

deci

$$2\sqrt{e} = (\inf f([0,1]))(1-0) \leqslant \int_0^1 f \leqslant (\sup f([0,1]))(1-0) = 1 + e$$

9.1.16. Exercițiu. *Pentru ce valori ale lui a din intervalul $[-2, 2]$ integrala $\int_{-1}^{+1} |x - a|\,dx$ este maximă (resp. minimă).*

Soluție. Fie $f(a) := \int_{-1}^{1} |x - a|\,dx$, $a \in [-2, 2]$.

1° $-2 \leqslant a < 1$. Atunci $f(a) = \int_{-1}^{1} (x - a)\,dx = \frac{1}{2}(x - a^2)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}[(1 - a)^2 - (1 + a)^2] = -2 \cdot a$

2° $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Atunci $f(a) = \int_{-1}^{a} |x - a|\,dx + \int_{a}^{1} |x - a|\,dx = -\frac{1}{2}(a - x)^2\Big|_{-1}^{a} + \frac{1}{2}(x - a)^2\Big|_{a}^{1} = \frac{1}{2}[(a + 1)^2 + (1 - a)^2] = a^2 + 1$

3° $1 < a \leqslant 2$. Atunci $f(a) = \int_{-1}^{1} (a - x)\,dx = -\frac{1}{2}(a - x)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}[(a + 1)^2 - (a - 1)^2] = 2 \cdot a$

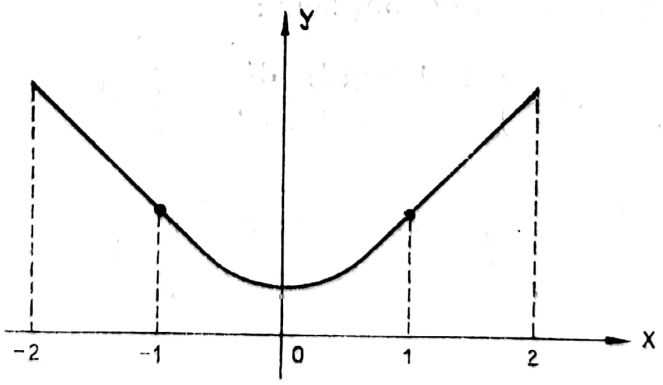


Fig. 104

Așadar (fig. 104), avem: $f(a) = \begin{cases} -2a, & -2 \leqslant a < -1 \\ a^2 + 1, & -1 \leqslant a \leqslant 1 \\ 2a, & 1 < a \leqslant 2, \end{cases}$

Prin urmare integrala dată este maximă (resp. minimă) pentru $|a| = 2$ (resp. $a = 0$)

Scanned with OKEN Scanner

9.1.17. Exerciţiu. *Să se calculeze* $A(\lambda)=\int_0^1 |x^2-\lambda|\,dx$, $\lambda\in\mathbf{R}$ *fixat.*

Ind.

$$|x^2-\lambda|=\begin{cases}\lambda-x^2, & \lambda\geqslant 1\wedge 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2-\lambda, & \lambda\leqslant 0\wedge 0\leqslant x\leqslant 1\\ \lambda-x^2, & 0<\lambda<1\wedge 0\leqslant x\leqslant\sqrt{\lambda}\\ x^2-\lambda, & 0<\lambda<1\wedge\sqrt{\lambda}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

$$A(\lambda)=\begin{cases}\int_0^1(\lambda-x^2)\,dx=\lambda-\frac{1}{3},\lambda\geqslant 1\\ \int_0^1(x^2-\lambda)\,dx=\frac{1}{3}-\lambda,\lambda\leqslant 0\\ \int_0^{\sqrt{\lambda}}(\lambda-x^2)\,dx+\int_{\sqrt{\lambda}}^1(x^2-\lambda)\,dx=\frac{4\lambda\sqrt{\lambda}}{4}-\lambda+\frac{1}{3},\lambda\in(0,1).\end{cases}$$

9.1.18. Exerciţiu. *Să se calculeze integralele*: $1^\circ\int_0^{2\pi}\sqrt{1\mp\cos x}\,dx$;

$2^\circ\int_{e^{-1}}^{e}|\ln x|\,dx$.

Ind. 1° $\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\cdot\sin\frac{x}{2}$, $(\forall)\ x\in[0,2\pi]$

2° Avem $\int_{e^{-1}}^{e}|\ln x|\,dx=\int_{e^{-1}}^{1}(-\ln x)\,dx+\int_1^e\ln x\,dx$

$$\int\ln x\,dx=x(\ln x-1)+C,\ (\forall)\ x\in\mathbf{R}_+^*.$$

9.1.19. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$.

Soluţie. Cu substituţia $x=\operatorname{tg}t$, obţinem:

$$L=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\operatorname{tg}t)}{1+\operatorname{tg}^2t}\frac{dt}{\cos^2t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\operatorname{tg}t)\,dt.$$

Deoarece

$$1+\operatorname{tg}t=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\sin t}{\cos t}=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t},$$

avem:

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right)dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt.$$

Cu substituţia $\frac{\pi}{4}-t=u$, deducem că $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt$.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare $L = (\ln \sqrt{2})\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

9.1.20. Exerciţiu. *Să se arate că* $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_0^t (\sqrt{x}+\sin x)\,dx = 0$.

Soluţie. Pentru $(\forall)\ t \in \mathbf{R}_+^*$ evident avem :

$$\left|\frac{1}{t^2}\int_0^t (\sqrt{x}+\sin x)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{t^2}\left(\int_0^t \sqrt{x}\,dx + \int_0^t |\sin x|\,dx\right) \leqslant \frac{1}{t^2}\left(\frac{2}{3}t^{3/2}+t\right).$$

Cum $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\left(\frac{2}{3}t^{3/2}+t\right)=0$, rezultă că $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_0^t (\sqrt{x}+\sin x)\,dx = 0$.

9.1.21. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $L = \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

Soluţie. Cu substituţia $x = \pi - t$, obţinem :

$$L = \int_{\pi}^{0}\frac{-(\pi-t)\sin(\pi-t)\,dt}{1+\cos^2(\pi-t)} = \int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t\,dt}{1+\cos^2 t} =$$

$$= \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t\,dt}{1+\cos^2 t} - \int_0^{\pi}\frac{t\sin t\,dt}{1+\cos^2 t},$$

deci

$$2L = \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t\,dt}{1+\cos^2 t} = -\pi\operatorname{arc\,tg}(\cos t)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} \Leftrightarrow L = \frac{\pi^2}{4}.$$

9.1.22. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\,dx$.

Soluţia 1. $\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

deci

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{e^x}_{u}\,\underbrace{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}_{dv} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx =$$

$$= \left(e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Soluţia 2. Avem $\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}\right) + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ şi

$$\int \underbrace{e^x}_{u}\,\frac{1}{2}\underbrace{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}_{dv}dx = e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \int e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx \text{ etc.}$$

Scanned with OKEN Scanner

9.1.23. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x\,dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$, $(a^2 + b^2 \neq 0)$.

Soluţie (i) Dacă $a^2 = b^2$ avem $L = -\frac{1}{2a^2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{a^2}$.

(ii) Dacă $a^2 \neq b^2$, avem succesiv :

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x\,dx}{\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2}\cos 2x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{a^2-b^2} \ln \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2-b^2}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{a^2-b^2} \left[\ln \left(\frac{a^2-b^2}{2} - \frac{a^2-b^2}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - \ln \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2} \right) \right] = \frac{\ln a^2 - \ln b^2}{a^2-b^2}.$$

9.1.24. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ $(a, b \in \mathbf{R}_+^*)$.

Soluţie. Fie $R(u, v) = \frac{1}{a^2 u^2 + b^2 v^2}$, $(u, v) \neq (0, 0)$. Evident avem $R(-u, -v) = R(u, v)$, deci (v. 8.5.2.) facem substituţia $x = \operatorname{tg} t$ şi obţinem :

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{b^2} \int_0^1 \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} =$$

$$= \frac{1}{b^2} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{1}{b^2} \frac{1}{\frac{a}{b}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\frac{a}{b}} \Big|_0^1 = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}.$$

9.1.25. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx$, *unde* $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbf{R}$ *sînt fixaţi. Dacă* $f \neq 0$, *atunci* f *ia valori atît pozitive cît şi negative pe fiecare interval de lungime* 2π.

Soluţie. Funcţia f este continuă şi avem :

$$\int_0^{2\pi} f = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^{2\pi} \cos kx\,dx = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Dacă $f|_{[0,2\pi]} \geqslant 0$, ar rezulta că $f|_{[0,2\pi]} = 0$ şi cum f este periodică de perioadă 2π, am deduce că $f = 0$, absurd. Aşadar pe intervalul $[0, 2\pi]$ funcţia f ia atît valori pozitive cît şi valori negative etc.

9.1.26. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x|\,dx$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $f(x) = |\sin x - \cos x|$, $x \in [0, 2\pi]$. Evident avem (fig. 105)

$$f(x) = \begin{cases} \cos x - \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \sin x - \cos x, & x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \\ \cos x - \sin x, & x \in \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right] \end{cases}$$

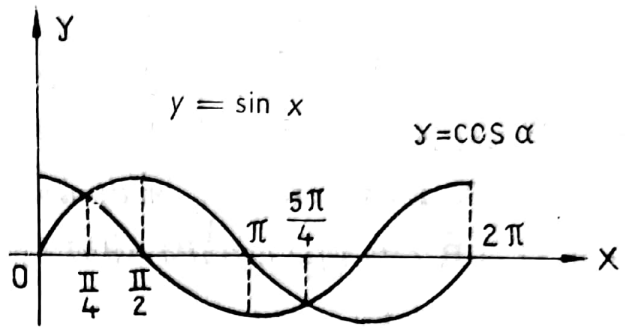


Fig. 105

Atunci

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx, \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\cos x - \sin x)\,dx =$$

$$= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + (\sin x + \cos x)\Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} =$$

$$= \left(2\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \left(2\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}.$$

9.1.27. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

Soluția 1

$$0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n, \ (\forall)\ x \in [0,1]$$

deci

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n} \to 0$$

Soluția 2

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^n x^n}{1+x}, \ x > 1$$

deci

$$(-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \int_0^1 [1 - x + x^2 - \ldots (-1)^{n-1} x^{n-1}]\,dx$$

și deci

$$\left|\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx\right| = \left|1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots (-1)^n \frac{1}{n} - \ln 2\right| \to 0.$$

Soluția 3. Din T. 9.2.10. Cor. 1 rezultă că există $\xi = \xi(n) \in [0,1]$ a.î.

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \frac{1}{1+\xi} \cdot \int_0^1 x^n\,dx \leqslant 1 \cdot \frac{1}{1+n} \to 0$$

Observație. Uneori se aplică greșit teorema de medie astfel : există $\xi \in (0,1)$ a.î.

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} = \xi^n \cdot \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \xi^n \ln 2 \to 0 \ (n \to \infty).$$

Șirul $(\xi^n)_{n \geq 1}$ poate tinde la 1, dacă $\xi = \xi(n) \to 0 \ (n \to \infty)$.

9.1.28. Exercițiu. *Fie mulțimea* $A := \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ *și* $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel : $f(x)$ este distanța de la x la mulțimea A. Să se calculeze* $\int_0^1 f$.

Soluție. Funcția f poate fi reprezentată grafic astfel (fig. 106) :

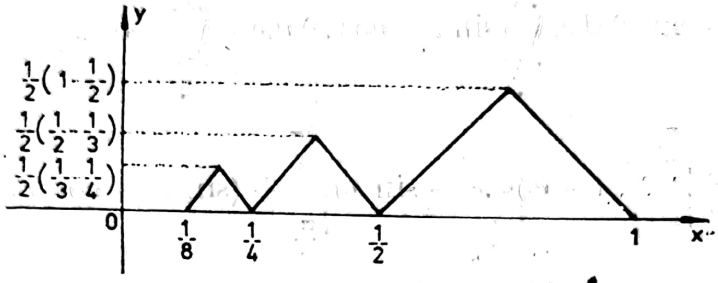


Fig. 106

Evident f este continuă, deci integrabilă și avem :

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{0} f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f.$$

Însă se vede imediat că avem

$$\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)^2, \ (\forall)\ k \geq 1,$$

deci

$$\int_0^1 f = \frac{1}{4}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{(n+1)^2} - 2 \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}\right)\right).$$

Rămîne să calculăm suma celor trei serii.

Se știe că $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, deci $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$.

Mai departe avem :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right), = 1$$

Prin urmare

$$\int_0^1 f = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6} - 1 - 2\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{3}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

9.1.29. Exerciţiu. *Fie* $0 < d \leqslant \pi$ *fixat. Atunci* $(\exists)\ M > 0$ *a.î. avem :*

$$\int_x^{x+d} |\sin t - \cos t|\, dt \geqslant M,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Să se determine cel mai mare număr $M > 0$ *care satisface inegalitatea* (1)

Soluţie. Fie $\varphi(x) = |\sin x - \cos x|$, $x \in \mathbf{R}$. Evident avem :

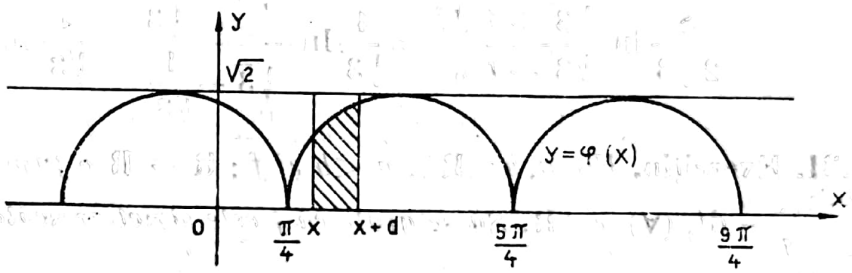
$$\varphi(x) = \left|\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| = \sqrt{2}\cdot\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|,\ x \in \mathbf{R}$$

şi

$$\varphi(x + \pi) = \varphi(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Graficul lui f arată astfel (fig. 107) :

Fig. 107



Se vede imediat că :

$$\int_x^{x+d} \varphi(x)\, dx = \sqrt{2}\int_x^{x+d} \left|\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right| dt \geqslant \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{d}{2}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{d}{2}} \left|\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right| dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}+\frac{d}{2}} \left|\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right| dt = 2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{d}{2}} |\sin\theta|\, d\theta =$$

$$= -2\sqrt{2}\cdot\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin\theta\, d\theta + 2\cdot\sqrt{2}\int_0^{\frac{d}{2}} \sin\theta\, d\theta =$$

$$= +2\sqrt{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{d}{2} - 1\right) = 2\sqrt{2}\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\frac{d}{2}\right).$$

Este clar că $M := 2\sqrt{2}\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\frac{d}{2}\right)$ este cel mai mare număr pozitiv cu proprietatea din enunţ.

9.1.30. Exerciţiu. *Să se arate că*

$$\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{4\ln 2}{\sqrt{3}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie f funcția de integrat. Evident $f(-x) = f(x)$, $(\forall)\ |x| \leqslant \frac{\pi}{6}$, deci f este pară și deci $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} f = 2\int_0^{\pi/6} f$. Cum avem

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{4}{2\cos 2x + 1},$$ cu substituția $\operatorname{tg} x = t$, obținem :

$$L = 2\int_0^{\pi/6} f = 8\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+2\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = 8\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{(\sqrt{3})^2 - t^2} =$$

$$= \frac{8}{2\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t}\right|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \ln\frac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \ln 2.$$

9.1.31. Exerciţiu. *Fie $a, b \in \mathbf{R}_+^*$, $a < b$ şi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel* $f(x) = \int_a^b \frac{\sin x t}{t}\, dt$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. *Să se arate că f este strict crescătoare pe intervalul* $\left[0, \frac{\pi}{a+b}\right]$.

Soluţie. Cu substituţia $xt = z$ funcţia f se scrie

$$f(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{\sin z}{z}\, dz \quad x \in \mathbf{R}.$$

Fie F o primitivă a funcţiei (continue) $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$, $z \in \mathbf{R}_+^*$. Atunci :

$$f(x) = F(bx) - F(ax),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*,$$

deci

$$f'(x) = bF'(bx) - aF'(ax),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$$

şi deci

$$f'(x) = b\,\frac{\sin bx}{bx} - a\,\frac{\sin ax}{ax} = \frac{2}{x}\cos\frac{(b+a)x}{2}\sin\frac{(b-a)x}{2},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*.$$

Dacă $x \in \mathbf{R}_+^*$, $-\frac{\pi}{2} < \frac{(b+a)x}{2} < \frac{\pi}{2}$ şi $0 < \frac{(b-a)x}{2} < \pi$, adică dacă $0 < x < \frac{\pi}{a+b}$ avem $f'(x) > 0$, prin urmare f este strict crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{a+b}\right]$,

9.1.32. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos nx}{1+\cos x}\, dx$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Avem $\cos nx = P_n(\cos x)$, P_n fiind polinom de grad n (Ap. 2.19), deci

$$\frac{\cos nx}{1+\cos x} = P_{n-1}(\cos x) \pm \frac{1}{1+\cos x}, \quad (\forall)\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

unde P_{n-1} este un polinom de grad $n-1$.

$$\text{u m} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \text{ și} \int_0^{\pi/2} \cos^k x\, dx \text{ este cunoscută}$$

(v. 9.4.1. Exemplul 11) deducem imediat valoarea integralei date.

9.1.33. Exercițiu. *Să se calculeze integrala*

$$\int_0^a \frac{\ln(a+x)}{a^2+x^2}\, dx,\ a \in \mathbf{R}_+^*.$$

Soluție. Facem substituția $\frac{x}{a} = t$. Atunci

$$L = \int_0^a \frac{\ln(a+x)}{a^2+x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{\ln a(1+t)}{a^2(1+t^2)}\, a\, dt =$$

$$= \frac{\ln a}{a}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\, dt.$$

Cu substituția arc tg $t = \theta$, a doua integrală devine

$$L_2 = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg}\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \ln(\sin\theta+\cos\theta)\, d\theta - \int_0^{\pi/4} \ln\cos\theta\, d\theta.$$

Însă $\cos\theta + \sin\theta = 2 \sin \pi/4 \cos(\theta - \pi/4)$, deci

$$L_3 = \int_0^{\pi/4} \ln(\sin\theta+\cos\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \ln\sqrt{2}\, d\theta + \int_0^{\pi/4} \ln\cos(\theta-\pi/4)\, d\theta.$$

Cu substituția $\theta - \pi/4 = -u$, obținem mai departe

$$L_3 = \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} - \int_{\pi/4}^0 \ln\cos u\, du = \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\pi/4} \ln\cos u\, du,$$

deci

$$L_2 = \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\pi/4} \ln\cos u\, du - \int_0^{\pi/4} \ln\cos\theta\, d\theta = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

și deci

$$L = \frac{\ln a}{a}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + L_2 = \frac{\ln a}{a}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8a}\ln 2.$$

9.1.34. Exercițiu. *Să se arate că*

1° $\int_1^2 \sqrt{\ln x}\, dx = \sqrt{\ln \xi}$, *unde* $1 < \xi < 4e^{-1}$;

2° $\left| e^{-x^2} - \int_0^1 e^{-t^2}\, dt \right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{e}}$, $(\forall)\ x \in [0,1]$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție 1°. Din inegalitățile lui Hölder (P. 7.3.2.) avem :

$$\left(\int_1^2 \sqrt{\ln x}\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_1^2 \ln x\,dx\right)\cdot\left(\int_1^2 1\cdot dx\right) =$$

$$= \int_1^2 \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1 = \ln 4e^{-1}$$

Din I formulă de medie rezultă că $(\exists)\ \xi \in (0, 1)$ a.î.

$$\int_1^2 \sqrt{\ln x}\,dx = \sqrt{\ln \xi},$$

deci

$$(\sqrt{\ln \xi})^2 \leqslant \ln 4e^{-1} \Leftrightarrow \xi < 4\,e^{-1}.$$

2° Evident avem inegalitatea :

$$\left|e^{-x^2} - \int_0^1 e^{-t^2}\,dt\right| \leqslant \int_0^1 |e^{-x^2} - e^{-t^2}|\,dt,\ (\forall)\ x \in [0, 1].$$

Să determinăm un majorant al funcției de sub integrală.
Evident $(\forall)\ x, t \in [0, 1]$ există, cf. T. 6.3.4., $\xi = \xi(x, t) \in (0, 1)$ a.î.

$$e^{-x^2} - e^{-t^2} = -2\cdot\xi\cdot e^{-\xi^2}(x - t).$$

Funcția $f(\theta) = \theta e^{-\theta^2}$, $\theta \in [0, 1]$ are pe $\theta = \frac{1}{2}$ punct de maxim, deci

$$\max_{0<\theta<1} \theta e^{-\theta^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

Atunci

$$|e^{-x^2} - e^{-t^2}| \leqslant 2\,|x - t|\,\frac{1}{\sqrt{2e}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{2e}} = \sqrt{\frac{2}{e}},\ (\forall)\ x,\ t \in [0,\ 1]$$

prin urmare

$$\left|e^{-x^2} - \int_0^1 e^{-t^2}\,dt\right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{e}},\ (\forall)\ x \in [0,\ 1].$$

9.1.35. Exercițiu. *Șirul* $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ *de funcții* :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \ldots\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \ldots$$

numit șirul trigonometric, este ortonormal pe $[0, 2\pi]$ *adică* : $\int_0^{2\pi} \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx =$

$= \delta_{nm}$, *unde* $\delta_{nm} = 0$, *dacă* $n \neq m$ *și* $\delta_{nm} = 1$, *dacă* $n = m$.
Soluție. Este suficient să arătăm că, $(\forall)\ n, m \in \mathbf{N}$ avem :

(i) $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\,dx = \delta_{nm}$;

(ii) $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx\,dx = \delta_{nm}$;

Scanned with OKEN Scanner

(iii) $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \delta_{nm}$;

(iu) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin nx\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos nx\, dx = 0.$

Să arătăm prima relație. Dacă $n \neq m$, atunci

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(n+m)x - \cos(n-m)x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n-m}\sin(n-m)x\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Dacă $n = m$, atunci $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos^2 nx)\, dx = 1.$

9.1.36. Exercițiu. *Să se calculeze cu ajutorul teoremei fundamentale a calculului integral o primitivă a funcției* $f(x) = \left|\frac{1}{2} - \sin x\right|$, $x \in [0, 2\pi]$.

Soluție. f fiind continuă, rezultă (T. 9.3.1.) că funcția $F(x) = \int_0^x f$, $x \in [a,b]$ este o primitivă a lui f. Cum avem $f(x) = \frac{1}{2} - \sin x$, dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$ și $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}$, dacă $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$, rezultă

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x \left(\frac{1}{2} - \sin t\right) dt, & x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \\ \int_0^{\pi/6} \left(\frac{1}{2} - \sin t\right) dt + \int_{\pi/6}^x \left(\sin t - \frac{1}{2}\right) dt, & x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \\ \int_0^{\pi/6} \left(\frac{1}{2} - \sin t\right) dt + \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(\sin t - \frac{1}{2}\right) dt + \int_{5\pi/6}^x \left(\frac{1}{2} - \sin t\right) dt, & x \in \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]. \end{cases}$$

Efectuînd calculele obținem:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + (\cos x - 1), & x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \\ \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1 - \frac{1}{2}x - \cos x, & x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \\ \cos x + \frac{1}{2}x + 2\sqrt{3} - 1 - \frac{2\pi}{3}, & x \in \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]. \end{cases}$$

9.1.37. Exercițiu. *Să se arate că* $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \frac{3\sqrt{n} + 2(n-1)\sqrt{n-1} - 1}{3}$, $(\forall)\ n \geq 1$.

Soluție. Fie $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbf{R}_+$. Evident f este strict crescătoare și strict pozitivă, deci (Fig. 108) avem:

$\sum_{k=2}^{n-1} f(k) < \int_2^{n-1} f$. Cum $\int_2^{n-1} f = \int_2^{n-1} \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x}\Big|_2^{n-1}$,

Scanned with OKEN Scanner

rezultă

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = f(1) + f(n) + \sum_{k=2}^{n-1} f(k) < 1 + \sqrt{n} + \frac{2}{3}(n-1)\sqrt{n-1} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

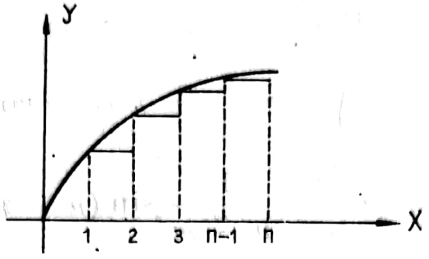


Fig. 108

9.1.38. Exerciţiu. *Să se stabilească relaţiile, calculînd în două moduri o anumită integrală:*

$$1^\circ\ 1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1);$$

$$2^\circ\ C_n^1 - \frac{1}{2}C_n^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}C_n^n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Ind. $1^\circ \int_0^1 (1+x)^n\,dx = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1),$

$$\int_0^1 (1+x)^n\,dx = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 C_n^k x^k\,dx^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k.$$

$$2^\circ \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\,dx = -\int_1^0 \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 t^k\,dt = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\,dx = \int_0^1 (C_n^1 - C_n^2 x + C_n^3 x^2 - \ldots)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_n^k.$$

9.1.39. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $L = \int_0^1 \sqrt{1+\sin x^{1/n}}\,dx$ $(n \in \mathbf{N})$.

Ind. Cu substituţia $x = 2^n t$, $t \in [0, 2^{-n}]$ obţinem:

$$L = 2^n \int_0^{2^{-n}} \sqrt{1+\sin 2t^{1/n}}\,dt = 2^n \int_0^{2^{-n}} (\sin t^{1/n} + \cos t^{1/n})\,dt;$$

o nouă substituţie $t = y^n$, $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ conduce la

$$L = n2^n \int_0^{1/2} y^{n-1}(\sin y + \cos y)\,dy.$$

Ţinem mai departe seama (v. 8.6.3.) că:

$$\int x^n \sin x\,dx = \sin x\,[nx^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \ldots] -$$

$$- \cos x\,[x^n - n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-2} - \ldots] \text{ etc.}$$

9.1.40. Exerciţiu. *Să se arate că* $\left|\ln\frac{1+b^2}{1+a^2}\right| \leqslant b - a$, $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}$, $a \leqslant b$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie funcția $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $x \in \mathbf{R}$. Se vede imediat că $|f(x)| \leqslant 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Atunci $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}$, $a \leqslant b$ avem :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant (b-a)\cdot 1,$$

deci

$$\left|\ln(1+x^2)\right|_a^b \leqslant b-a \Leftrightarrow \left|\ln\frac{1+b^2}{1+a^2}\right| \leqslant b-a.$$

9.1.41. Exercițiu. *Fie* $f, g : [-1,1] \to \mathbf{R}$ *două funcții definite astfel :* $f(x) = g(x) = 0$, $(\forall)\ x \in [-1,1]$, $x \neq \pm\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ *și* $f\left(\pm\dfrac{1}{n}\right) = 1$, $g\left(\pm\dfrac{1}{n}\right) = (-1)^n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. *Să se arate că* f *și* g *sînt integrabile, apoi să se calculeze* $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ *și* $\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$. *Să se observe că* 0 *este o discontinuitate de prima speță pentru* f *și de a doua pentru* g.

Ind. Se arată că f și g sînt continui exceptînd o mulțime numerabilă, apoi că sînt mărginite, deci (T. 9.1.14.) integrabilă. Se aplică mai departe formula Leibniz — Newton (T. 9.3.2.).

9.1.42. Exercițiu. *Fie* $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & (\forall)\ x \in [0,1],\ x \neq \dfrac{1}{n}\quad (n \in \mathbf{N}) \\ (-1)^n\ (\forall)\ x = \dfrac{1}{n}, & n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Să se arate că f *este integrabilă și să se calculeze* $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ind. Fie funcția $g(x) = x^2$, $(\forall)\ x \in [0,1]$. Se arată că f este mărginită pe $[0,1]$ și continuă a.p.t., deci integrabilă, apoi că $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

9.1.43. Exercițiu. *Să se calculeze integrala* $\int_0^1 \dfrac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ $(n \geqslant 1)$.

Ind. Facem substituția $x = \sin^2 t$, $t \in [0, \pi]$, apoi ținem seama de relația recursivă :

$$F_k = \frac{1}{k}\cos^{k-1} x \sin x + \frac{k-1}{k} F_{k-2},\quad (\forall) k \geqslant 2,$$

unde prin F_k am notat primitiva $\int \cos^k x\,\mathrm{d}x$.

9.1.44. Exercițiu. *Să se calculeze integrala* $\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2}\,\mathrm{d}x$, $(a > 0)$.

Ind. Cum $2ax - x^2 = a^2 - (x-a)^2$, cu substituția $x - a = t$ avem :

$$\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Aplicăm apoi formula 8.2.5. (12°) și obținem $\dfrac{a^2\pi}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

9.1.45. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\int_0^{\pi/2} \sin(x-a)\sin(x+a)\,dx$.

Ind. $\sin(x-a)\sin(x+a) = -\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 2a)$.

9.1.46. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x \sin^{2m+1} x\,dx$ $(n,m \in \mathbf{N})$.

Ind. Scriem $\int_0^{2\pi} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}$; cu substituţia $t = x - \pi$, obţinem

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos^{2n} x \sin^{2m+1} x\,dx = \int_0^{\pi} \cos^{2n}(t+\pi)\sin^{2m+1}(t+\pi)\,dt =$$

$$= -\int_0^{\pi} \cos^{2n} t \sin^{2m+1} t\,dt.$$

9.1.47. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\int_0^{\pi} |\sin x - |\cos x|\,dx$.

Ind.

$$|\sin x - |\cos x| = \begin{cases} \cos x - \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \\ \sin x - \cos x, & \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \sin x + \cos x, & \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} \\ -\cos x - \sin x, & \frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

deci

$$\int_0^{\pi} |\sin x - |\cos x|\,dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx +$$

$$+ \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\,dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/4} (\sin x + \cos x)\,dx + \int_{3\pi/4}^{\pi} (-\cos x - \sin x)\,dx.$$

9.1.48. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \max\{\operatorname{tg}^2 x, \operatorname{tg}^3 x\}\,dx$.

Ind.

$$\max\{\operatorname{tg}^2 x, \operatorname{tg}^3 x\} = \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg}^3 x, & -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

Ţinem mai departe cont de relaţia recursivă

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx, \quad (\forall)\ n \geqslant 2$$

Scanned with OKEN Scanner

9.1.49. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\int_0^{3\pi/4} \left| \frac{\cos x}{1+\cos x} \right| dx$.

Ind. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx = x - \int \frac{dx}{1+\cos x} = x - \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = x - \operatorname{tg}\frac{x}{2}$,

deci

$$\int_0^{3\pi/4} \left| \frac{\cos x}{1+\cos x} \right| dx = \left(x - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} - \left(x - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Big|_{\pi/2}^{3\pi/4}.$$

9.1.50. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\int_0^1 |(x-1)(x-\lambda)|\,dx$, $\lambda \in \mathbf{R}$ *parametru.*

9.1.51. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $L = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^4 x - \sin^2 x + \lambda} \left(\lambda > \frac{1}{4}\right)$.

Ind. Se obţine întîi $L = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\lambda - \frac{1}{4}\sin^2 2x}$ apoi că $L = \frac{\pi}{2\sqrt{(4\lambda-1)\lambda}}$.

9.1.52. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\int_0^{\ln n} [e^x]\,dx$, $(n \geqslant 1)$.

Ind. $\int_0^{\ln n} [e^x]\,dx = \int_0^{\ln 2} [e^x]\,dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} [e^x]\,dx + \ldots + \int_{\ln(n-1)}^{\ln n} [e^x]\,dx =$

$= 1 + \sum_{k=1}^{n} (k-1)[\ln k - \ln(k-1)]$.

9.1.53. Exerciţiu. *Să se arate inegalitatea :*

$$\int_a^b \sin \ln x\,dx < b(\ln b - 1) - a(\ln a - 1), \quad (\forall)\ 1 \leqslant a < b < \infty.$$

Ind. $\sin t < t$, $(\forall)\ t \in \mathbf{R}_+^*$; $\sin \ln x < \ln x$, $(\forall) x > 1$. Utilizăm apoi relaţia $\int \ln x\,dx = x \ln x - x$.

9.1.54. Exerciţiu.

$$a < \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \arcsin a, \quad (\forall)\ a \in (0,1)$$

Soluţie. $1 - x^{2n} < 1$, $(\forall)\ x \in (0, a)$ şi $1 - x^{2n} = (1-x^2) \times$

$\times (1 + x^2 + \ldots + x^{2n-1}) > 1 - x^2$, $(\forall)\ x \in (0, a)$, deci

$$a = \int_0^a dx < \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin a.$$

9.1.55. Exerciţiu. *Să se determine extremele funcţiei*

$$f(x) = \int_0^x (t^2 - 3)\,e^{t^2}\,dt, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ind. $f'(x) = (x^2 - 3)\,e^{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\sqrt{3})$	$\searrow$	$f(\sqrt{3})$	$\nearrow$	∞

9.1.56. Exerciţiu. *Fie* $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$ *o funcţie mărginită. Atunci avem :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0.$$

Ind. f fiind mărginită există $k > 0$ a.î. $|f(x)| \leqslant k$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$. Atunci avem :

$$\left|\int_0^1 x^n f(x)\,dx\right| \leqslant \int_0^1 x^n |f(x)|\,dx \leqslant k \cdot \int_0^1 x^n\,dx = \frac{k}{n+1}.$$

9.1.57. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{\sin x} e^{t^2}\,dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} e^{t^2}\,dt}$.

Ind. Avem o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$. Aplicăm L'Hospital :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^{\sin x} e^{t^2}\,dt\right)'}{\left(\int_0^{\operatorname{tg} x} e^{t^2}\,dt\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin^2 x} \cdot \cos x}{e^{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}} = 1$$

9.2. Funcţii integrabile. Proprietăţi generale

9.2.1. Exerciţiu. *Fie* $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcţie mărginită. Atunci* $(\forall)\ \Delta$ *o diviziune a lui* $[a, b]$, *avem inegalitatea :*

$$s_{f^2}(\Delta) - s_{f^2}(\Delta) \leqslant 2\,\|f\|_\infty\,(S_f(\Delta) - s_f(\Delta))$$

Soluţie. Fie $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathfrak{T} := \mathfrak{T}_{[a,b]}$ fixată şi $J_i := [x_{i-1}, x_i]\ (i = \overline{1, n})$. Atunci

$$f^2(x) - f^2(y) = (f(x) + f(y)) \cdot (f(x) - f(y)), \quad (\forall)\ x, y \in J_i,$$

deci

$$M_i(f^2) - m_i(f^2) = \sup_{x,\,y\in J_i} (f^2(x) - f^2(y)) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot \|f\|_\infty \sup_{x,\,y\in J_i} (f(x) - f(y)) = 2 \cdot \|f\|_\infty\,(M_i(f) - m_i(f))$$

şi deci

$$S_{f^2}(\Delta) - s_{f^2}(\Delta) = \sum_{i=1}^n (M_i(f^2) - m_i(f^2)) \leqslant$$

$$\leqslant 2\,\|f\|_\infty \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f)) = 2\,\|f\|_\infty\,(S_f(\Delta) - s_f(\Delta)).$$

Corolar 1. *Fie* $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcţie integrabilă. Atunci* f^2 *este integrabilă.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci (T. 9.1.8.) : $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \Delta \in \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{[a,b]}$ a.î. $S_f(\Delta) - s_f(\Delta) < \varepsilon/2\ \|f\|_\infty$. Din Ex. 9.2.1. rezultă

$$S_{f^2}(\Delta) - s_{f^2}(\Delta) \leqslant 2\ \|f\|_\infty \cdot \varepsilon/2\ \|f\|_\infty = \varepsilon,$$

deci (T. 9.1.8.) fg este integrabilă.

Corolar 2. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcții integrabile. Atunci fg este integrabilă.*

Soluție. Evident avem $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$. Funcțiile f și g fiind integrabile, rezultă (T. 9.2.5.) $f + g$ integrabilă, deci $(f+g)^2$ este integrabilă și deci (T. 9.2.5.) $\frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ este integrabilă etc.

Observație. În acest mod am demonstrat pe o altă cale T.9.2.6.

9.2.2. Exercițiu. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Dacă $\int_a^b f = 0$, atunci* $(\exists)\ x_0 \in (a, b)$ *a.î.* $f(x_0) = 0$.

Soluția 1. Dacă $f(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in (a, b)$, atunci (T.5.5.16. Cor. 3) $f > 0$ sau $f < 0$ pe (a, b); presupunem că sîntem în primul caz. Așadar $f \geqslant 0$, $\int_a^b f = 0$ și $f \neq 0$, absurd (P.9.2.13. Cor. 4). Rămîne că $(\exists)\ x_0 \in (a, b)$ a.î. $f(x_0) = 0$.

Soluția 2. Cf. T.9.2.10. Cor. 1, există $x_0 \in (a, b)$ a.î. $\int_a^b f = (b-a)f(x_0)$ etc.

Observație. Dacă f nu este continuă, Ex. 9.2.2. nu este numaidecît adevărat.

Contraexemplu. Fie $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = 1$, dacă $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ și $f(x) = -1$, dacă $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Atunci $\int_0^1 f = 0$ și $f(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$.

9.2.3. Exercițiu. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcții integrabile. Atunci avem inegalitățile :*

$$1^\circ\ \int_a^b \min\{f, g\} \leqslant \min\left\{\int_a^b f, \int_a^b g\right\};\quad 2^\circ\ \int_a^b \max\{f, g\} \geqslant \max\left\{\int_a^b f, \int_a^b g\right\}.$$

Soluție. Din P. 9.2.9. Cor. 2 avem că $\min\{f, g\}$ este integrabilă. Cum $\min\{f, g\} \leqslant f$ și $\min\{f, g\} \leqslant g$, rezultă :

$$\int_a^b \min\{f, g\} \leqslant \int_a^b f \text{ și } \int_a^b \min\{f, g\} \leqslant \int_a^b g,$$

deci

$$\int_a^b \min\{f, g\} \leqslant \min\left\{\int_a^b f, \int_a^b g\right\} \text{ etc.}$$

Analog se arată și a doua inegalitate.

9.2.4. Exercițiu *Fie $a, b \in \mathbf{R}_+$, $a < b$ și $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Să se calculeze $\int_a^b f(x)\,dx$ cu ajutorul sumelor Riemann cînd punctele de diviziune ale intervalului $[a, b]$ sînt în progresie geometrică.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $\Delta_n = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_n = b\}$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ a.î. $x_k = q\, x_{k-1} (1 \leqslant k \leqslant n-1)$. Atunci

$$x_0 = a, \quad x_1 = aq, \quad x_2 = aq^2, \dots x_n = aq^{n-1},$$

deci

$$q = q(n) = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \quad \text{și} \quad \nu(\Delta_n) = a(q-1)\, q^{n-1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

În acest caz avem :

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, f(x_{k-1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a(q-1)\, q^{k-1} f(aq^{k-1}) = \lim_{n\to\infty} a(q-1) \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} f(aq^{k-1})$$

Prin urmare

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} a(q-1) \sum_{k=0}^{n-1} q^k f(aq^k)}, \text{ unde prin } q \text{ am notat } \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

Aplicație. Să se calculeze $\int_a^b x^\alpha\, \mathrm{d}x$ $(a, b \in \mathbf{R}_+,\ a < b\,;\ \alpha \in \mathbf{R},\ \alpha \neq 1)$.

Avem

$$\int_a^b x^\alpha\, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} a(q-1) \sum_{k=0}^{n} q^k\, (aq^k)^\alpha =$$

$$= \lim_{n\to\infty} a^{\alpha+1} (q-1) \sum_{k=0}^{n-1} (q^{\alpha+1})^k = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha+1} (q-1)\, \frac{1-(q^{\alpha+1})^n}{1-q^{\alpha+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} a^{\alpha+1} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha+1} - 1\right) \frac{1-q}{1-q^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1} (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}),$$

deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-q}{1-q^{\alpha+1}} = \lim\limits_{q\searrow 1} \dfrac{1-q}{1-q^{\alpha+1}} = \dfrac{1}{\alpha+1}$.

9.2.5. Exercițiu. *Fie* $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci :*

$$\int_0^\pi x f(\sin\ x)\, \mathrm{d}x = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, \mathrm{d}x \tag{1}$$

Soluție. Evident avem :

$$\int_0^\pi x f(\sin\ x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} x f(\sin x)\ \mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} x f(\sin\ x)\ \mathrm{d}x$$

Cu substituția $x = \pi - t$, $t \in [0, \pi/2]$ a doua integrală devine :

$$-\int_0^{\pi/2} (\pi - t)\, f(\sin\,(\pi - t)\, (-\mathrm{d}t) = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin t)\, \mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} t f(\sin t)\ \mathrm{d}t,$$

de unde obținem relația (1).

Scanned with OKEN Scanner

9.2.6. Exercițiu. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcție continuă a.î. graficul său este simetric față de dreapta* Δ *de ecuație* $x=\frac{1}{2}(a+b)$. Atunci :

$$1^\circ\ \int_a^b f(x)\,dx=2\int_a^{1/2(a+b)} f(x)\,dx;\quad 2^\circ\ \int_a^b xf(x)\,dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Soluție. Fie $c=\frac{1}{2}(a+b)$. Atunci G_f, graficul lui f este simetric față de dreapta $\Delta \Leftrightarrow f(c-x)=f(c+x)$, $(\forall)\ 0\leqslant x\leqslant \frac{b-a}{2} \Leftrightarrow f(a+b-x)=f(x)$, $(\forall)\ x\in[a,b]$.

1° Evident avem : $\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^c f(a+b-x)\,dx$, deci cu substituția $x=a+b-t, t\in[c,b]$, obținem : $\int_a^c f(a+b-x)\,dx=\int_c^b f(t)\,dt$ și deci

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)+\int_c^b f(x)\,dt=2\int_a^c f(x)\,dx.$$

2° Cu substituția $x=a+b-t$, $t\in[a,b]$, obținem :

$$\int_a^b xf(x)\,dx=-\int_c^b (a+b-t)f(a+b-t)(-dt)=(a+b)\int_a^b f(t)\,dt)-\int_a^b tf(t)\,dt,$$

deci $2\int_a^b xf(x)\,dx=(a+b)\int_a^b f(t)\,dt$.

9.2.7. Exercițiu. *Fie* $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci*

$$\int_0^\pi f(\sin x)\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx.$$

Soluție. Funcția $x\mapsto f(\sin x)$, $x\in[0,\pi]$, fiind continuă, este integrabilă. Evident avem :

$$L=\int_0^\pi f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\sin x)\,dx$$

Cu substituția $t=\pi-x$, a doua integrală devine :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\sin x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin(\pi-t)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,dt.$$

Prin urmare $L=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$.

9.2.8. Exercițiu. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcție de clasă* $\mathcal{C}^2$ *a.î.* $f(a)=f(b)$. *Atunci* $\int_b^a xf''(x)\,dx=bf'(b)-af'(a)$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie funcția $\varphi(x) = xf'(x) = f(x)$, $x \in I = [a, b]$.

Evident φ este de clasă $\mathcal{C}^1$ și avem : $\varphi'(x) = xf''(x)$, $(\forall)\ x \in I$, deci φ este o primitivă a funcției $x \mapsto xf''(x)$, $x \in I$. Atunci cu formula Leibniz-Newton obținem :

$$\int_a^b xf''(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a) = [bf'(b) - f(b)] - [af'(a) - f(a)] = bf'(b) - af'(a).$$

9.2.9. Exercițiu. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție monoton crescătoare. Atunci*

$$f(a) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leqslant f(b).$$

Soluție. Evident avem $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, $(\forall)\ x \in [a, b]$, de unde prin integrare obținem :

$$(b-a)f(a) = \int_a^b f(a)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(b)\,dx = (b-a)f(b)$$

Corolar 1.

$1^\circ\ \ 1 < \int_0^1 e^{x^2}dx < e$; $2^\circ\ \sqrt{3} < \int_2^5 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx < \sqrt{6}$.

Soluție. 2° Fie $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x \in [2, 5]$. Atunci $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$, $(\forall)\ x \in [2, 5]$, deci f este strict crescătoare și deci $\sqrt{f}$ este strict crescătoare Cum $\sqrt{f(2)} = \sqrt{\frac{1}{3}}$ și $\sqrt{f(5)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, rezultă $3\sqrt{\frac{1}{3}} < \int_2^5 \sqrt{f} < 3\sqrt{\frac{2}{3}}$ etc.

9.2.10. Exercițiu. *Fie* $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ *o funcție mărginită și local integrabilă. Atunci* $(\forall)\ d > 0$, *avem* $\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+d} \frac{f(x)}{x}\,dx = 0$.

Soluție. Fie $M := \sup_{x\in\mathbf{R}_+} |f(x)|$. Evident avem :

$$\left|\int_n^{n+d} \frac{f(x)}{x}\,dx\right| \leqslant M \cdot \int_n^{n+d} \frac{dx}{x} = M \ln x \Big|_n^{n+d} =$$

$$= M\ln(n+d) - \ln n) = M \ln\left(1 + \frac{d}{n}\right) \to 0\ (n \to \infty)$$

9.2.11. Exercițiu. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă cu proprietatea că* $\int_a^b f = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$. *Atunci* $(\exists)\ x_0 \in (a, b)$ *a.î.* $f(x_0) = x_0$.

Soluția 1. Fie $g(x) = f(x) - x$, $x \in [a, b]$. Evident g este continuă și avem $\int_a^b g = \int_a^b f - \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = 0$. Dacă $g(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in (a, b)$, rezultă că $g > 0$ sau $g < 0$ pe (a, b); presupunem că sîntem în primul caz. Atunci $\int_a^b g > 0$, absurd. Prin urmare $(\exists)\ x_0 \in (a, b)$ cu $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția 2. Aplicăm prima formulă de medie (T.9.2.10). Atunci $(\exists)\ x_0 \in (a, b)$ a.î. $\int_a^b g = (b-a)\, g(x_0)$, deci $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.

Corolar 1. *Fie* $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă a.î.* $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. Atunci $(\exists)$ $x_0 \in (0,1)$ *a.î.* $f(x_0) = x_0$.

9.2.12. Exercițiu. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval și* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci cond.* 1°—3° *sînt echivalente :*

1° f *constantă* ;

2° $\frac{1}{b-a}\int_a^b f \geqslant \max\{f(a), f(b)\}$, $(\forall)\ a, b \in I,\ a \neq b$;

3° $\frac{1}{b-a}\int_a^b f \leqslant \min\{f(a), f(b)\}$, $(\forall)\ a, b \in I,\ a \neq b$.

Soluție. 2° $\Rightarrow$ 1° Fie $a, b \in I$, $a < b$, fixați. Funcția f fiind continuă, $(\exists)$ $c \in [a, b]$ a.î. $f(c) \geqslant f(x)$, $(\forall)\ x \in [a, b]$. Presupunem $c \in (a, b)$. Din ipoteză rezultă :

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f \geqslant \max\{f(a) f(c)\} = f(c) = \frac{1}{c-a}\int_a^c f(c)\, dx,$$

deci $\int_a (f(x) - f(c))\, dx \geqslant 0$. Cum $f(x) - f(c) \leqslant 0$ pe $[a, c]$, deducem că $\int_a^c f(x) - f(c))\, dx = 0$, deci (P.9.2.13.) $f - f(c)$ este identic 0 pe $[a, c]$. Analog obținem că $f - f(c)$ este identic 0 pe $[c, b]$, deci $f(a) = f(c) = f(b)$, prin urmare f este constantă.

Implicația 3° $\Rightarrow$ 1° se arată la fel iar 1° $\Rightarrow$ 2° (resp. 3°) este evidentă.

9.2.13. Exercițiu. *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcții continue pe* (a, b) *și mărginite. Atunci* $(\exists)\ c \in (a, b)$ *a.î.* $g(c)\int_a^c f + f(c)\int_b^c g = 0$.

Soluție. Fie $F(x) := \left(\int_a^x f\right)\left(\int_b^x g\right)$, $x \in [a, b]$. Atunci (T.9.3.1.) :

F este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) și evident $F(a) = F(b) = 0$, deci (T.6.3.2.) $(\exists)\ c \in (a, b)$ a.î. $F'(c) = 0$. Cum avem :

$$F'(x) = f(x)\int_b^x g + g(x)\int_a^x f, \quad (\mathsf{A})\ x \in (a, b),$$

punem $x = c$ și obținem relația căutată.

9.2.14. Exercițiu. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție de două ori derivabilă cu proprietatea că* $\frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(a) = f(b)$. *Atunci* $(\exists)\ x_0 \in (a, b)$ *a.î.* $f''(x_0) = 0$.

Dem. Din T.9.2.10. Cor. 1 rezultă că $(\exists)\ c \in (a, b)$ a.î. $\int_a^b f = (b-a) f(c)$, deci $f(a) = f(b) = f(c)$ și deci (T.6.3.2.) $(\exists)\ x_0 \in (a, b)$ a.î. $f''(c) = 0$.

9.2.15. Exercițiu. *Să se determine numerele reale* A, B, C *a.î. avem :*

$$\int_{-1}^1 f(x)\, dx = Af\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + Bf(0) + Cf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad (1)$$

pentru orice funcție polinomială reală f *de grad* $\leqslant 3$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci (1) se transcrie :

$$\frac{2}{3}a_1 + 2a_3 = A\left(-\frac{a_0}{2\sqrt{2}} + \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{\sqrt{2}} + a_3\right) + Ba_3 +$$

$$+ C\left(\frac{a_0}{2\sqrt{2}} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{\sqrt{2}} + a_3\right),$$

deci

$$\frac{2}{3}a_1 + 2a_3 = (C - A)\frac{a_0}{2\sqrt{2}} + (C + A)\frac{a_1}{2} + (C - A)\frac{a_1}{\sqrt{2}} + (A + B + C)\,a_3$$

Ultima relație fiind adevărată pentru orice valoare dată lui a_0, a_1, a_2, a_3. prin particularizare obținem : $C - A = 0$, $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}(C + A)$, $2 = A + B + C$, deci $A = B = C = \frac{2}{3}$.

9.2.16. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ continuă. Atunci $f = 0 \Leftrightarrow \int_a^b f = 0$, $(\forall)$ $a, b \in I$ $a < b$.*

Soluție. ($\Leftarrow$) Presupunem că $(\exists)$ $x_0 \in I$, $f(x_0) \neq 0$, spre exemplu $f(x_0) > 0$. Atunci $f(x_0) > \frac{1}{2}f(x_0)$, deci (P.5.5.14). $(\exists)$ $a, b \in I$, $a < b$, cu $x_0 \in [a, b] \subseteq I$ și $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0)$, $(\forall)$ $x \in [a, b]$ și deci $0 = \int_a^b f \geq \frac{b-a}{2} f(x_0) > 0$, absurd. Rămîne că $f(x_0) = 0$, prin urmare $f = 0$.

9.2.17. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $\alpha f(x) + \beta f(-x) = \gamma$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ și $\alpha + \beta \neq 0$. Atunci $(\forall)$ $a \in \mathbf{R}$ avem : $\int_{-a}^{a} f = \frac{2a\gamma}{\alpha + \beta}$.*

Soluție. Evident avem $\alpha \int_{-a}^{a} f(x)\,dx + \int_{-a}^{a} f(-x)\,dx = \int_{-a}^{a} \gamma\,dx = 2a\gamma$

Deoarece (P.9.4.9.(1°)) avem $\int_{-a}^{a} f(-x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx$, rezultă relația

$$(\alpha + \beta)\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2a\,\gamma \text{ etc.}$$

9.2.18. Exercițiu. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă. Dacă f este egală cu o constantă λ pe o mulțime A densă în $[a, b]$, atunci $\int_a^b f = \lambda\,(b - a)$.*

Soluție. Fie $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{[a,b]}$ fixată. Cum A este densă în $[a, b]$, $(\exists)$ $\xi_\Delta = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ cu $\xi_i \in A \cap (x_{i-1}, x_i)$, $(\forall)$ $i \in \overline{1, n}$. Atunci avem :

$$\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(x_i - x_{i-1}) = \lambda(b - a)$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie acum $(\Delta_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{T}$ fixat cu $\nu(\Delta_n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Pentru fiecare Δ_n $(n \geq 1)$ $(\exists)$ $(\xi_{\Delta_n}$ o mulțime de puncte intermediare asociată lui Δ_n a.î. $\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) = \lambda(b-a)$. Din T.9.1.4. Cor. 1 deducem :

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) = \lambda(b-a)$$

9.2.19. Exercițiu. *Fie* $P_i \in \mathbf{R}[X]$ $(i = \overline{1, n})$ *patru polinoame. Atunci funcția polinomială* $f(x) = \int_1^x P_1(t)\,P_3(t)\,dt \cdot \int_1^x P_2(t)\,P_4(t)\,dt = \int_1^x P_1(t)\,P_4(t)\,dt \cdot \int_1^x P_2(t)\,P_3(t)\,dt$ *se divide la* $(x-1)^4$.

Soluție. f se devide la $(x-1)^4 \Leftrightarrow f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0$ Evident avem :

$$f(x') = P_1\,P_3 \cdot \int_1^x P_2P_4 + P_2P_4 \int_1^x P_1P_3 - P_1P_4 \int_1^x P_2P_3 - P_2P_3 \int_1^x P_1\,P_4$$

$$f''(x) = (P_1P_3)' \int_1^x P_2P_4 + (P_2P_4)' \int_1^x P_1P_3 - (P_1P_4)' \int_1^x P_2P_3 - (P_2P_3)' \int_1^x P_1P_4 +$$

$$+ (P_1P_3)(P_2P_4) + (P_2P_4)(P_1P_3) - (P_1P_4)(P_2P_3) - (P_2P_3)(P_1P_4) =$$

$$= (P_1P_3)' \int_1^x P_2P_4 + (P_2\,P_4)' \int_1^x P_1P_3 - (P_1P_4)' \int_1^x P_2P_3 - (P_2P_3)' \int_1^x P_1P_4$$

$$f'''(x) = (P_1P_3)'' \int_1^x P_2P_4 + (P_2P_4)'' \int_1^x P_1P_3 - (P_1P_4)'' \int_1^x P_2P_3 - (P_2P_3)'' \int_1^x P_1P_4 +$$

$$+ (P_1P_3)'(P_2P_4) + (P_2P_4)'\,P_1P_3 - (P_1P_4)'\,P_2P_3 - (P_2P_3)'(P_1P_4)$$

Cum avem :

$$(P_1P_3)'\,P_2P_4) + (P_2P_4)'\,P_1P_3 = (P_1P_2P_3P_4)',$$

$$(P_1P_4)'\,P_2P_3 - (P_2P_3)'(P_1P_4) = (P_1P_2P_2P_4),$$

rezultă

$$f'''(x) = (P_1P_3)'' \int_1^x P_2P_4 + (P_2P_4)' \int_1^x P_1P_3 - (P_1P_4)' \int_1^x P_2P_3 -$$

$$- (P_2P_3)'' \int_1^x P_1P_4$$

Ținînd seama de expresiile lui f, f', f'', f''', deducem că $f(1) = f'(1) = f''(1) = f''(1) = 0$ q.e.d.

9.2.20. Exercițiu. *Fie* $f, g : [a, b] \to [c, d]$ *două funcții continue pe* $[a, b]$ *și derivabile pe* (a, b) *și* $\varphi : [c, d) \to \mathbf{R}^*$ *o funcție continuă. Dacă* $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$ *și* $g'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in (a, b))$, *atunci există* $c \in (a, b)$ *a.î.*

$$\frac{(\varphi \circ g)(c)}{(\varphi \circ f)(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} \varphi$, $x \in [a, b]$. Evident (T.9.3.1.) F este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) și $F(a) = F(b) = 0$. Atunci cf. T.6.3.2. există $c \in (a, b)$ a.î. $F'(c) = 0$. Însă

$$F'(x) = \varphi(g(x))\, g'(x) - \varphi f(x)) \cdot f'(x), \ (\forall)\ x \in (a, b),$$

deci

$$F'(c) = 0 \Leftrightarrow (\varphi \circ g)(c)/(\varphi \circ f)(c) = f'(c) / g'(c)$$

9.2.21. Exercițiu. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcțiuni, cu g integrabilă și $\omega_f(J) \leqslant \omega_g(J)$, $(\forall)$ J un interval compact inclus în $[a, b]$; în particular $|f(x) - f(y)| \leqslant |g(x) - g(y)|$, $(\forall)$ $x, y \in [a. b]$. Atunci f este integrabilă.*

Soluție. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Funcția g fiind integrabilă, $(\exists)$ $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ o diviziune a lui $[a, b]$ a.î. $S_g(\Delta) - s_g(\Delta) \leqslant \varepsilon$. Deoarece $\omega_f(J_i) \leqslant \omega_g(J_i)$, $(\forall)$ $i = \overline{1, n}$, unde $J_i := [x_{i-1}, x_i]$, rezultă :

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \omega_f(J_i) \cdot |J_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_g(J_i) \cdot |J_i| \leqslant S_g(\Delta) - s_g(\Delta) \leqslant \varepsilon$$

Prin urmare (T.9.1.7. (3°)) f este integrabilă.

9.2.22. Exercițiu *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $\int_a^b f(x)\, dx < 0$ și există $x_0 \in (a, b)$ astfel încît $f(x_0) > 0$. Atunci există cel puțin un punct c în (a, b) în care f se anulează.*

Soluție. Dacă am avea $f(x) > 0$, $(\forall)$ $x \in (a, b)$ atunci $\int_a^b f\, dx > 0$, absurd. Așadar există cel puțin un punct $x_0 \in (a, b)$ astfel încît $f(y_0) < 0$. Funcția f fiind continuă și $f(x_0)\, f(y_0) < 0$ există cel puțin un punct c cuprins între x_0 și y_0 deci în (a, b) astfel încît $f(c) = 0$.

Observație. Dacă f este numai integrabilă, proprietatea din enunț nu este numaidecît adevărată.

9.2.23. Exercițiu. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă nenegativă, $m = \inf f([a, b])$ și $M = \sup f([a, b])$. Atunci*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f = m \ (resp.\ M) \Leftrightarrow f = m \ (resp.\ M.).$$

Soluție. ($\Rightarrow$) Presupunem că există $x_0 \in [a, b]$ cu $f(x_0) > k > m$. Deoarece funcția f este continuă, există $[c, d] \subseteq [a, b]$, $c < d$ cu proprietatea că $f(x) \geqslant k$, $(\forall)$ $x \in [c, d]$. Atunci avem :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f = \frac{1}{b-a}\left(\int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{b-a}((c-a)\, m + (c-d)\, k + (b-d)\, m) >$$

$$> \frac{m}{b-a}((c-a) + (b-d) + (b-d)) = m,$$

absurd. Rămîne că $f = m$.

9.2.24. Exercițiu. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă neidentic nulă cu proprietățile : $f(a) = f(b) \neq 0$ și $\int_a^b f = 0$. Atunci f se anulează cel puțin de două ori pe (a, b).*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $f(a) = f(b) > 0$. Presupunem că $f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in (a, b)$. Cum $\int_a^b f = 0$, rezultă că $f = 0$, absurd. Rămîne că $(\exists)\ c \in (a, b)$ cu $f(c) < 0$. Aplicăm mai departe proprietatea lui Darboux pe $[a, c]$ și $[c, b]$.

Observație. Dacă $f(a) = f(b) = 0$ și $\int_a^b f = 0$, funcția f se poate anula exact o dată pe (a, b).

9.2.25. Exercițiu. *Fie $a > 1$ și $f : [0, a] \to \mathbf{R}$ o funcție de clasă $\mathcal{C}^1$. Să se calculeze integrala* $L = \int_0^a E(x) \cdot f'(x)\, dx$.

Soluție. Descompunem $[0, a]$ în intervalele parțiale $[0,1]$, $[1,2]$, ... $[E(a) - 1,\ E(a)]$, $[E(a), a]$. Atunci avem :

$$L = \int_0^1 E(x) f'(x)\, dx + \ldots + \int_{E(a)-1}^{E(a)} E(x)\, f'(x)\, dx + \int_{E(a)}^a (E(x) f'(x)\, dx =$$

$$= \int_1^a 1 \cdot f'(x)\, dx + \int_2^3 2f'(x)\, dx + \ldots + \int_{E(a)-1}^{E(a)} (E(a) - 1)) f'(x) dx +$$

$$+ \int_{E(a)}^a E(a) f'(x)\, dx = 1(f(2) - f(1)) + 2\,(f(3) - f(2)) + \ldots + (E(a) - 1) \times$$

$$\times (f(E(a)) - f(E(a) - 1)) + E(a) f(a) - f(E(a)) = E(a)\ f(a) - \sum_{b=1}^{E(a)} f(k).$$

9.2.26. Exercițiu. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă a.î. $|f'(x)| \leqslant |f(x)|$, $(\forall)\ x \in (a, b)$. Atunci avem inegalitatea :*

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \int_x^y |f|,\ (\forall)\ a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$$

Soluție. Fie $F(x) = \int_a^x |f|$, $x \in [a, b]$. Atunci F este derivabilă și avem $F'(x) = |f(x)|$, $(\forall)\ x \in [a, b]$, deci $|f'(x)| \leqslant F'(x)$, $(\forall)\ x \in (a, b)$. Ținînd seama de P.7.3.12. rezultă că $(\forall)\ a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$, avem :

$$|f(y) - f(x)| \leqslant F(y) - F(x),$$

deci

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \int_a^y |f| - \int_a^x |f| = \int_x^y |f|$$

9.2.27. Exercițiu. *Fie $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă. Atunci*

$$\frac{1}{p} \int_0^1 f = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^{p-1}}{n^p} f\left(\frac{k^p}{n^p}\right),\quad (\forall)\ p \in [1, \infty]$$

Soluție. Fie $g(x) = x^{p-1} f(x^p)$, $x \in [0, 1]$. Din T.9.2.7. și T.9.2.6. rezultă că g este integrabilă, deci (T.9.1.4. Cor. 1) avem $\int_0^1 g = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right)$. Cu schimbarea de variabilă $u = x^p$, $x \in [0,1]$, deducem :

$$\int_0^1 g = \int_0^1 x^{p-1}\, f(x^p)\, dx = \frac{1}{p} \int_0^1 f(x^p)\, (x^p)'\, dx = \frac{1}{p} \int_0^1 f(u)\, du$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama că

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{p-1} f\left(\frac{k^p}{n^p}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{p-1}}{n^p} f\left(\frac{k^p}{n^p}\right),$$

rezultă afirmaţia din enunţ.

9.2.28. Exerciţiu. *Fie* $f:[a,\ b]\to \mathbf{R}$ *o funcţie mărginită şi continuă cu excepţia unui singur punct. Atunci* f *este integrabilă.*

Soluţie. Presupunem pentru simplitate f discontinuă în a. Fie $\varepsilon>0$ fixat şi $c\in(a,\ b)$ cu $c=a\leqslant \frac{\varepsilon}{4M}$ (1), unde $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. Funcţia f fiind continuă pe $[c,\ b]$, care este compact, este uniform continuă, deci $(\exists)\ \eta>0$ a.î.

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)},\ (\forall)\ x,y\in[c,\ b],\ |x-y|<\eta \qquad (2)$$

Fie acum $\Delta_0=\{c=x_0<x_1\ldots<x_n=b\}$ o diviziune a lui $[c,\ b]$ de normă $\leqslant\eta$ şi $\Delta=\{a\}\cup\Delta_0$. Atunci

$$S_f(\Delta)-s_f(\Delta)=(M_0-m_0)(c-a)+\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}),$$

unde $M_0=\sup\limits_{x\in[a,c]} f(x)$, $m_0=\inf\limits_{x\in[a,c]} f(x)$ şi $M_i,\ m_i\ (i=\overline{1,\ n})$ au semnificaţiile standard. Din (1) rezultă $(M_0-m_0)(c-a)\leqslant 2M(c-a)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ iar din (2) rezultă

$M_i-m_i\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, $(\forall)\ i=\overline{1,\ n}$, deci

$$S_f(\Delta)-s_f(\Delta)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Prin urmare (T.9.1.8.) f este integrabilă.

9.2.29. Exerciţiu. *Fie* $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ *o funcţie continuă şi nenegativă. Atunci* $(\forall)\ n\geqslant 1$ *există* $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n\leqslant 1$ *o dviviziune a intervalului* $[0,\ 1]$ *de normă* $\leqslant\frac{2}{n}$ *cu proprietatea că* $\left(\int_0^1 f\right)^2\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^2(x_k)$.

Soluţie. Utilizînd inegalitatea lui Cauchy, apoi formula de medie obţinem :

$$\left(\int_0^1 f\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n} f\right)^2\leqslant n\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n} f^2=$$

$$=n[k/n-(k-1)/n]^2\sum_{k=1}^{n} f^2(x_k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^2(x_k),\ \text{unde}\ x_k\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$$

9.2.30. Exerciţiu. *Fie* $P,\ Q\in\mathbf{R}[X]$ *două polinoame cu coeficienţii pozitivi cu* grad $P<$ grad Q *şi* $f,\ g:[0,1]\to\mathbf{R}$ *două funcţii continui nenegative a.î.*

$$\int_0^1\frac{f(x)}{x+P(n)}\,dx=\int_0^1\frac{g(x)}{x+Q(n)},\ (\forall)\ n\geqslant 1.$$

Atunci $f=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. $\dfrac{f(x)}{1+P(n)} \leqslant \dfrac{f(x)}{x+P(n)}$; $\dfrac{g(x)}{x+Q(n)} \leqslant \dfrac{g(x)}{Q(n)}$, $(\forall)\ x \in [0,1]$ și $n \in \mathbf{N}$.

$$\frac{1}{1+P(n)}\int_0^1 f \leqslant \int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{x+P(n)} = \int_0^1 \frac{g(x)\,dx}{x+Q(n)} \leqslant \frac{1}{Q(n)}\int_0^1 g,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

$$0 \leqslant \int_0^1 f \leqslant \frac{1+P(n)}{Q(n)}\int_0^1 g \to 0\ (n \to \infty)\ \text{etc.}$$

9.2.31. Exercițiu. *Fie* $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, *o funcție a.î.* $f(a) f'(a) = f(b) f'(b)$, în particular $f(a) = f(b) = 0$. *Atunci avem* $\int_a^b f(x) f''(x)\,dx \leqslant 0$, *cu egalitate dacă și numai dacă f constantă.*

Soluție. Aplicînd formula de integrare prin părți avem:

$$\int_a^b f(x) f''(x)\,dx = ff'\Big|_a^b - \int_a^b [f'(x)]^2\,dx = -\int_a^b [f'(x)]^2\,dx \leqslant 0$$

9.2.32. Exercițiu. *Fie* $f, g \in \mathcal{C}^2([a, b])$ *două funcții a.î.* $f(a) g'(a) = f(b) g'(b)$ *și* $f'(a) g(a) = f'(b) g(b)$. *Atunci* $\int_a^b f(x) g''(x)\,dx = \int_a^b f''(x) g(x)\,dx$.

Soluție. Aplicînd de două ori T.9.3.4. avem:

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{u}\ \underbrace{g''(x)\,dx}_{dv} = fg'\Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{f'(x)}_{u}\ \underbrace{g'(x)\,dx}_{dv} =$$

$$= -(f' g\Big|_a^b - \int_a^b f''(x) g(x)\,dx) = \int_a^b f''(x) g(x)\,dx.$$

9.2.33. Exercițiu. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție integrabilă. Atunci* $(\forall)\ x \in (a, b)$ *un punct în care f este continuă, avem:*

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h}\int_0^h [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]\,dt = 0.$$

Soluție. Fixăm $x \in [a, b]$ și fie $\delta > 0$ a.î. $[x-\delta, x+\delta] \subseteq [a, b]$. Să considerăm funcția $F(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, $t \in [0, \delta]$. Evident F este integrabilă pe $[0, \delta]$, este continuă în 0 și $F(0) = 0$. Atunci (T.9.3.1.) funcția $h \mapsto \int_0^h F(t)\,dt$, $h \in [0, \delta]$, este derivabilă în 0 și are derivata egală cu $F(0)$, adică $\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h}\int_0^h F(t)\,dt = F(0)$ etc.

9.2.34. Exercițiu. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval și* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție local integrabilă. Atunci* $(\forall)\ x_0 \in I$ *un punct în care f este continuă, avem:*

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f = f(x_0).$$

Soluție. Fie $\varepsilon > 0$ fixat; f fiind continuă $(\exists)\ \eta > 0$ cu $[x_0 - \eta\ x_0 + \eta) \subseteq I$ și $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, $(\forall)\ |x - x_0| \leqslant \eta$. Atunci $(\forall)\ 0 < h < \eta$, avem:

$$\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx - f(x_0) = \frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x) - f(x_0))\,dx,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$\left|\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx - f(x_0)\right| < \varepsilon,\ (\forall)\ 0 < h < \eta \text{ etc.}$$

9.2.35. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie monoton crescătoare (resp. descrescătoare). Atunci orice primitivă a lui f este convexă (resp. concavă).*

Soluţie. Fie $a \in I$ fixat şi $F(x) := \int_a^x f$, $x \in I$. Cum f este continuă, rezultă (T. 9.3.1. Cor. 1) că F este derivabilă şi $F' = f$, deci F este o primitivă a lui f. Aşadar F este o funcţie derivabilă, monoton crescătoare (resp. descrescătoare), deci (P.7.1.5.) F este convexă (resp. concavă). Cum orice primitivă a lui f diferă de F printr-o constantă aditivă (P.8.1.2.), afirmaţia din enunţ este arătată.

9.2.36. Exerciţiu. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcţii cu proprietăţile : f monoton descrescătoare, $f \geqslant 0$, g monoton crescătoare şi $g > 0$. Atuncia avem inegalitatea :* $\int_a^b \frac{f}{g} \geqslant (b-a)\frac{\int_a^b f}{\int_a^b g}$.

Soluţie. Prin inducţie se arată imediat inegalitatea :

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} \geqslant n\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i},\ (\forall)\ a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0,\ 0 < b_1 \leqslant b_2 \ldots \leqslant b_n.$$

Fie $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ $k = \overline{1, n}$. Atunci avem :

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{g(x_k)} \geqslant n\frac{\sum_{k=1}^n f(x_k)}{\sum_{k=1}^n g(x_k)},$$

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{g(x_k)} \geqslant (b-a)\cdot\frac{\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)}{\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n g(x_k)}.$$

Prin trecere la limită, $n \to \infty$, obţinem inegalitatea din enunţ

9.2.37. Exerciţiu. *Să se determine funcţiile continui $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ care satisfac condiţia :* $\int_0^x f(t)\,dt = \frac{xf(x)}{2}$, $(\forall)\ x \geqslant 0$.

Soluţie. Să considerăm funcţia $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $x \in \mathbf{R}_+$.

Pe de-o parte, prin derivare avem (T.9.3.1.) $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+$.
Pe de altă parte, din condiţia dată în ipoteză rezultă :

$$F'(x) = \frac{xf'(x)}{2} + \frac{f(x)}{2},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+.$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$f(x) = \frac{xf'(x)}{2} + \frac{f(x)}{2}, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+ \Leftrightarrow xf'(x) = f(x), (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+.$$

De aici prin integrare obținem :

$$\ln f(x) = \ln x + C \ (C - \text{constantă}),$$

deci

$$f(x) = Cx, (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+.$$

9.2.38. Exercițiu. *Fie* $f_n : [1, 2] \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *un șir de funcții definit astfel* :

$$f_1(x) = 1, \ f_{n+1}(x) = \int_1^x f_n(t)\ \mathrm{d}t, (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(2) = 0$.

Soluție. Să arătăm prin inducție relativ la n relația :

$$f_n(x) = \frac{(x-1)^{n-1}}{(n-1)!}, \ (\forall)\ (x \in [1, 2] \tag{1}$$

Pentru $n = 1$ relația (1) este evidentă.

Să presupunem că $f_{k-1}(x) = \dfrac{(x-1)^{k-2}}{(k-2)!}$, $(\forall)\ x \in [1, 2]$. Atunci

$$f_k(x) = \int_1^x \frac{(t-1)^{k-2}}{(k-2)!}\,\mathrm{d}t = \frac{(t-1)^{k-1}}{(k-1)!}\Big|_1^x = \frac{(x-1)^{k-1}}{(k-1)!}, \ (\forall)\ x \in [1, 2].$$

Prin urmare relația (1) este adevărată, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Cum $f_n(2) = \dfrac{1}{(n-1)!}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(2) = 0$.

Observație. În realitate avem $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $(\forall)\ x \in [1, 2]$.

9.2.39. Exercițiu. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+^*$ *o funcție continuă neconstantă și* $n \in \mathbf{N}$ *fixat. Atunci există* $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n \in [a, b]$, *distincte între ele, a.î.*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ \left(resp.\ \left(\prod_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right)^{1/n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soluție. Să arătăm prima parte a afirmației din enunț.

Cf. T.9.2.10. Cor. 1. există $\xi \in [a, b]$ a.î. $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Deoarece $f \geqslant 0$, rezultă imediat relația $m < f(\xi) < M$, unde $m = \inf f([a, b])$ și $M = \sup f([a, b])$. Atunci există $y_1, y_2, \ldots, y_n \in [m, M]$ a.î. $f(\xi) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i$. Fie $\xi_i \in [a, b]$ cu $f(\xi_i) = y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Evident avem :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Scanned with OKEN Scanner

9.2.40. Exerciţiu. *Fie* $f[(a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcţie integrabilă şi* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}_+$ *Atunci* $(\forall)$ $x_1, x_2, \ldots x_n \in [a, b]$ *există* $x_0 \in [a, b]$ *a.î.* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{x_0}^{x_i} f(t)\, dt = 0$

Soluţie. Fie $I = [a, b]$ şi $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, $x \in T$; să punem:

$$\gamma = \frac{\lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \ldots + \lambda_n F(x_n)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}$$

Funcţia F fiind continuă (T.9.3.1.), $J = F(I)$ este un interval (T.5.5.16. Cor 1) Deoarece $\min_{1 \leqslant i \leqslant n} F(x_i) \leqslant \gamma \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} F(x_i)$, rezultă că $\gamma \in J$, deci există $x \in I$ a.î. $F(x_0) = \gamma$. Atunci

$$\frac{\lambda_1[F(x_1) - F(x_0)] + \ldots + \lambda_n[F(x_n) - F(x_0)]}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} = 0.$$

Evident însă

$$F(x_i) = F(x_0) = \int_{x_0}^{x_i} f(t)\, dt \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

deci

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{x_0}^{x_i} f(t)\, dt = 0.$$

9.2.41. Exerciţiu. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă. Atunci există* $\xi \in (a, b)$ *a.î.* $f(\xi) = \frac{a + b - 2\xi}{(\xi - a)(\xi - b)}$.

Soluţie. Funcţia f fiind continuă este integrabilă iar funcţia $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$, este o primitivă a sa (T.9.3.1.). Evident funcţia $\varphi(x) = (x - a) \times (x - b)e^{g(x)}$, $x \in [a, b]$ satisface condiţiile teoremei lui Rolle, deci există $\xi \in (a, b)$ a.î. $\varphi'(\xi) = 0$. Cum

$$\varphi'(x) = (x - a)\, e^{g(x)} + (x - b)\, e^{g(x)} + (x - a)(x - b) f(x)\, e^{g(x)},$$

rezultă că

$$(\xi - a) + (\xi - b) + (\xi - a)(\xi - b) f(\xi) = 0.$$

9.2.42. Exerciţiu. *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcţii continui. Atunci există* $\xi \in (a, b)$ *a.î.* avem $\left(\int_a^\xi f(t)\, dt\right) g(\xi) = f(\xi) \cdot \left(\int_b^\xi g(t)\, dt\right)$.

Soluţie. Fie funcţia $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \cdot \int_a^b g(t),\, dt$, $x \in [a, b]$. Atunci F este derivabilă şi $F(a) = F(b) = 0$, deci cf.t th. lui Rolle există cel puţin un punct $\xi \in I$ a.î. $F'(\xi) = 0$. Cum

$$F'(x) = g(x) \int_a^x f(t)\, dt + f(x) \int_x^b g(t)\, dt, \ (\forall)\ x \in I,$$

rezultă că

$$g(\xi) \int_a^\xi f(t)\, dt + f(\xi) \int_\xi^b g(t)\, dt = 0,$$

de unde obţinem imediat relaţia căutată.

Scanned with OKEN Scanner

9.2.43. Exercițiu. *Fie* $f:[a,\ b]\to\mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci există* $\xi,\eta\in(a,\ b)$ *a.î.* $\xi<\eta$ *și* $f(\eta)=\dfrac{\eta-a}{\eta-b}f(\xi)$.

Soluție. Fie $I=[a,\ b]$ $\varphi:I\to\mathbf{R}$ o funcție definită astfel

$$\varphi(x)=(b-x)\cdot\int_a^x f(t)\,dt,\quad(\forall)\ x\in I.$$

Evident φ este continuă pe I, derivabilă pe $\mathring{I}$ și $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. Atunci din T. 6.3.2. există $\eta\in\mathring{I}$ a.î. $\varphi(\eta)=0$. Deoarece

$$\varphi'(x)=(b-x)f(x)-\int_a^x f(t)\,dt,\quad(\forall)\ x\in I.,$$

rezultă

$$0=\varphi'(\eta)=(b-\eta)f(\eta)-\int_a^\eta f(t)\,dt,\ \text{deci}\int_a^\eta f(t)\,dt=(b-\eta)f(\eta).$$

Cum f este continuă, există $\xi\in(a,\ \eta)$ a.î. $f(\xi)=\dfrac{1}{a-\eta}\displaystyle\int_a^\eta f(t)\,dt$.

Prin urmare avem $(a-\eta)f(\eta)=(b-\eta)f(\eta)=\displaystyle\int_a^\eta f(t)\,dt$.

9.2.44. Exercițiu. *Fie* $f:[0,a]\to\mathbf{R}$ *o funcție derivabilă și cu derivata integrabilă a.î.* $f(0)=0$. *Atunci*

$$\left|\int_0^a f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{1}{2}a^2\sup_{x\in[0,a]}|f'(x)|.$$

Soluție. Integrînd prin părți iavem:

$$\int_0^a f(x)\,dx=xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a xf'(x)\,dx=$$

$$=af(a)-\int_0^a xf'(x)\,dx=\int_0^a(a-x)f'(x)\,dx.$$

Atunci

$$\left|\int_0^a f(x)\,dx\right|\leqslant\sup_{x\in x[0,a]}|f'(x)|\cdot\int_0^a(a-x)dx.$$

Cum $\displaystyle\int_0^a(a-x)\,dx=\left(ax-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^a=\frac{a^2}{2}$, obținem inegalitatea din enunț

9.2.45. Exercițiu. *Fie* $P\in\mathbf{R}[X]$ *un polinom crare are în intervalul* $[a,\ b]$ *o singură rădăcină* x_0 *și aceasta este simplă. Atunci*

$$\int_a^{x_0}P(t)\,dt\leqslant\operatorname{sign}P'(x_0)\cdot\int_a^x P(t)\,dt,(\forall),\ x\in[a,\ b].$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Rădăcina x_0 fiind simplă, rezultă că $P'(x_0) \neq 0$; spre exemplu $P'(x_0) > 0$. De aici deducem că

$$P(x) < 0, \ (\forall)\ x \in [a, x_0); \ P(x) > 0, \ (\forall)\ x \in (x_0, b).$$

Prin urmare

$$\int_a^{x_0} P(t)\,dt = \int_a^x P(t)\,dt + \int_x^{x_0} P(t)\,dt \leqslant \int_a^x P(t)\,dt, \quad (\forall)\ x \in (x_0, b]$$

$$\int_a^x P(t)\,dt = \int_a^{x_0} P(t)\,dt + \int_{x_0}^x P(t)\,dt \geqslant \int_a^{x_0} P(t)\,dt, \ (\forall)\ x \in [a, x_0)$$

9.2.46. Exerciţiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie monotonă şi convexă. Atunci $(\forall)\ a, b \in I$, $a < b$, avem inegalităţile :*

$$\min\{f(a), \ f(b)\} \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Soluţie. Fixăm $a, b \in I$, $a < b$. Deoarece f este convexă, rezultă f integrabilă pe $[a, b]$. Cum f este mărginită, înlocuind f cu $f + \lambda$ şi λ suficient de mare, putem presupune $f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in [a, b]$.

Fie punctele $M_a = (a, f(a))$, $M_b = b(f(b))$ şi $M_x = (x, f(x))$, $(x \in [a, b]$. Funcţia f fiind convexă, $(\forall)\ x \in [a, b]$, punctul M_x este situat (fig. 109). dedesubtul segmentului $\overline{M_aM_b}$. Aşadar avem :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \text{aria (trap. } ab\, M_aM_b) = (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Pe de altă parte, este evident că $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant (b-a)\,f(a)$ (resp. $\geqslant (b-a).f(b)$), după cum f este crescătoare (resp. descrescătoare). Prin urmare avem :

$$\min\{f(a), \ f(b)\} \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

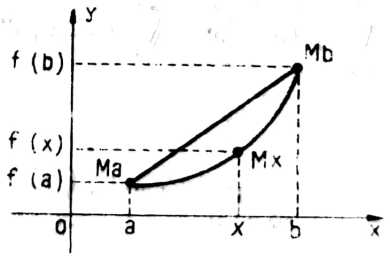


Fig. 109

Observaţie. Dacă f este concavă, atunci avem :

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \max\{f(a), f(b)\}.$$

Dacă f este strict concavă sau strict convexă, atunci peste tot inegalităţile sînt stricte.

Scanned with OKEN Scanner

9.2.47. Exerciţiu. *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ *două fnuncţii integrabile cu proprietatea*

$$(f(x) - f(y))\,(g(x) - g(y)) \geqslant 0, (\forall)\ x, y \in [a, b].$$

Atunci $\int_a^b fg \geqslant \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f\right)\cdot\left(\int_a^b g\right)$, *cu egalitate dacă şi numai dacă* f *sau* g *este constantă.*

Soluţie. Fie Δ diviziunea : $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ cu $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$. Atunci (Ex. 2.1.18. Cor. 1) avem :

$$n \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ g(x_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i)\, g(x_j),$$

deci

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ g(x_i) \geqslant \frac{1}{b-a}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=}^{n} f(x_i)\right)\cdot\left(\frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} g(x_j)\right) \quad (1)$$

de unde prin trecere la limită obţinem :

$$\int_a^b fg \geqslant \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f\right)\cdot\left(\int_a^b g\right) \quad (2)$$

Dacă în (2) avem inegalitatea strictă, atunci în (1) avem inegalitatea strictă pentru un $n_0 \geqslant 1$, deci (Ex. 2.1.18. Cor. 1) f sau g este neconstantă.

Corolar 1. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcţie monoton crescătoare (resp. descrescătoare). Atunci*

$$\int_a^b xf(x)\,dx \geqslant (\text{resp.} \leqslant)\ \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

9.2.48. Exerciţiu. *Să se determine forma generală a funcţiilor derivabile* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *care au proprietatea că există* $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *continuă în a.î.* $f'(x) = f(x)\,g(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Soluţie. Presupunem $f \neq 0$ şi fie $x_0 \in I$ cu $f(x_0) > 0$. Atunci există un interval inclus în I care conţine pe x_0 pe care f este strict pozitivă ; fie $J \subset I$ cel mai mare interval care conţine pe x_0 cu $f(x) > 0$, $(\forall)\ x \in J$. Deoarece $f'(x)/f(x) = g(x)$, $(\forall)\ x \in J$, avem : $f(x) = C\, e^{\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt}$, $(\forall)\ x \in J$ (C constantă pozitivă).

Dacă $b = \sup J < \sup. I$, cum $\lim_{x \nearrow b} f(x) = C\, e^{\int_{x_0}^{b} g(t)\,dt} > 0$, rezultă că există $b_1 \in I$, $b_1 > b$ a.î. $f(x) > 0$, $(\forall)\ x \in [b, b_1]$, deci $f(x) > 0$, $(\forall)\ x \in J_1 = J \cup [b, b_1]$ şi $J \subset J_1$, absurd. Rămîne că $\sup J = \sup I$ şi analog $\inf. J = \inf I$, de unde deducem $J = I$ şi prin urmare

$$f(x) = C\, e^{\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt}, \quad (\forall)\ x \in I\ (C \in \mathbf{R} \text{ arbitrar}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă cunoaștem valoarea lui f într-un punct, atunci C și deci f este unic determinată.

9.2.49. Exercițiu. *Să se calculeze aria unui sector de hiperbolă echilaterală. Să se arate că* $(\forall) P(x,y)$ *un punct pe hiperbolă* ($cu\ x > 0$) *avem* $x = \operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t$, *unde* t *este de două ori aria sectorului de hiperbolă determinat de* P (fig. 110).

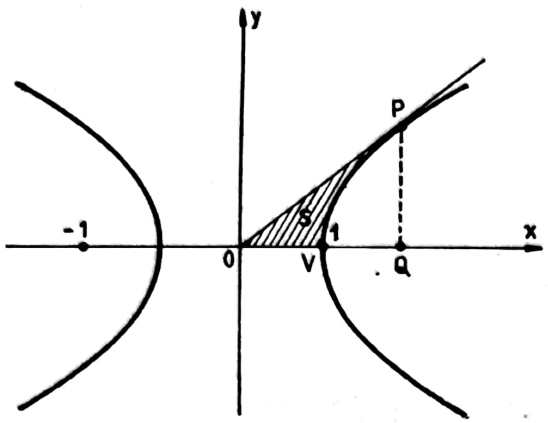


Fig. 110

Ind. S aria ΔOPQ − aria $\Delta VPQ =$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \int_0^x \sqrt{x^2-1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

Notînd $2S$ cu t, avem:

$t = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, deci $x = \operatorname{ch} t$ și deci $y = \sqrt{x^2-1} = \operatorname{sh} t$.

9.2.50. Exercițiu. *Fie* $f : [0,1] \to [0,1]$ *o funcție continuă. Atunci există* $x_0 \in [0,1]$ *a.î.* $\int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{f(x_0)}{\sqrt{1-[f(x_0)]^2}}$.

Soluție. Funcția f fiind continuă, există $x_0 \in I = [0,1]$ a.î. $f(x) \leq f(x_0)$, $(\forall)\ x \in I$, deci

$$\frac{[f(x)]^2}{1-[f(x)]^2} \leq [f(x_0)]^2 \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{f(x_0)}{\sqrt{1-f(x_0)}},\ (\forall)\ x \in I.$$

Prin integrare se obține inegalitatea căutată.

Observație. Inegalitatea $\leq$ devine egalitate $\Leftrightarrow f = 0$.

9.2.51. Exercițiu. *Fie* $f : [a,b] \to [a,b]$ *o funcție continuă,* $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$, $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$ *și* $g(x) = \int_m^M e^{xf(t)}\,dt$, $(\forall)\ x \in [a,b]$. *Atunci funcția* $\ln g$ *este concavă.*

Soluție. Fie funcția $F = -\ln g$ și $\lambda \in (0,1)$ fixat. Deoarece funcția $x \mapsto e^x$, $x \in \mathbf{R}$, este convexă iar funcția $x \mapsto -\ln x$, $x \in \mathbf{R}$, este convexă și strict crescătoare (P.7.1.6.), avem inegalitățile:

$$F((1-\lambda)x + \lambda y) = -\ln \int_m^M e^{(1-\lambda)xf(t) + \lambda y f(t)}\,dt \leq$$

$$\leq -\ln \int_m^M \left[(1-\lambda)e^{xf(t)} + \lambda e^{yf(t)}\right] dt \leq$$

$$\leq -(1-\lambda)\ln \int_m^M e^{xf(t)}\,dt - \lambda \ln \int_m^M e^{yf(t)}\,dt = (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y)$$

Prin urmare F este convexă deci $\ln g$ este concavă.

Scanned with OKEN Scanner

9.2.52. Exercițiu. *Fie* $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă. Dacă* $(\exists)\ \lambda > 0$ *a.î.* $\lambda \int_0^x f^2 \leqslant \left(\int_0^x f\right)^2$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+$ $(*)$, *atunci* $f = 0$.

Soluție. Aplicînd inegalitatea lui Hölder (P.7.3.2.), rezultă

$$\left(\int_0^x f\right)^2 \leqslant \left(\int_0^x f^2\right) \cdot \left(\int_0^x 1\right) = x \int_0^x f^2\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+,$$

deci

$$\lambda \int_0^x f^2 \leqslant \left(\int_0^x f\right)^2 \leqslant x \int_0^x (\quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+.$$

și deci

$$(\lambda - x) \int_0^x f^2 \leqslant 0,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+ \tag{1}$$

Din (1) rezultă că $\int_0^x f^2 \leqslant 0$, $(\forall)\ x \in [0, \lambda)$, deci $\int_0^\lambda f^2 \leqslant 0$ și deci $\int_0^\lambda f^2 = 0$, de unde deducem (P.9.2.13, Cor. 3) $f = 0$ pe $[0, \lambda]$. Atunci inegalitatea $(*)$ se scrie

$$\lambda \int_\lambda^x f^2 \leqslant \left(\int_\lambda^x f\right)^2,\ (\forall)\ x \geqslant \lambda$$

Repetăm mai departe raționamentul de mai sus, înlocuind 0 cu λ; obținem:

$$\left(\int_\lambda^x f\right)^2 \leqslant \left(\int_\lambda^x f^2\right) \cdot \left(\int_\lambda^x 1\right) = (x - \lambda) \int_\lambda^x f^2\ (\forall)\ x \geqslant \lambda,$$

deci $(2\lambda - x) \int_\lambda^x f^2 \leqslant 0$, $(\forall)\ x \geqslant \lambda$ și deci $\int_\lambda^x f^2 \leqslant 0$, $(\forall)\ x \in [\lambda, 2\lambda)$, de unde rezultă $\int_\lambda^{2\lambda} f^2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ pe $[\lambda, 2\lambda]$. Continuînd acest raționament, prin inducție, conchidem că $f = 0$ pe $[k\lambda, (k+1)\lambda]$, $(\forall)\ k \in \mathbf{N}_0$, pirin urmare $f = 0$.

9.2.53. Exercițiu. *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathbf{R}$ *distincte între ele. Să se determine* $P_n \in \mathbf{R}\ [X]$ *un polinom de grad* n *a.î.* $\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_n(t)\, dt = 0$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$.

Soluție. Fie $P = P_{n+1} \in \mathbf{R}\ [X]$ un polinom de grad $n+1$ a.î. $P' = P_n$. Atunci avem:

$$P(x_{i+1}) - P(x_i) = 0,\ (\forall)\ i = \overline{1, n} \Leftrightarrow P(x_i) = \lambda,\ (\forall)\ i = \overline{1, n+1},$$

dec

$$P(x) = \lambda + \prod_{i=1}^{n+1} c(x - x_i), \qquad (\forall \quad \in \mathbf{R}$$

și deci

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{n+1} \frac{c(x - x_i)}{x - x_k},\quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

9.2.54. Exercițiu. *Fie* $f : [0, 1] \to [a, b]$ *o funcție integrabilă cu proprietatea că* $\int f = 0$. *Atunci* $\int^1 f^2 \leqslant |ab|$.

Soluție. 1° Dacă $a \geqslant 0$, avem $f \geqslant 0$ deci cum $\int_0^1 f = 0$ rezultă că $f = 0$ și deci $\int_0^1 f^2 = 0 \leqslant |ab|$.

2° Dacă $b \leqslant 0$, raționăm analog.

3° Fie $a < 0 < b$. Evident avem $(f - a)(f - b) \leqslant 0$, deci

$$\int_0^1 f^2 - (a + b)\int_0^1 f + ab \leqslant 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2 \leqslant -ab = |ab|.$$

9.2.55. Exercițiu. *Fie $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă cu f' monoton crescătoare a.î. $f(0) = 0$, $f'(1) > 0$. Atunci*

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + f^2(x)} \leqslant \frac{f(1)}{f'(1)}.$$

Soluție. Cf. formulei de medie (T.9.2.10. Cor. 1) există $c \in (0,1)$ a.î.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + f^2(x)} = \frac{1}{1 + f^2(c)} \leqslant 1.$$

Aplicînd T.6.3.4. există $\xi \in (0, 1)$ a.î. $f(1) - f(0) = f'(\xi)$. Funcția f' fiind monoton descrescătoare avem $f'(\xi) \geqslant f'(1)$. dedi cum $f(0) = 0$, rezultă că $f(1) \geqslant f'(1)$ și deci $\frac{f(1)}{f'(1)} \geqslant 1$. Atunci

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + f^2(x)} \leqslant 1 \leqslant \frac{f(1)}{f'(1)}.$$

9.2.56. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție de clasă $\mathcal{C}^1$, impară și periodică de perioadă T. Să se calculeze integrala $A = \int_0^{2T} \frac{xf'(x)\,\mathrm{d}x}{1 + f^2(x)}$.*

Soluție. Avem $A = \int_0^T + \int_T^{2T} = A_1 + A_2$. Funcția f fiind impară și periodică de perioadă T rezultă că f' este pară și periodică de perioadă T.

Atunci făcînd în integrala A_2 schimbarea de variabilă $x = 2T - t$, obținem :

$$A_2 = -\int_T^0 \frac{(2T - t)(f'(2T - t)}{1 + f^2(2T - f)}\,\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{(2T - t)f'(t)}{1 + f^2(t)}\mathrm{d}t =$$

$$= 2T\int_0^T \frac{f'(t)\,\mathrm{d}t}{1 + f^2(t)} - \int_0^T \frac{tf'(t)\,\mathrm{d}t}{1 + f^2(t)},$$

deci

$$A_1 + A_2 = 2T \operatorname{arc\,tg} f(t)\Big|_0^T = 0.$$

9.2.57. Exercițiu. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b). Atunci $(\exists)\ \Delta$ o diviziune a lui $[a, b]$, $(\exists)\ \xi \in (a, b)$ a.î.*

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) \leqslant (b - a)\,\nu(\Delta)\,|f'(\xi)|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție Fie $\Delta := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ o diviziune a lui $[a, b]$ fixată, $m_i := \inf f(J_i)$, $M_i := \sup f(J_i)$, unde $J_i := [x_{i-1}, x_i]$, $(i = \overline{1, n})$. Evident avem :

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,|J_i|$$

Funcția f fiind continuă și J_i compact, $(\exists)\ \alpha_i, \beta_i \in J_i$ cu $f(\alpha_i) = m_i$ și $f(\beta_i) = M_i$). Din T.6.3.4. rezultă că $(\exists)\ c_i$ cuprins strict între α_i și β_i a.î. $f(\alpha_i) - f(\beta_i) = (\alpha_i - \beta_i) f'(c_i)$. Atunci

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) f'(c_i) \cdot |J_i| \leqslant$$

$$\leqslant \nu(\Delta) \sum_{i=1}^{n} |J_i| \cdot |f'(c_i)| = \nu(\Delta)\,(b - a) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |f'(c_i)|,$$

unde $\lambda_i = \dfrac{|J_i|}{b - a}$. Cum $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ și $|f'|$ are proprietatea Darboux (T.6.3.7.), rezultă (Ex. 4.3.6.) că există ξ cuprins între $\min_{i=\overline{1,n}} c_i$ și $\max_{i=\overline{1,n}} c_i$ a.î. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |f'(c_i)| = f'(\xi)$), încît putem scrie

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) \leqslant \nu(\Delta) \cdot (b - a)\,|f'(c)|.$$

Evident $\xi \in (a, b)$.

Corolar 1. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă cu derivata mărginită. Atunci $(\forall)\ \Delta$ o diviziune a lui $[a, b]$ și $(\forall)\ \xi_\Delta$ o mulțime de puncte intermediare asociată lui Δ, rezultă că numerele* $\left|\int_a^b f - s_f(\Delta)\right|, \left|\int_a^b f - S_f(\Delta)\right|$ *și* $\left|\int_a^b f - \sigma_f(\Delta, \xi_f)\right|$ *sînt majorate de* $(b - a)\,\nu(\Delta)\,\|f'\|_\infty$.

Soluție. Aplicăm Ex. 9.2.57. ținînd seama de inegalitățile :

$$s_f(\Delta) \leqslant \sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) \leqslant S_f(\Delta),\ s_f(\Delta) \leqslant \int_a^b f \leqslant S_f(\Delta)$$

.2.58. Exercițiu. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție monoton crescătoare. Atunci*

$$\frac{b - a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b - a}{n}\right) \leqslant \int_a^b f \leqslant \frac{b - a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b - a}{n}\right),\ (\forall) n \geqslant 1.$$

Soluție. Fie Δ diviziunea lui $[a, b]$ definită de punctele $x_k := a + k\dfrac{b - a}{n}$ $(k = \overline{0, n})$. Atunci avem :

$$s_f(\Delta) = \frac{b - a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b - a}{n}\right),\ S_f(\Delta) = \frac{b - a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b - a}{n}\right)$$

Din însăși definiția integralelor Darboux inferioară respectiv superioară rezultă :

$$s_f(\Delta) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant S_f(\Delta)$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia f fiind monotonă este integrabilă (T.9.1.14. Cor. 1), deci (T. 9.1.8. Cor. 1) avem $\underline{\int}_a^b f = \int_a^b f = \overline{\int}_a^b f$, prin urmare $s_f(\Delta) \leqslant \int_a^b f \leqslant S_f(\Delta)$.

Corolar 1. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie monoton crescătoare. Atunci*

$$0 \leqslant \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \leqslant \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)), (\forall)\ n \geqslant 1.$$

9.2.59. Exerciţiu. *Fie $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcţie monotonă şi $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$ o diviziune Δ a lui $[a, b]$. Atunci avem inegalitatea :*

$$\left|\int_0^1 f - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i)\right| \leqslant |g(1) - f(0)| \cdot \nu(\Delta).$$

Soluţie. Presupunem f monoton crescătoare. Atunci avem inegalitatea :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}) \leqslant \int_0^1 f \leqslant \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i),$$

deci

$$\left|\int_0^1 - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i)\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i) - f(x_{i-1}))\right| \leqslant$$

$$\leqslant \nu(\Delta) \cdot \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \nu(\Delta) \cdot (f(1) - f(0))$$

Corolar 1. *Fie $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcţie monotonă. Atunci avem inegalitatea :*

$$\left|\int_0^1 f - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{|f(1) - f(0)|}{n}$$

Corolar 2. *Fie $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea că există $0 < c_0 < c_1 < \ldots < c_p = 1$ a.î. f este monotonă pe fiecare interval $[c_{i-1}, c_i]$. Atunci avem inegalitatea :*

$$\left|\int_0^1 f - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M - m}{n},$$

unde $m = \min_{i=\overline{1,p}} f(c_i)$, $M = \max_{i=\overline{1,p}} f(c_i)$.

9.2.60. Exerciţiu. *Fie $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcţie nenegativă şi monoton crescătoare. Atunci*

$$\int_0^1 f \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^1 f + \frac{f(1) - f(0)}{n}, (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Soluţie. Fie $A = \int_0^1 f$. Funcţia f fiind monoton crescătoare avem :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant A \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$A \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} f(0) + \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} f(1)$$

și deci

$$A \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant A - \frac{1}{n} f(0) + \frac{1}{n} f(1)$$

Observație. Dacă f este strict crescătoare inegalitățile sînt stricte, iar dacă f este monoton, (resp. strict) descrescătoare, inegalitățile $\leqslant$ (resp. $<$) se înlocuiesc prin $\geqslant$ (resp. $>$).

Corolar 1.

$$\frac{\pi n^2}{4} - n < \sqrt{n^2-1^2} + \sqrt{n^2-2^2} + \ldots + \sqrt{n^2+(n-1)^2} < \frac{\pi n^2}{4}, \quad (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Soluție. Fie $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [0,1]$. Atunci $f(0) = 1$. $f(1) = 0$,

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4},$$

deci

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}} < \frac{\pi}{4}$$

și deci

$$\frac{\pi n^2}{4} - n < \sqrt{n^2-1^2} + \sqrt{n^2-2^2} + \ldots + \sqrt{n^2-(n-1)^2} < \frac{\pi n^2}{4}.$$

9.2.61. Exercițiu. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă a.î. $f(a) = f(b) = 0 < f(x)$, $(\forall)\ x \in [a, b]$. Atunci :*

1° $(\exists)\ c_1, c_2 \in (a, b)$, $c_1 < c_2$ *a.î.* $f'(x_1) - f'(x_2) \geqslant \dfrac{4}{b-a} \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$

2° *Dacă* $\dfrac{f''}{f}$ *este integrabilă impropriu pe* $[a, b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b \frac{f''}{f} \geqslant \frac{4}{b-a}$.

Soluție. Fie $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Deoarece f este continuă, nenulă și $f(a) = f(b) = 0$, există $x_0 \in (a, b)$ cu $f(x_0) = M$. Cf. T. 6.3.4. avem :

$$\begin{cases} f(x_0) - f(a) = (x_0 - a) f'(c_1), & c_1 \in (a, x_0) \\ f(b) - f(x_0) = (b - x_0) f'(c_2), & c_2 \in (x_0, b). \end{cases}$$

deci

$$f'(c_1) - f'(c_2) = \left(\frac{1}{x_0 - a} - \frac{1}{x_0 - b}\right) M = \frac{(b-a)M}{(x_0 - a)\ b - x_0)}$$

Cum

$$(x_0 - a)(b - x_0) \leqslant \left[\frac{(x_0 - a) + (b - x_0)}{2}\right]^2 = \frac{(b-a)^2}{4},$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem

$$f'(c_1) - f'(c_2) \geqslant \frac{4}{(b-a)^2} \cdot (b-a)\, M = \frac{4M}{b-a}$$

$$2^\circ \int_a^b \frac{|f''|}{|f|} \geqslant \frac{1}{M}\int_a^b |f''| \geqslant \frac{1}{M}\int_{c_1}^{c_2} |f''| \geqslant \frac{1}{M}\left|\int_{c_1}^{c_2} f''\right| =$$

$$= \frac{1}{M}\,|f'(c_2) - f'(c_1)| \geqslant \frac{1}{M}\,\frac{4M}{b-a} = \frac{4}{b-a}.$$

9.2.62. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie local integrabilă şi aditivă. Atunci f este liniară*

Soluţie. $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$ avem :

$$\int_0^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y f(x+\theta)\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y f(x)\,\mathrm{d}\theta + \int_0^y f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y f(\theta)\,\mathrm{d}\theta + y f(\theta),$$

deci

$$yf(x) = \int_0^{x+y} f - \int_0^x f - \int_0^y f \tag{1}$$

Schimbînd în (1) rolul lui x cu y, termenul din dreapta rămîne acelaşi, deci $y f(x) = xf(y)$. De aici pentru $y = 1$ obţinem $f(x) = xf(1)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deci f este liniară.

9.2.63. Exerciţiu. *Să se demonstreze direct a doua formulă de medie* (T.9.2.12) *în cazul particular cînd f este continuă iar g este monotonă şi de clasă $\mathcal{C}^1$*

Soluţie. Fie $F(x) = \int_a^x f$, $x \in [a, b]$. Integrînd prin părţi avem :

$$\int_a^b fg\,\mathrm{d}x = \int_a^b \underbrace{g}_{u}\,\underbrace{F'}_{\mathrm{d}v}\,\mathrm{d}x = gF\Big|_a^b - \int_a^b g'F$$

Funcţia g fiind, spre exemplu, monoton crescătoare avem $g' \geqslant 0$, deci cf. T. 9.2.10. $(\exists)\ \xi \in [a, b]$ a.î. $\int_a^b g'F = F(\xi)\int_a^b g$. Atunci

$$\int_a^b fg\,\mathrm{d}x = g(b)F(b) - g(a)F(a) - F(\xi)[g(b) - g(a)] =$$

$$= g(a)F(\xi) + g(b)[F(b) - F(\xi)] = g(a)\int_a^\xi f + g(b)\int_\xi^b f.$$

9.2.64. Exerciţiu. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ o funcţie integrabilă. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Evident avem : $\left(\prod_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right)^{\frac{1}{n}} =$

$$=\left[\prod_{k=1}^{n} e^{\ln f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)}\right]^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)}$$

Trecînd la limită cu n către ∞ și ținînd seama că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)=\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f,$$

obținem limita căutată.

Corolar 1. *Fie* $f:[0,1]\to \mathbf{R}_+$ *o funcție integrabilă. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n} = e^{\int_0^1 \ln f}$$

Aplicație. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}$ Într-adevăr avem :

$$x_n := \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}, \ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

unde $f(x) = x$, $x \in [0,1]$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \exp\left(\int_0^1 (\ln x\, dx\right) = e^{x\ln x}\Big|_0^1 = e^{-1}.$$

9.2.65. Exercițiu. (Formula de integrare prin părți generalizată). *Fie* $f, g : [a,b]\to \mathbf{R}$ *două funcții de clasă* $\mathcal{C}^n (n \geqslant 1)$. *Atunci are loc relația :*

$$\int_a^b fg^{(n)} = (fg^{(n-1)} - fg^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{n-1} f^{(n-1)}g)\Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}g$$

Ind. Aplicăm formula de antiderivare prin părți generalizată (P. 8.2.3.) și formula lui Leibniz-Newton (T.9.3.2.)

9.2.66. Exercițiu. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval și* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci* $f \geqslant 0 \Leftrightarrow (\forall)\ a, b \in I$, $a < b$, *avem* $\int_a^b f \geqslant 0$.

Ind. ($\Leftarrow$) Fie $x_0 \in I$ fixat. Dacă $f(x_0) < 0$, există $a, b \in I$, $a \leqslant x_0 \leqslant b$, $a \neq b$, cu proprietatea că $f(x) \leqslant \frac{1}{2} f(x_0)$, $(\forall)\ x \in [a,b]$, deci

$$\int_a^b f \leqslant \frac{1}{2}\int_a^b f(x_0) = \frac{b-a}{2} f(x_0) < 0, \text{ absurd.}$$

Observație. Fie $f : [a,b]\to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Dacă $\int_a^b f \geqslant 0$, nu rezultă numaidecît că $f \geqslant 0$.

Scanned with OKEN Scanner

9.2.67. Exerciţiu. *Fie* $P, Q \in |\mathbf{R}[X]$ *două polinoame cu proprietatea că* $Q(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^p}\int_0^x \frac{P(t)}{Q(t)}\,dt$ $(p > 0)$.

Ind. Aplicăm regula lui Hospital (T. 6.4.3.):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p}\int_0^x \frac{P(t)}{Q(t)}\,dt = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{px^{p-1}} \cdot \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0}{pb_0} \text{ (resp. } 0, \text{ resp. } \infty),$$

după cum grad $P = p - 1 +$ grad Q (resp. $<$, resp. $>$).

9.2.68. Exerciţiu. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă a.î.* $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| \geqslant 1$.

Atunci există $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [a, b]$ *a.î.* $\int_a^b f = (x_1 - x_2) f(x_3) f'(x_4)$

Soluţie. Aplicînd prima formulă de medie (T.9.2.10) rezultă că $(\exists)\ x_3 \in (a, b)$ a.î. $\int_a^b f = (b - a) f(x_3)$. Să observăm că

$$A := \left\{\frac{b-a}{x-y};\ x, y \in [a, b]\ x \neq y\right\} = \{t \in \mathbf{R};\ |t| \geqslant 1\}$$

Cum $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| \geqslant 1$, rezultă că $(\exists)\ x_4 \in [a, b]$ cu $|f'(x_4)| \geqslant 1$, deci $f(x_4) \in A$ şi deci există $x_1, x_2 \in A$ a.î. $f'(x_4) = \frac{b-a}{x_1 - x_2}$ etc.

9.2.69. Exerciţiu. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcţie integrabilă şi* $F(x) = \int_a^x f$, $x \in [a, b]$. *Atunci* f *este lipschitziană.*

Ind. f fiind integrabilă este mărginită: fie $M > 0$ a.î. $|f(x)| \leqslant M$, $(\forall)$ $x \in [a, b]$. Atunci

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_x^y f\right| \leqslant M|x - y|,\ (\forall)\ x, y \in [a, b]$$

9.2.70. Exerciţiu. *Fie* $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ *un polinom cu coeficienţi reali. Atunci există* $c \in (0,1)$ *a.î.*

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = P(c).$$

Ind. Fie funcţia $f(x) = P(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci $(\exists)\ c \in (0,1)$ a.î.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = f(c) \Leftrightarrow a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = P(c)$$

9.2.71. Exerciţiu. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcţie integrabilă cu* $\int_a^b f > 0$. *Atunci* $(\forall)\ c > \frac{1}{b-a}$, *există* $\xi \in (a, b)$ *a.î.* $f(\xi) < c\int_a^b f$.

Ind. Dacă $f(x) \geqslant c\int_a^b f$, $(\forall)\ x \in (a, b)$, atunci

$$\int_a^b f \geqslant \left(\int_a^b e\,dx\right)\left(\int_a^b f\right) = (b - a)\, c\int_a^b f > \int_a^b f,$$

absurd.

Scanned with OKEN Scanner

9.2.72. Exerciţiu. *Fie* $f:[a,\ b]\to\mathbf{R}$ *o funcţie continuă cu* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$. *Dacă pentru orice funcţie continuă* $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ *există* $\theta=\theta_g\in(a,\ b)$ *a.î* $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x=f(\theta)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *atunci* $f\geqslant 0$.

Soluţie. Evident $f^+=f\vee 0\geqslant 0$ şi $f^-=f\wedge 0\leqslant 0$. Deoarece f^- este continuă, cf. ipotezei există $\theta\in(a,\ b)$ a.î.

$$\int_a^b f(x)\cdot f^-(x)\,\mathrm{d}x=f^-(\theta)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 0$$

Avem însă $f(x,\cdot f^-(x)=[f^-(x)]^2\geqslant 0$, $(\forall)\ x\in[a,\ b]$, deci $0\leqslant\int_a^b[f^-(x)]^2\,\mathrm{d}x\leqslant 0$ şi deci (P.9.2.13. Cor. 3.) $f^-=0$. Prin urmare avem $f=f_+ + f_+\geqslant 0$.

9.2.73. Exerciţiu. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}_+$ *o funcţie continuă,* $m:=\inf f([a,b])$ *şi* $M:=\sup f([a,\ b])$. *Atunci*

$$\frac{m}{M}(b-a)^2\leqslant\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_a^b\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)\leqslant\frac{M}{m}(b-a)^2.$$

Soluţie. Deoarece f este continuă, rezultă $\frac{1}{f}$ continuă, deci f şi $\frac{1}{f}$ sînt integrabile pe $I:=[a,\ b]$. Evident avem : $m\leqslant f(x)\leqslant M$, $(\forall)\ x\in I$, deci :

$$m(b-a)=\int_a^b m\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b M\mathrm{d}x=M(b-a)\qquad(1)$$

De asemenea avem $\frac{1}{M}\leqslant\frac{1}{f(x)}\leqslant\frac{1}{m}$, $(\forall)\ x\in I$, deci :

$$\frac{1}{M}(b-a)=\int_a^b\frac{1}{M}\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b\frac{1}{m}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{m}(b-a)\qquad(2)$$

Inmulţind inegalităţile (1) cu (2), obţinem inegalitatea căutată.

9.2.74. Exerciţiu. *Fie* $f,\ g:[a,\ b]\to\mathbf{R}$ *două funcţii cu* f *continuă şi* $g(x)=\int_a^x f$, $x\in[a,\ b]$. *Dacă* $f(a)\,g(b)<0$, *atunci există* $\xi,\ \eta\in(a,\ b)$ *a.î.* $f(\xi)=g(\eta)=0$.

Soluţie. Să presupunem $f(a)>0$ şi $g(b)<0$. Dacă $f\geqslant 0$, atunci $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$, deci $g(b)\geqslant 0$, absurd. Aşadar există $c\in(a,\ b]$ a.î. $f(c)<0$ şi deci $f(a)f(c)<0$.

Cum f este continuă pe $[a,\ b]$, deci şi pe $[a,\ c]$, există $\xi\in(a,\ c)$ a.î. $f(\xi)=0$.

Mai departe, f fiind continuă şi $f(a)>0$, există $\alpha\in(a,\ b)$ a.î. $f(x)>0$, $(\forall)\ x\in[a,\ \alpha]$, deci $g(\alpha)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t>0$.

Prin urmare g derivabilă pe $[a,\ b]$, deci continuă pe $[\alpha,\ b]$ şi $g(\alpha)\,g(b)<0$. Atunci există $\eta\in(\alpha,\ b)$ a.î. $g(\eta)=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Dacă există un singur punct ζ cu $f(\zeta)=0$, atunci $g(x)>0$, $(\forall)\ x\in[a,\ \zeta]$, deci $\zeta<\eta$.

9.2.75. Exerciţiu. *Fie $I\subseteq\mathbf{R}$ un interval, $c\in I$ un punct şi $f: I\to\mathbf{R}$ o funcţie continuă cu proprietăţile:* 1° $f(c)=0$ *şi* $f(x)\neq 0$, $(\forall)\ x\neq c$; 2° *c este zerou simplu*; 3° *f este derivabilă în c. Atunci funcţia $x\overset{\varphi}{\mapsto}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $x\in I$, păstrează un semn constant.*

Soluţie. Punctul c fiind zerou simplu, avem $f'(c)\neq 0$; fie $f'(c)>0$. Cum $f(x)\neq 0$, $(\forall)\ x\in I$, $x>c$ şi f este continuă, avem: (I) $f(x)>0$, $(\forall)\ x\in I$, $x>c$ sau (II) $f(x)<0$, $(\forall)\ x\in I$, $x>c$. Dacă (I) este adevărată, atunci $f'(c)=\lim\limits_{x\searrow c}\dfrac{f(x)}{x-c}\leqslant 0$, absurd, deci (I) este fals şi deci (II) este adevărat.

Analog arătăm că $f(x)<0$,. $(\forall)\ x\in I$, $x<c$ (fig. 111).

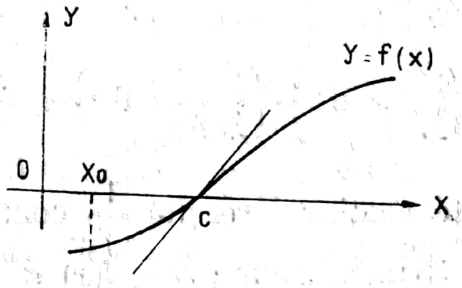


Fig. 111

Fixăm $x_0\in I$; dacă $x_0>c$ evident $\int_c^{x_0}f(t)\,\mathrm{d}t>0$; dacă $x_0<c$, atunci $\int_c^{x_0}f(t)\mathrm{d}t=-\int_{c}^{x_0}f(t)\mathrm{d}t>0$, deci $\varphi\geqslant 0$.

9.2.76. Exerciţiu. *Fie $f:[a,\ b]\to\mathbf{R}$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^3$ a.î. $f(a)=f(b)]=f'(b)=0$. Atunci $\int_a^b f(x)f'''(x)=\dfrac{1}{2}[f'(a)]^2$.*

Soluţie. Integrînd prin părţi, avem:

$$\int_a^b \underbrace{f''(x)}_{u}\underbrace{f'(x)\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v}=f''(x)\cdot f(x)\Big|_a^b+\int_a^b f(x)\cdot f'''(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cum $f''(x)\cdot f(x)\Big|_a^b=f''(b)\cdot f(b)=f''(a)\cdot f(a)=0$, avem:

$$\int_a^b f''(x)\cdot f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}[f'(x)]\Big|_a^b=-\frac{1}{2}[f'(b)]^2+\frac{1}{2}[f'(a)]^2=\frac{1}{2}[f'(a)]^2.$$

Prin urmare

$$\int_a^b f(x)\,f'''(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[f'(a)]^2$$

Scanned with OKEN Scanner

Generalizare. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcție de clasă* C^{2n+1} *a.î.* $f^{(i)}(a)=f^{(i)}(b)=0 (0\leqslant i\leqslant n)$. *Atunci*

$$\int_a^b f(x)\cdot f^{(2n+1)}(x)\,dx=\frac{(-1)^n}{2}\{[f^{(n)}(b)]^2-[f^{(b)}(a)]^2\}.$$

9.2.77. Exercițiu. *Fie* $f:I=[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcție continuă și* $\lambda:=\int_a^b f(x)dx$. *Atunci* $(\forall)\ \varepsilon>0$, *există* $g:I\to[0,1]$ *o funcție continuă neconstantă a.î.* $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\geqslant\lambda-\varepsilon$.

Soluție. Deoarece f este continuă și I interval închis și mărginit, există $M>0$ a.î. $f(x)\leqslant M$, $(\forall)\ x\in I$. Să definim $g:I\to(0,1]$ ca în fig. 112.

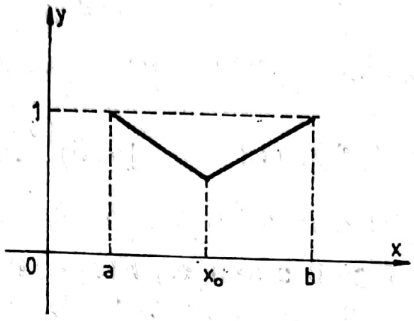


Fig. 112

Se vede imediat că:

$$\lambda-\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,[1-g(x)]\,dx\leqslant M(b-a)(1-g(x_0))$$

Să definim g în punctul x_0 a.î. $M(b-a)\,(1-g(x_0))<\varepsilon$. Evident acest lucru posibil. Atunci avem:

$$\lambda-\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx<\varepsilon\Leftrightarrow\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\geqslant\lambda-\varepsilon.$$

9.2.78. Exercițiu. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}_+^*$ *o funcție monotonă și* $n\geqslant 1$. *Atunci există numerele* $a=a_0<a_1<\ldots<a_n=b$, *unic determinate a.î.* aria $T_1=$ aria $T_2=\ldots=$ aria T_n, *unde* T_i *este trapezul curbiliniu determinat de segmentul* $[a_{i-1},a_i]$, *dreptele* $x=a_{i-1}$, $x=a_i$ *și graficul lui* f.

Soluție. Funcția f fiind monotonă, este local integrabilă.

Considerăm funcția $F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a,b]$. Cum $f\geqslant 0$, rezultă că F este monoton crescătoare. Din T. 9.3.1. rezultă că F este continuă, deci (T. 5.5.16.) mulțimea $F([a,b])$ coincide cu intervalul $J=[F(a),F(b)]$.

Fie $y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_n\in J$, $y_0=F(a)<y_1<\ldots<y_n=F(b)$, a.î. $y_1-y_0=y_2-y_1=\ldots=y_n-y_{n-1}$. Atunci există $x_0,x_1,\ldots,x_n\in[a,b]$, $x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b$ a.î. $F(x_i)=y_i$, $0\leqslant i\leqslant n$. Din T.10.1.3. avem:

$$\text{aria } T_i=\int_{a_{i-1}}^{a_i} f=F(a_i)-F(a_{i-1})=y_i-y_{i-1}=\frac{1}{n}\int_a^b f.$$

Din ultima egalitate deducem imediat că punctele $a_i (1\leqslant i\leqslant n)$ sînt **unic** determinate cu proprietatea din enunț.

Scanned with OKEN Scanner

9.2.79. Exerciţiu. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcţie continuă şi care nu păstrează un semn constant. Atunci există* $\alpha,\beta\in[a,b]$, $\alpha<\beta$ *a.î.* $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=0$.

Soluţie. Evident putem presupune că $f(a)\cdot f(b)<0$, spre exemplu $f(a)<0$ şi $f(b)>0$; altfel considerăm $f|_{[c,d]}$ $[c,d]\subseteq[a,b]$, unde $f(c)\cdot f(d)<0$.

Fie funcţia $F(x)=\int_a^x f$, $x\in[a,b]$. Deoarece $f(a)<0$, există $c\in(a,b)$ a.î. $\int_a^c f<0$. Atunci distingem cazurile:

1° $(\exists)$ $d\in(a,b]$ a.î. $\int_a^d f>0$ (fig. 113 a) Cum F este continuă şi $F(c)<0<F(d)$, ex stă $e\in(c,d)$ a.î. $F(e)=0$ adică $\int_a^e f<0$.

2° $\int_a^x f<0$, $(\forall)$ $x\in(a,b]$. În acest caz considerăm funcţia $F(x)=\int_b^x f$, $x\in[a,b]$. Evident există (fig. 113 b) $c\in[a,b)$ a.î. $\int_b^c f<0$. Cum

$$\int_b^a f=-\int_a^b f>0 \text{ avem că } F(c)<0<F(a).$$

Funcţia F fiind continuă, există $e\in(a,c)$ a.î. $F(e)=0$, deci $\int_b^e f=0$.

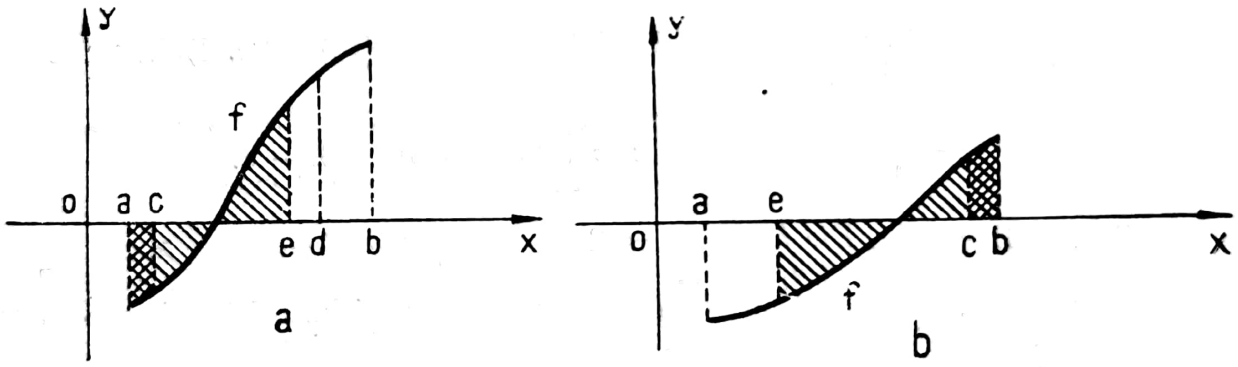


Fig. 113

Corolar 1. *Fie* $I\subseteq\mathbf{R}$ *un interval şi* $f:I\to\mathbf{R}$ *o funcţie continuă cu proprietatea că există* $a,b,d,c\in I$, $a<b$ *şi* $c<d$ *cu* $\left(\int_a^b f\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d f\,dx\right)<0$. *Atunci există* $\alpha,\beta\in I$, $\alpha<\beta$ *cu* $\int_\alpha^\beta f\,dx=0$.

9.2.80. Exerciţiu (Z. O p i a l.) *Fie* $f:[0,a]\to\mathbf{R}$ *o funcţie de clasă* $\mathcal{C}^1$ *cu* $f(0)=0$. *Atunci avem* $\int_0^a|f(x)f'(x)|\,dx\leqslant\frac{a}{2}\int_0^a|f'(x)|^2\,dx$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie funcția $g(x) = \int_0^x |f'(t)|\,dt$, $x \in [0, a]$. Evident g este derivabilă și avem $g'(x) = |f'(x)|$, $(\forall)\ x \in [0, a]$, deci

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|\,dx = \int_0^a |f'(x)| \cdot \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^a |f'(x)| \left(\int_0^x |f(t)|\,dt\right) dx = \int_0^a g'(x)\,g(x)dx = \frac{1}{2}|g(a)|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^a |1 \cdot f'(x)|\,dx\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^a 1^2\,dx\right) \cdot \left(\int_0^a |f'(x)|^2\,dx\right) \text{(P. 7.3.2.)}$$

Prin urmare

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|dx \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a |f'(x)|^2\,dx.$$

9.2.81. Exercițiu. *Fie* $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ *două polinoame cu proprietatea că* $P(x) > 0$ *și* $Q(x) > 0$, $(\forall)\ x \geqslant 0$. *Atunci* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^p}\int_0^x \ln\frac{P(t)}{Q(t)}\,dt = 0$, $(\forall)\ p > 1$.

Ind. Se aplică regula lui Hospital pentru funcțiile $f(x) = \int_0^x \ln\frac{P(t)}{Q(t)}\,dt$, $x \in \mathbf{R}_+^*$ și $g(x) = x^p$, $x \in \mathbf{R}_+^*$, ținîndu-se seama că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x^\alpha}{x^\beta} = 0$, $(\forall)\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+^*$.

Putem ocoli regula lui Hospital scriind:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0$.

Atunci $a_n > 0$, $b_m > 0$ și $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$, avem succesiv:

$$\ln\frac{P(x)}{Q(x)} = (n-m)\ln x + \ln\frac{a_n x^m + a_n x^{m-1} + \ldots.}{b_m x^m + b_m x^{m-1} + \ldots.},$$

$$\frac{1}{x^p}\int_0^x \ln\frac{P(t)}{Q(t)}\,dt = \frac{1}{x^p}\int_0^1 \ln\frac{P(t)}{Q(t)}\,dt + \frac{n-m}{x^p}\int_1^x \ln t\,dt +$$

$$+ \frac{1}{x^p}\int_1^x \frac{a_n t^m + \ldots}{b_m t^m + \ldots}\,dt.$$

Calculăm mai departe $\int_1^x \ln t\,dt$, apoi trecem la limită cu x către $+\infty$.

9.2.82. Exercițiu. *Fie* $f, g : [a, b) \to \mathbf{R}$ *două funcții cu proprietățile:*

1° f *continuă;*

2° g *derivabilă pe* (a, b) *cu derivata nenulă și* $\lim\limits_{x\nearrow b} |g(x)| = \infty$;

3° $(\exists)\ l = \lim\limits_{x\nearrow b} \frac{f(x)}{g'(x)}$

Atunci $\lim\limits_{x\nearrow b} \frac{1}{g(x)}\int_a^x f$ *există și este egală cu* l.

Soluție. Deoarece $g'(x) \neq 0$ $(\forall)\ x \in (a, b)$, rezultă că g este strict monotonă. Cum $\lim\limits_{x\nearrow b} |g(x)| = \infty$, deducem că $(\exists)\ c \in (a, b)$ a.î. $g(x) \neq 0$ $(\forall)\ x \in (c, b)$.

Aplicînd mai departe regula lui Hospital, obţinem :

$$\lim_{x\nearrow b}\frac{1}{g(x)}\int_a^x f=\lim_{x\nearrow b}\frac{\left(\int_a^x f\right)'}{g'(x)}=\lim_{x\nearrow b}\frac{f(x)}{g'(x)}$$

Corolar 1. *Fie* $f:[0,\infty)$ *o funcţie continuă a.î.* $(\exists)\ l=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{p-1}}\cdot f(x)$, *unde* $p>0$ *este fixat. Atunci* $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^p}\int_0^x f$ *există şi este egală cu* lp^{-1}.

Soluţie. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^p}\int_0^x f=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x f\right)'}{px^{p-1}}=p^{-1}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{p-1}}=lp^{-1}$

Corolar 2. *Fie* $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ *o funcţie continuă a.î.* $(\exists)\ l=\lim_{x\to\infty}f(x)$. *Atunci* $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f$ *există şi este egală cu* l.

Soluţia 1. Aplicăm Cor. 1 pentru $p=1$.

Soluţia 2 (directă). Presupunem l finit şi fie $\varepsilon>0$ fixat. Deoarece $\lim_{x\to\infty}f(x)=l$, există $c>0$ a.î. $|l-f(x)|<\varepsilon/2$, $(\forall)\ x\in[c,\infty)$. Atunci

$$\left|l-\frac{1}{x}\int_0^1 f\right|=\left|\frac{1}{x}\int_0^x(l-f)\right|\leqslant\frac{1}{x}\left(\int_0^c|l-f|+\int_c^x|l-f|\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{x}M+\frac{x-c}{x}\frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\ x\in[c,\infty)\left(M:=\int_0^c|l-f|\right),$$

deci

$$\left(l-\frac{1}{x}\int_0^x f\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\ x\geqslant\max\left\{c,\frac{2M}{\varepsilon}\right\}$$

şi deci

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f=l$$

9.2.83. Exerciţiu. *Fie* $-\infty<a<b\leqslant\infty$ *şi* $f,f_1,f_2:[a,b)\to\mathbf{R}$ *trei funcţii integrabile a.î.* $f>0$, $f_2>0$ *şi* $\frac{f_1}{f_2}$ *este monoton (resp. strict) crescătoare. Atunci funcţia*

$$F(x)=\frac{\int_a^x f(t)f_1(t)\,dt}{\int_a^x f(t)f_2(t)\,dt},\ x\in(a,b),$$

este monoton (resp. strict) crescătoare.

Soluţie. Funcţia F este derivabilă (T.9.3.1.) şi avem :

$$F'(x)=\frac{f(x)f_1(x)\int_a^x f(t)f_2(t)\,dt-f(x)f_2(x)\int_a^x f(t)f_1(t)\,dt}{\left[\int_0^x f(t)f_2(t)\,dt\right]^2}=$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \frac{1}{\left[\int_a^x f(t)f_2(t)\mathrm{d}t\right]^2} \int_a^x f(x)f_2(x)f(t)f_2(t)\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(t)}{f_2(t)}\right]\mathrm{d}t$$

Deoarece $\frac{f_1}{f_2}$ este monoton crescătoare, avem :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(t)}{f_2(t)} \geqslant 0, \ (\forall)\ a < t \leqslant x < b;\ F'(x) \geqslant 0, \ (\forall)\ x \in (a, b),$$

prin urmare F este monoton crescătoare.

Corolar 1. *Fie* $-\infty < a < b \leqslant \infty$ *şi* $f_1, f_2 : [a, b) \to \mathbf{R}$ *două funcţii integrabile a.î.* $f_2 > 0$ *şi* $\frac{f_1}{f_2}$ *este monoton (resp. strict) crescătoare. Atunci funcţia*

$$F(x) = \frac{\int_a^x f_1(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^x f_2(t)\,\mathrm{d}t}, \quad x \in (a, b),$$

este monoton (resp. strict) crescătoare.

Corolar 2. *Fie* $f : [0, b) \to \mathbf{R}$ *o funcţie integrabilă cu* $f > 0$. *Atunci* $(\forall)\ p, q \in \mathbf{R}_+^*,\ p < q$, *funcţia*

$$F(x) = \frac{\int_0^x t^q f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x t^p (f(t)\,\mathrm{d}t}, \quad x \in (0, b),$$

este monoton (resp. strict) crescătoare.

Corolar 3. *Fie* $f : [0, b) \to \mathbf{R}$ *o funcţie (strict) monotonă. Atunci funcţia* $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f,\ x \in (0, b)$ *este (strict) monotonă.*

Soluţie. Aplicăm Cor. 1 pentru funcţiile f şi 1.

Corolar 4. *Fie* $-\infty < a < b \leqslant \infty$ *şi* $f, f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbf{R}$ *trei funcţii integrabile a.î.* $f > 0,\ f_2 > 0,\ \frac{f_1}{f_2}$ *monoton (resp. strict) crescătoare şi* $\lim_{x \nearrow b} \left|\int_a^x f f_2\right| = \infty$. *Atunci funcţia*

$$F(x) = \frac{\int_a^x f f_1}{\int_a^x f f_2}, \quad x \in (a, b)$$

este monoton (resp. strict) crescătoare şi avem :

$$\lim_{x \nearrow b} F(x) = \lim_{x \nearrow b} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Aplicînd regula lui Hospital obținem :

$$\lim_{x \nearrow b} F(x) = \lim_{x \nearrow b} \frac{\left(\int_a^x f f_1\right)'}{\left(\int_a^x f f_2\right)'} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

Observație. Limita lui F în punctul b nu depinde decît de funcțiile f_1 și f_2 și nu depinde de funcția f.

9.2.84. Exercițiu (W. Blaschke). *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval* $x_0 \in \mathring{I}$ *un punct și* $f \in \mathcal{C}^2(I)$ *o funcție. Atunci* $(\forall)$ $r > 0$ *cu* $[x_0 - r, x_0 + r] \subseteq I$, *există* $\zeta \in [x_0 - r, x_0 + r]$ *a.î.*

$$f''(\xi) = \frac{3}{r^3} \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} [f(x) - f(x_0)]\, dx \quad (1)$$

Soluție. Din T.6.5.3. rezultă : $(\forall)$ $x \in I$, există $\xi \in [x_0, x]$ a.î.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(\xi),$$

deci

$$\int_{x_0 - r}^{x_0 + r} [f(x) - f(x_0)]\, dx = f'(x_0) \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} (x - x_0)\, dx + \frac{1}{2} f''(\xi) \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} (x - x_0)^2\, dx$$

Cum $\int_{x_0 - r}^{x_0 + r} (x - x_0) dx = 0$ și $\int_{x_0 - r}^{x_0 + r} (x - x_0)^2\, dx = \frac{2}{3} r^3$, deducem relația (1)

9.2.85. Exercițiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție de două ori derivabilă a.î.* $M_k = \sup_{x \in} |f^{(k)}(x)| < +\infty$, $(\forall)$ $k = 0, 1, 2$. *Atunci* $M_1^2 \leqslant 2 M_0 M_2$.

Soluție. Fie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ o funcție de două ori derivabilă a.î. $M = \sup_{x \in \mathbf{R}} |g''(x)| < +\infty$. Atunci (T. 6.5.3.) $(\forall)$ $x, h \in \mathbf{R}$, există $\xi \in (x, x + h)$ a.î.

$$g(x + h) = g(x) + h g'(x) + \frac{h^2}{2} g''(\xi),$$

deci

$$0 \leqslant g(x + h) \leqslant g(x) + h g'(x) + \frac{h^2}{2} M, \ (\forall)\ x,\ h \in \mathbf{R}.$$

Trinomul $h \mapsto \frac{M}{2} h^2 + h g'(x) + g(x)$, $h \in \mathbf{R}$, fiind nenegativ pentru $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, avem :

$$[g'(x)]^2 - 2 M g(x) \leqslant 0, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \quad (1)$$

Deoarece funcțiile nenegative $M_0 - f$ și $M_0 + f$ sînt de două ori derivabile și $\sup_{x \in \mathbf{R}} |[M_0 \pm f(x)]''| = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f''(x)| = M_2$, din (1) obținem :

$$[f'(x)]^2 - 2 M_2 (M_0 - f(x)) \leqslant 0, \ [f'(x)]^2 - 2 M_2 (M_0 + f(x)) \leqslant 0, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

care prin adunare ne dau

$$2[f'(x)]^2 - 4 M_0 M_2 \leqslant 0, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow M_1^2 = \sup_{x \in \mathbf{R}} [f'(x)]^2 \leqslant 2 M_0 M_2.$$

Scanned with OKEN Scanner

9.2.86. Exerciţiu. *Fie* $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă pe* $[0,1]$ *cu* f' *continuă pe* $[0,1]$ *şi derivabilă pe* $(0,1)$. *Dacă* $f(0)=f'(0)=f'(1)=f(1)-1=0$, *atunci există* $\xi\in(0,1)$ *a.î.* $|f''(\xi)|\geqslant 4$.

Soluţie. Utilizînd formula lui Taylor, pentru $(\forall)\ x\in[0,1]$, avem relaţiile :

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=f(0)+\frac{x}{1'}f'(0)+\frac{x^2}{2'}f''(\xi_1(x))\\ f(x)&=f(1)+\frac{x-1}{1!}f'(1)+\frac{(x-1)^2}{2!}f''(\xi_2(x)) \end{aligned}\right\},\ \xi_i(x)\in[0,1]$$

Cum $f(0)=f'(0)=f'(1)=f(1)-1=0$, deducem :

$$f(x)=\frac{x^2}{2!}f''(\xi_1(x))=1+\frac{(x-1)^2}{2!}f''(\xi_2(x)),$$

deci

$$(x-1)^2\,|f''(\xi_1(x))|=|x^2f''(\xi(x))-2|$$

Fie

$$M(x)=\max\{|f''(\xi_1(x))|,\ |f''(\xi_2(x))|\},\ x\in[0,1],$$

atunci

$$(x-1)^2\,M(x)\geqslant 2-x^2\,M(x),$$

deci

$$M(x)\geqslant\frac{2}{2x^2-2x+1},\ (\forall)\ x\in[0,1].$$

Funcţia $\varphi(x)=2x^2-2x+1$, $x\in[0,1]$ îşi atinge minimul în punctul $x=\frac{1}{2}$ şi avem $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, deci $M\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant 4$.

Prin urmare $|f''(\xi)|\geqslant 4$ pentru $\xi=\xi_1\left(\frac{1}{2}\right)$ sau $\xi=\xi_2\left(\frac{1}{2}\right)$

9.2.87. Exerciţiu. *Fie* $f:[-a,a]\to\mathbf{R}$ *o funcţie de două ori derivabilă. Atunci :*

$$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{a}\|f\|_\infty+\frac{x^2+a^2}{2a}\|f''\|_\infty,(\forall)\ x\in[-a,a],$$

unde am notat $\|f\|_\infty=\sup\limits_{x\in[-a,a]}|f(x)|$ *şi* $\|f''\|_\infty=\sup\limits_{x\in[-a,a]}|f''(x)|$

Soluţie. Aplicînd formula lui Taylor (T. 6.5.3.) obţinem :

$$f(a)=f(x)+\frac{a-x}{1!}f'(x)+\frac{(a-x)^2}{2!}f''(\xi),\ \xi\in(x,a)$$

$$f(-a)=f(x)+\frac{-a-x}{1!}f'(x)+\frac{(-a-x)^2}{2!}f''(\eta),\ \eta\in(-a,x),$$

De aici prin scădere deducem :

$$f'(x)=\frac{f(a)-f(-a)}{2a}+\frac{1}{4a}[(a+x)^2f''(\eta)-(a-x)^2f''(\xi)],$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2a}(\|f\|_\infty + \|f\|_\infty) + \frac{1}{4a}[(a+x)^2 + (a-x)^2]\,\|f''\|_\infty =$$

$$= \frac{1}{a}\|f\|_\infty + \frac{a^2+x^2}{2a}\|f''\|_\infty.$$

Corolar 1. *Fie* $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ *o funcție de două derivabilă cu* f'' *mărginită. Atunci avem* : $\|f'\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty$

9.2.88. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci avem* :

$$f \geqslant 0 \Leftrightarrow (\forall)\ \delta \in \mathbf{R}_+ \text{ și } n \in \mathbf{N}, \text{ rezultă că} \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} f \geqslant 0.$$

Soluție. ($\Leftarrow$) Să presupunem că există $x_0 \in \mathbf{R}_+$ cu $f(x_0) < 0$. Funcţia f fiind continuă, există atunci $\varepsilon > 0$ a.î.

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2}f(x_0)\ (\forall)\ x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon) \subseteq \mathbf{R}_+.$$

Fie $0 < \delta < \varepsilon$ fixat; evident există $n \in \mathbf{N}$ cu proprietatea că

$$(n\delta, (n+1)\delta) \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

deci

$$0 \leqslant \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} f \leqslant \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} \frac{1}{2}f(x_0) = \frac{1}{2}\delta f(x_0)$$

şi deci

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\delta f(x_0) \leqslant 0,$$

absurd. Rămîne că $f(x_0) \geqslant 0$, deci $f \geqslant 0$.

9.2.89. Exerciţiu. *Fie* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *o funcție monotonă. Atunci*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow (\exists)\ \ T > 0 \ \textit{a.î.}\ \lim_{n\to\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f = 0$$

Ind. Presupunem f monoton descrescătoare. Atunci

$$f((n+1)T) \leqslant f(x) \leqslant f(nT),\ (\forall)\ x \in [nT,\ (n+1)T],$$

deci

$$Tf((n+1)T) \leqslant \int_{nT}^{(n+1)T} f \leqslant Tf(nT)$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(nT) = 0.$$

Însă $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow (\exists)\ T > 0$ a.î. $\lim_{n\to\infty} f(nT) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

9.2.90. Exerciţiu. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcţie de două ori derivabilă cu* $f''\geqslant 0$. *Atunci* $(\forall)\ x_0\in[a,b]$ *avem inegalitatea :*

$$\int_a^b f\geqslant (b-a)\left[f(x_0)+\left(\frac{b+a}{2}-x_0\right)f'(x_0)\right].$$

Ind. Fie (Δ) ecuaţia tangentei geometrice la graficul lui f în punctul $(x_0,f(x_0))$. Avem :

$$(\Delta):\ y-f(x_0)=(x-x_0)f'(x_0).$$

Deoarece $f''\geqslant 0$, rezultă (P. 7.1.6.) că f este convexă, deci (Δ) este situată sub graficul lui f. Atunci

$$f(x)\geqslant f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0),\ (\forall)\ x\in[a,b],$$

deci

$$\int_a^b f\geqslant (b-a)f(x_0)+f'(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2}\Big|_a^b \text{ etc.}$$

9.2.91. Exerciţiu. *Fie* $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ *două funcţii continui. Atunci există* $c\in(a,b)$ *a.î.* $f(c)\int_a^b g=g(c)\int_a^b f$.

Ind. Fie funcţia $F(x)=\left(\int_a^x f\right)\cdot\left(\int_a^b g\right)-\left(\int_a^x g\right)\cdot\left(\int_a^b f\right)$, $x\in[a,b]$. Evident F este derivabilă şi $F(a)=F(b)=0$, deci cf. th. Rolle există $c\in(a,b)$ a.î. $F'(c)=0$ etc.

Corolar 1. *Fie* $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ *două funcţii de clasă* $\mathcal{C}^1$. *Atunci există* $c\in(a,b)$ *a.î.* $f'(c)\,(g(b)-g(a))=g'(c)(f(b)-f(a))$.

Ind. Aplicăm Ex. 9.2.91. pentru funcţiile f' şi g'.

9.2.92. Exerciţiu. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcţie continuă, nenegativă şi neidentică nulă pe nici un subinterval al lui* $[a,b]$. *Atunci* $(\forall)\ \lambda>0$, *există* $x_0\in(a,b)$ *unic determinat a.î.* $\int_a^{x_0} f=\lambda\int_{x_0}^b f$.

Ind. Fie $\lambda>0$ fixat şi $F(x)=\int_a^x f-\lambda\int_x^b f$, $x\in[a,b]$. Atunci $F(a)\cdot F(b)=-\lambda\left(\int_a^b f\right)<0$, deci $(\exists)\ x_0\in(a,b)$ a.î. $F(x_0)=0$. Dacă $F(x_0+h)=0$, rezultă că $\int_{x_0}^{x_0+h} f=0$, absurd.

9.2.93. Exerciţiu. *Să se determine o funcţie continuă* $f:\mathbf{R}_+^*\to\mathbf{R}$ *cu proprietăţile :* $1^\circ\int_0^x f(t)\mathrm{d}t>0$, $(\forall)x\in\mathbf{R}_+^*$; 2° $(\exists)\ c>0$ *a.î.* $f(x)<0$, $(\forall)\ x\geqslant c$.

Ind. Fie $f:\mathbf{R}_+^*\to\mathbf{R}$ o funcţie continuă definită astfel (fig. 114) :

$$f(x)=\begin{cases}k,\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ \text{afină pe }\left[\dfrac{1}{2},1\right]\\ -e^{-x},\ 1\leqslant x<\infty.\end{cases}$$

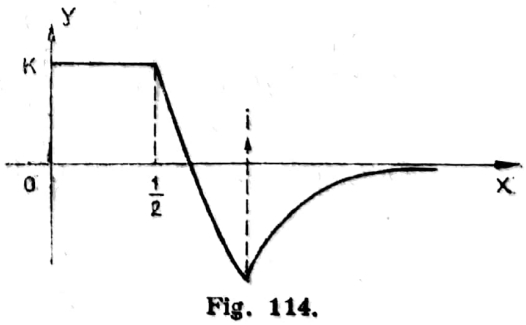


Fig. 114.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci $\int_0^{1/2} f(t)\mathrm{d}t = \frac{k}{2}$; $\int_{1/2}^{1} f(t)\mathrm{d}t > 0$, dacă $k > \mathrm{e}^{-1}$ și $-2\mathrm{e}^{-1} < \int_1^x f(t)\mathrm{d}t < -\mathrm{e}^{-1}$, dacă $x > 1$, deci $\int_0^x f(x) \geqslant \frac{k}{2} - 2\mathrm{e}^{-1} > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$, dacă $k > 4\mathrm{e}^{-1}$.

9.2.94. Exerciţiu. *Fie* $\mathcal{C}([a,b])$ *mulţimea tuturor funcţiilor continui definite pe* $[a, b]$ *şi cu valori reale şi* $T(f) = \int_a^b \frac{|f|}{1+|f|}\,\mathrm{d}x$, $(\forall)\ f \in \mathcal{C}([a, b])$. *Atunci avem*: 1° $Tf = 0 \Leftrightarrow f = 0$ 2° $T(f+g) \leqslant Tf + Tg$, $(\forall)\ f, g \in \mathcal{C}[a, b]$.

Ind. Funcţia $F = \frac{|f|}{1+|f|}$ este continuă şi $F \geqslant 0$, deci avem:

$$\int_a^b F = 0 \Leftrightarrow F = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Inegalitatea 2° rezultă din P. 4.2.1. Cor. 1.

9.2.95. Exerciţiu. *Fie* $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *două funcţii continui şi monotone,* $A_n = \int_{1/n+1}^{1/n} f(nx)\mathrm{d}x$ *şi* $B_n = \int_{1/n+1}^{1/n} g(nx)\mathrm{d}x$. *Atunci* $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \frac{f(1)}{g(1)}$, *dacă* $g(1) \neq 0$.

Ind. Presupunem f şi g monoton crescătoare. Atunci

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) f\left(\frac{n}{n+1}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(nx)\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) f(1),$$

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) g\left(\frac{n}{n+1}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) g(1).$$

9.2.96. Exerciţiu. *Fie* $f_0 : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+$ *o funcţie continuă arbitrară şi* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir de funcţii definit astfel*: $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t$, $(\forall)\ x \geqslant 0$. *Atunci*

1° $\frac{f_n(x)}{x^n} > \frac{f_{n+1}(x)}{x^{n+1}}$, $(\forall)\ x > 0 \ \wedge\ n \geqslant 1$;

2° $f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f_0(t)\mathrm{d}t$, $(\forall)\ x \geqslant 0 \wedge n \geqslant 1$.

Ind. Prin inducţie relativ la n. Pentru 1° vezi şi Ex. 9.2.38.

9.2.97. Exerciţiu. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+^*$ *o funcţie integrabilă şi* $h = b - a$. *Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a) + f\left(a + \frac{1}{n}h\right) + \ldots + f\left(a + \frac{n-1}{n}h\right)}{f(a) + f\left(a + \frac{1}{2n}h\right) + \ldots + f\left(a + \frac{2n-1}{n}h\right)} = 1.$$

Ind. Ţinem seama că $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ şi că avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}h\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{2k-1}{2n}h\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Scanned with OKEN Scanner

9.2.98. Exerciţiu. *Să se determine funcţiile continue* $f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ *cu proprietatea că*

$$\int_0^x f(t)\sin t\,dt = \int_0^x \frac{1}{t} f(t)\,dt,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*,$$

Ind. Fie $A = \left\{x \in \mathbf{R}_+^*,\ \sin x = \frac{1}{x}\right\}$. Evident A este numerabilă, deci $\overline{\mathbf{R}_+^* \setminus A} = \mathbf{R}_+$. Prin derivare avem : $f(x) \cdot \sin x = \frac{1}{x} f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^* \Leftrightarrow f(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^* \setminus A$. Funcţia f fiind continuă pe $\mathbf{R}_+^*$ şi nulă pe $\mathbf{R}_+^* \setminus A$, este nulă pe $\mathbf{R}_+^*$.

9.2.99. Exerciţiu. *Fie* $f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă cu* $f' > 0$ *şi* $F(x) = \int_0^x f$, $x \in \mathbf{R}_+^*$. *Atunci* $\frac{1}{x} F(x) < F'(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$

Ind. $F' = f$, $F'' = f' > 0$, deci F' este strict crescătoare.

$$F(x) = F(x) - F(0) = xF'(\xi) < xF'(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$$

9.2.100. Exerciţiu. *Fie* $f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ *o funcţie de clasă* $\mathcal{C}^1$ *cu* $f(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$ *şi* $F(x) = \int_0^x tf'(t)dt$, $x \in \mathbf{R}_+^*$. *Atunci* $F(x) < xf(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$.

Ind. Integrînd prin părţi avem :

$$F(x) = \int_0^x \underset{u}{t}\, \underbrace{f'(t)dt}_{dv} = xf(x) - \int_0^x f(t)\,dt$$

Cum $f \geqslant 0$, avem $\int_0^x f > 0$, deci $F(x) < xf(x)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}_+^*$.

9.2.101. Exerciţiu. *Fie* $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă. Atunci*

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx.$$

Ind. Facem în prima (resp. a doua) integrală substituţia $\sin x = t$ (resp. $\cos x = t$).

9.2.102. Exerciţiu. *Fie* $f: (a, \infty) \to \mathbf{R}_+^*$ $(a \in \mathbf{R})$ *o funcţie monoton descrescătoare a.î.* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. *Să se calculeze limita şirului* $(a_n)_{n\geq 1}$ *definit astfel*

$$a_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx,\ (\forall) n \geqslant 1.$$

Ind. $0 \leqslant a_n = \int_n^{n+1} f(x)dx = 1.\ f(\xi) \leqslant f(n) \to 0$ $(n < \xi < n+1)$.

9.2.103. Exerciţiu. *Fie* $f: [0, \infty) \to \mathbf{R}$ *o funcţie monoton descrescătoare şi nenegativă şi* $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $x \in [0, \infty)$. *Atunci* F *este subaditivă.*

Ind. $(\forall)\ x, y \in [0, \infty)$, $x < y$, avem :

$$F(x+y) = \int_0^{x+y} f = \int_0^x f + \int_x^{x+y} f \leqslant \int_0^x f + \int_0^y f = F(x) + F(y).$$

Scanned with OKEN Scanner

9.2.104. Exerciţiu. *Fie* $f:[a,\infty)\to\mathbf{R}$ *o funcţie continuă şi mărginită. Atunci*

$$1^\circ\ \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^p}\int_a^t f=0,\ (\forall)\ p>1;\quad 2^\circ\ \lim_{x\to\infty}\int_x^{x+p}\frac{f(t)}{t}\,dt=0,\ (\forall)\ p>0.$$

Ind. $\left|\frac{1}{t^p}\int_a^t f\right|\leqslant\frac{|t-a|}{|t|^p}\sup_{x\geqslant a}|f(x)|\to 0$

$$\left|\int_x^{x+p}\frac{f(t)}{t}\,dt\right|\leqslant\|f\|_\infty\int_x^{x+p}\frac{1}{t}\,dt=\|f\|_\infty\ln\left(1+\frac{p}{x}\right),\ (\forall)\ x\in\mathbf{R}_+,\ x\geqslant a.$$

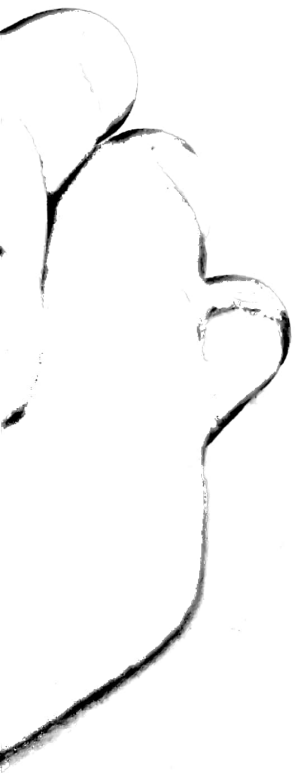
9.2.105. Exerciţiu. *Fie* $b>a>0$ *şi* $f:[a,b]\to\mathbf{R}_+^*$ *o funcţie derivabilă a.î.* $f(x)+xf'(x)\geqslant 0$, $(\forall)x\in[a,b]$. *Atunci*

$$\left|\int_a^b f(x)\cos(\lg x)dx\right|\leqslant 2b\,f(b)$$

9.2.106. Exerciţiu. *Fie* f *o funcţie polinomială de* grad 5. *Atunci*

$$\int_{-x}^{x}f(t)dt=\frac{1}{2}x\,[f(\lambda x)+f(\mu x)+f(-\lambda x)+f(-\mu x)],\ (\forall)\ x\in\mathbf{R},$$

unde λ *şi* μ *sînt două numere pozitive, independente de* f *şi* x *a.î.* λ^2 *şi* μ^2 *verifică ecuaţia* $45\ \alpha^2-90\alpha+1=0$.



Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 10

APLICAȚII ALE CALCULULUI INTEGRAL

10.1. Calculul ariilor

10.1.1. Exercițiu. *Să se calculeze aria determinată de parabolele* : $y^2 = 2px$ *și* $x^2 = 2py$ $(p > 0)$.

Soluție. Evident parabolele date se intersectează în punctele $(0,0)$ și $(2p, 2p)$ (fig. 115).

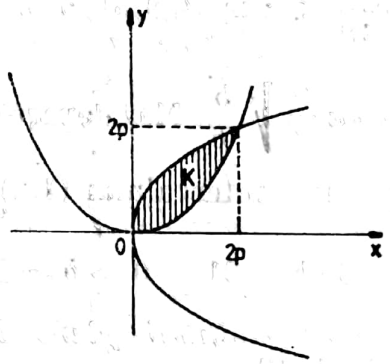


Fig. 115.

$$\text{aria } (K) = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{2p}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6p} x^3\right]_0^{2p} = \frac{4p^2}{3}.$$

10.1.2. Exercițiu. *Să se calculeze aria unui cerc de rază* r.

Soluție. Fie $K := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ 0 \leqslant x \leqslant r,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{r^2 - x^2}\}$. Atunci aria cercului (C) de rază r este egală cu de 4 ori aria lui K, deci (T.10.1.3.) :

$$\text{aria } (C) = 4 \text{ aria } (K) = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx =$$

$$= 4\left(\frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r}\right)\Big|_0^r = 4\frac{r^2}{2} \arcsin 1 = \pi r^2.$$

10.1.3. Exercițiu. *Fie* K *porțiunea din plan determinată de axa* Ox, *dreapta de ecuație* $x = 1$ *și parabola de ecuație* $y = x^2$. *Să se determine trei drepte paralele la axa* Oy *care împart* K *în trei porțiuni de arii egale.*

Soluție. Afirmația revine la a determina două numere $a, b \in (0,1)$ a.i. să avem :

$$\int_0^a x^2\, dx = \int_a^b x^2\, dx = \int_b^1 x^2\, dx \Leftrightarrow \frac{a^3}{3} = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3} - \frac{b^3}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a^3 = b^3 \text{ și } a^3 = 1 - b^3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \text{ și } b = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

10.1.4. Exerciţiu. *Fie K porţiunea din plan determinată de axa Ox, dreapta $y = 2 - x$ şi parabola $y = x^2$. Să se determine trei drepte paralele la Oy care împart K în trei porţiuni K_1, K_2, K_3 de arii egale.*

Soluţie.

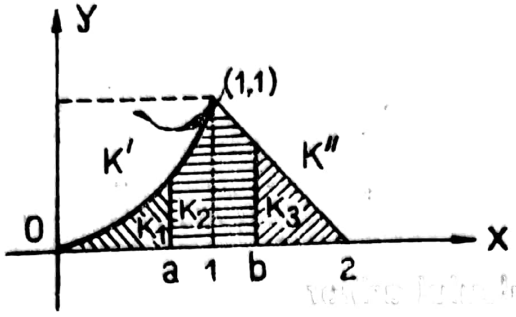


Fig. 116

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Problema revine la a determina două numere $0 < a < b < 2$ a.î. $\int_0^a f = \int_a^b f = \int_b^2 f$. Dreapta $x = 1$ împarte K în două porţiuni K' şi K'' de arii egale (fig. 116), unde

$$\text{aria } (K') = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \text{ şi aria } (K'') = \int_1^2 (2 - x)\,dx = \frac{1}{2}, \text{ deci}$$

$$\text{aria } (K) = \text{aria } (K') + \text{aria } (K'') = \frac{5}{6}.$$

Atunci $\text{aria } (K_1) = \frac{1}{3}\,\text{aria } (K) = \frac{5}{18} < \text{aria } (K')$, deci a aparţine intervalului $(0,1)$ şi deci $\frac{5}{18} = \int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$. Mai departe $\text{aria } (K_3) = \frac{1}{3}\,\text{aria } (K) = \frac{5}{18} > \text{aria } (K'')$, deci b aparţine intervalului $(1,2)$ şi deci $\frac{5}{18} = \int_b^2 (2 - x)\,dx = \frac{b^2 - 4b + 4}{2} \Leftrightarrow 9b^2 - 36b + 31 = 0 \Leftrightarrow b = 2 - \frac{1}{3}\sqrt{5}$.

10.1.5. Exerciţiu. *Să se calculeze aria mulţimii plane K determinată de parabola $y = x^2$ şi dreapta $y = 3x + 10$.*

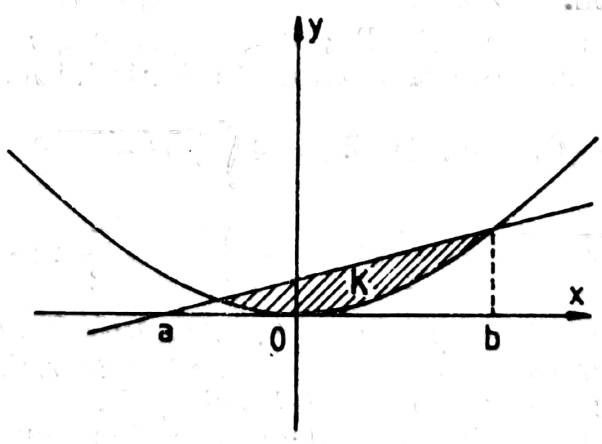


Fig. 117

Soluţie. Rezolvînd sistemul $y - x^2 = 0$, $y - 3x - 10 = 0$, aflăm coordonatele punctelor de intersecţie ale parabolei cu dreapta (fig. 117). Obţinem $a = -2$, şi $b = 5$. Atunci aria

$$(K) = \int_{-2}^{5} (3x + 10)\,dx - \int_{-2}^{5} x^2\,dx = \left(\frac{3x^2}{2} + 10x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{5} = \frac{155}{6}.$$

Scanned with OKEN Scanner

10.1.6. Exerciţiu. *Să se calculeze aria unui sector de cerc.*

Soluţie. Ecuaţia unui sector de cerc în coordonate polare (fig. 118) este $\rho(\theta) = r$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$. Atunci aria $(K) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2} r^2(\theta_2 - \theta_1) = \frac{1}{2} r^2 \alpha$.

10.1.7. Exerciţiu. *Să se calculeze aria determinată de o buclă a lemniscatei.*

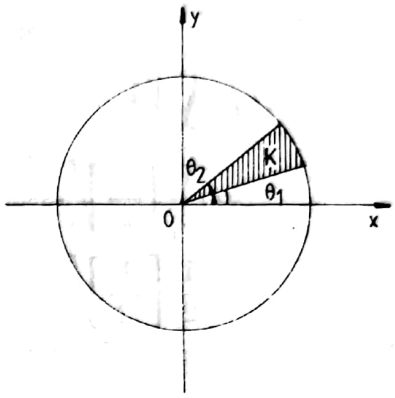


Fig. 118

Ind. Avem aria $(K) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \rho^2\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \rho^2\, d\theta$,

unde $\rho^2(\theta) = 2a^2 \cos 2\theta$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Obţinem aria $(K) = a^2$.

10.1.8. Exerciţiu. *Să se calculeze aria mulţimilor plane K definite astfel:*

1° $K := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2,\ x \geqslant 0\}$

2° $K := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 1 - x\}$

3° $K := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0\}$

4° $K := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ \sin x \leqslant y \leqslant x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$

Ind. Semnificaţia geometrică a mulţimilor K este dată în fig. 119 iar ariile lor au respectiv expresiile:

1° aria $(K) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2\, dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$;

2° aria $(K) = \int_0^1 (\sqrt{1 - x^2} - (-x + 1))\, dx$;

3° aria $(K) = \int_0^1 \left(\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}\right) dx$;

4° aria $(K) = \int_0^{\pi} (x - \sin x)\, dx$.

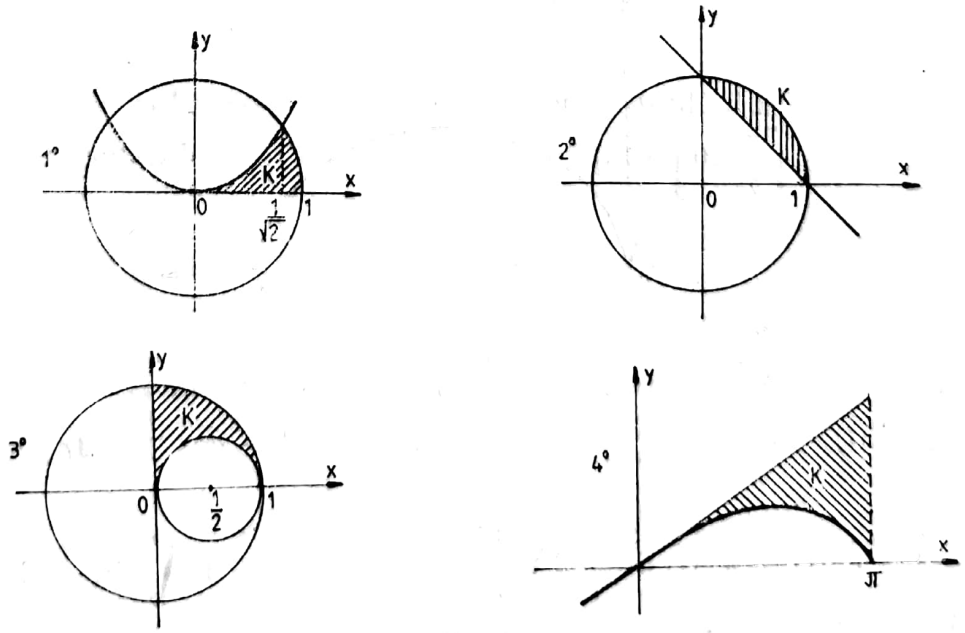


Fig. 119

10.2. Calculul lungimilor

10.2.1. Exerciţiu. *Să se calculeze lungimea arcului de parabolă* $y = x^2$, $x \in \mathbf{R}$, *cuprins între punctele* (0,0) *şi* (1,1).

Soluţie. Fie funcţia $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Arcul Γ de parabolă $y = x^2$ cuprins între punctele (0,0) şi (1,1) coincide cu graficul lui f (fig. 120). Atunci (T.10.2.4. Cor. 1) avem :

$$l(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + f'^2}\,(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} + \frac{1}{8}\ln\left(x + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}\right)\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{8}\ln\left(1 + \sqrt{\frac{5}{4}}\right) - \frac{1}{8}\ln\sqrt{\frac{5}{4}}\right] \text{ etc.}$$

Am utilizat formula 8.2.5. (13°)

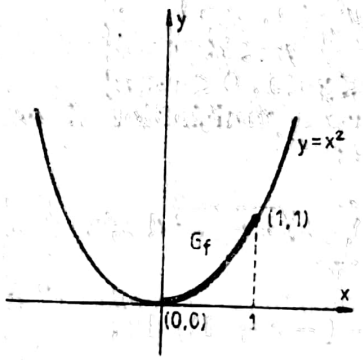


Fig. 120

10.2.2. Exerciţiu. *Să se calculeze lungimea unei bucle de cicloidă.*

Soluţie. Ecuaţia parametrică a primei bucle de cicloidă (fig. 121) se scrie :

$$x = r(t - \sin t), \quad y = r(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

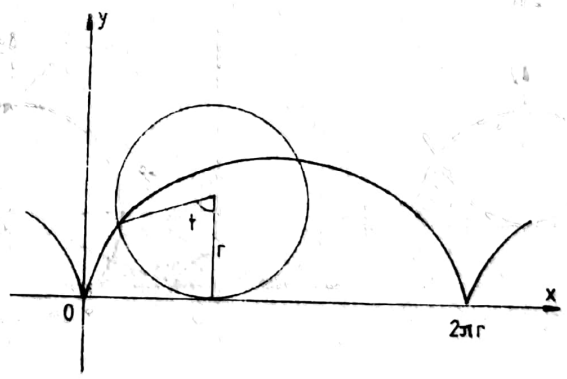


Fig. 121

Atunci $x'(t) = r(1 - \cos t)$, $y'(t) = r \sin t$ deci avem

$$x'^2(t) + y'^2(t) = r^2[(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t] = 2r^2(1 - \cos t) = 4r\sin^2\frac{t}{2},$$

şi deci

$$l = \int_0^2 \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt = 2\int_0^\pi \sqrt{4r^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 4r\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}\,dt.$$

Prin urmare $l = 8r$.

10.2.3. Exerciţiu. *Să se calculeze lungimea astroidei.*

Soluţie. Ecuaţia astroidei se scrie $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $(a>0)$. Astroida fiind simetrică faţă de axele de coordonate cît şi faţă de prima bisectoare (fig. 122), avem $l(\Gamma) = 8\, l(G_f)$, unde G_f este graficul funcţiei $f(x) = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, $x \in [x_0, a]$ unde $x_0 = 2^{-\frac{2}{3}}\, a$ este abscisa punctului de intersecţie dintre astroidă şi prima bisectoare, în primul cadran. Din T. 10.2.4. Cor. 1 rezultă $l(G_f) = \int_{x_0}^{a} \sqrt{1+f'^2}\, dx$. Cum avem :

$$f'(x) = \frac{3}{2}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})\left(-\frac{2}{3}\, x^{-\frac{1}{3}}\right) = -\, x^{-\frac{1}{3}}\,(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}},$$

deci

$$1 + f'^2(x) = 1 + x^{-\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) = a^{\frac{2}{3}}\, x^{-\frac{2}{3}}, \quad (\forall)\ x \in [x_0, a].$$

deducem :

$$l(G_f) = \int_{x_0}^{a} a^{\frac{1}{3}}\, x^{-\frac{1}{3}}\, dx = a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{2}{3}}\Big|_{x_0}^{a} = \frac{3a}{4}.$$

Prin urmare lungimea astroidei este egală cu $6a$.

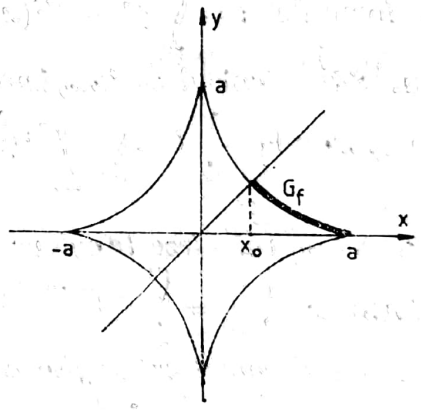


Fig. 122

Observaţia 1. Putem reprezenta arcul de astroidă din primul cadran, parametric, prin ecuaţiile : $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi atunci (T.10.2.4.) avem $l(\Gamma) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$ etc.

Observaţia 2. Funcţia f considerată mai sus putea fi definită pe intervalul $[0, a]$ însă atunci $l(G_f)$ se calculează cu ajutorul unei integrale improprii.

10.2.4. Exerciţiu. *Să se calculeze lungimea cardioidei.*

Soluţie. Ecuaţia cardioidei în coordonate polare se scrie : $\rho(\theta) = a\ (1 - \cos\theta)$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$. (fig. 123). Atunci

$$\rho'(\theta) = a\sin\theta), \quad \rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta) =$$

$$= a^2(1 - \cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta = 2a^2(1 - \cos\theta) = 4a^2\sin^2\frac{\theta}{2},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$\frac{1}{2}\,l = \int_0^{\pi} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,d\theta = 2a\int_0^{\pi} \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4a.$$

Prin urmare $l = 8a$.

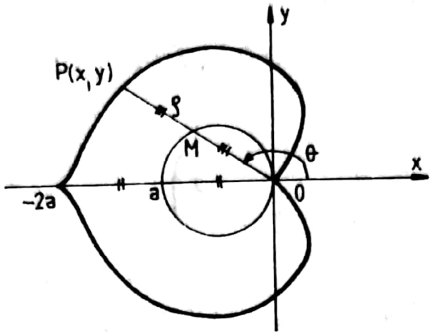


Fig. 123

10.2.5. Exerciţiu. *Să se calculeze lungimea spiralei logaritmice.*

Ind. Se aplică formula $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,d\theta$, pentru $\rho(\theta) = ae^{\theta}$.

10.2.6. Exerciţiu. *Să se calculeze lungimea unei bucle de sinusoidă.*

Ind. Se aplică formula $l = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$, pentru $f(x) = \sin x$.

10.2.7. Exerciţiu. *Să se calculeze lungimea lemniscatei.*

Ind. Se aplică formula $\frac{1}{4}\,l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\rho^3(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,d\theta$, pentru $\rho^2(\theta) = 2a^2\cos 2\theta$.

10.2.8. Exerciţiu. *Să se calculeze lungimea buclei unei strofoide.*

Ind. Se aplică formula $\frac{1}{2}\,l = \int_0^{1} \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$, pentru $f(x) = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.

10.2.9. Exerciţiu. *Să se calculeze lungimea buclei foliumului lui Descartes*

Ind. Se aplică formula $l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,d\theta$, pentru $\rho(\theta) = \frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$.

10.2.10. Exerciţiu. *Un biciclist se deplasează cu viteza v. Să se calculeze viteza v' a unui punct de pe roata bicicletei.*

Ind. Punctul descrie o cicloidă. Se calculează lungimea l a unei bucle. Avem $v' = \frac{lv}{2\pi r}$.

10.3. Calculul volumelor corpurilor de rotaţie

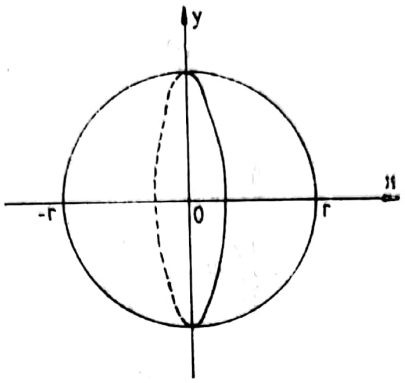
10.3.1. Exerciţiu. *Să se calculeze volumul sferei* (bilei).

Soluţie. O bilă K cu centrul în origine de rază r este obţinută prin rotaţia graficului funcţiei $f(x) = +\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$ (semicerc) în jurul axei Ox

Scanned with OKEN Scanner

(fig. 124). Atunci avem :

$$\text{vol}\,(K) = \pi\int_{-r}^{r} [f(x)]^2\,dx = 2\pi\int_0^r [f(x)]^2\,dx = 2\pi\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = \frac{4\pi r^3}{3}.$$



$$\boxed{\text{vol}(K) = \frac{4\pi r^3}{3}}$$

Fig. 124

10.3.2. Exerciţiu. *Să se calculeze volumul uni con circular drept.*

Soluţie. Fie K un con circular drept de rază r şi înălţime h ; notăm $\frac{r}{h}$ cu m. Evident K poate fi obţinut prin rotaţia graficului funcţiei $f(x) = m\,x$, $x \in [0,h]$ în jurul axei ox (fig. 125).

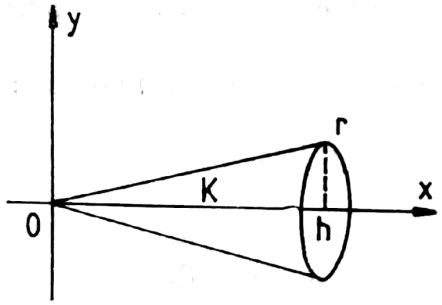


Fig. 125

$$\text{vol}\,(K) = \pi\int_0^h f^2(x)\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx =$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

10.3.3. Exerciţiu. *Să se calculeze volumul unui trunchi de con.*

Soluţie. Fie K un trunchi de con de raze r_1, r_2 şi de înălţime h. Ecuaţia dreptei care trece prin punctele $(0, r_1)$, şi (h, r_2) se scrie

$$y = \frac{r_2 - r_1}{h}\,x + r_1, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Evident K poate fi obţinut prin rotaţia graficului funcţiei $f(x) = \frac{r_2 - r_1}{h}\,x + r_1$, $x \in [0, h]$, în jurul axei ox (fig. 126).

$$\text{vol}\,(K) = \pi\int_0^h f^2(x)\,dx =$$

$$= \pi\int_0^h \left(\frac{r_2 - r_1}{h}\,x + r_1\right)^2 dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot\frac{h}{r_2 - r_1}\cdot\left(\frac{r_2 - r_1}{h}\right)x + r_1\Big)^3\Big|_0^h =$$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot\frac{h}{r_2 - r_1}(r_2^3 - r_1^3) = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

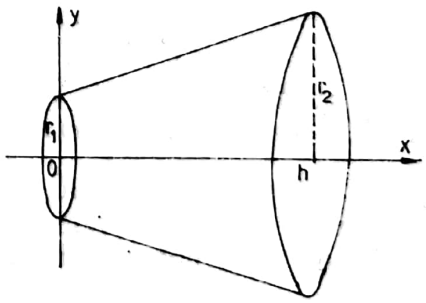


Fig. 126

10.3.4. Exerciţiu. *Să se calculeze volumul unui segment de sferă.*

Soluţie. Fie o sferă de rază r şi K un segment al său de înălţime h. Evident K poate fi obţinut prin rotaţia graficului funcţiei $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [r - h, r]$ în jurul axei ox (fig. 127).

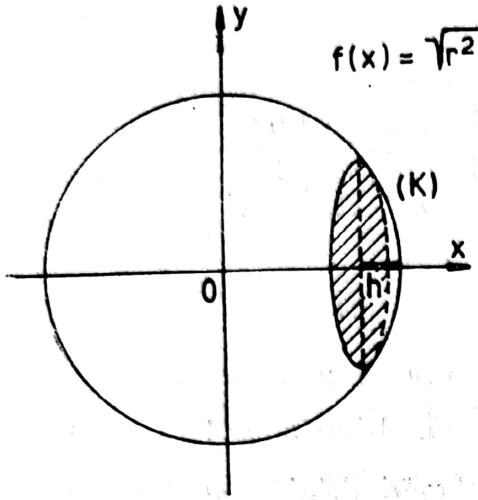


Fig. 127

$$\text{vol}\,(K) = \pi \int_{r-h}^{r} f^2(x)\,dx =$$

$$= \pi \int_{r-h}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \left[\pi\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_{r-h}^{r} =$$

$$= \pi\left\{\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left[r^2(r-h) - \frac{(r-h)^3}{3}\right]\right\} =$$

$$= \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3}.$$

În particular pentru $h = r$ obţinem volumul emisferei care este egal cu $\frac{2\pi r^3}{3}$.

10.3.5. Exerciţiu. *Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia unui arc de cicloidă în jurul axei ox.*

Soluţie. Cicloida (primul arc) admite reprezentarea parametrică :

$$x = r(t - \sin t)\ y = r(1 - \cos t)_{0<t<2\pi},$$

deci

$$\text{vol}\,(K) = \pi \int_0^{2\pi} r^2 (1 - \cos t)^2 \cdot r\,(1 - \cos t)\,dt =$$

$$= \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\,dt = \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\,dt$$

Cum avem $\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\,dt = \pi$ şi

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (\cos 3t + 3\cos t)\,dt = 0,$$

obţinem :

$$\text{vol}\,(K) = 3r^3(2\pi - 0 + 3\pi + 0) = 15\,\pi^2 r^3.$$

10.3.6. Exerciţiu. *Să se calculeze volumul corpului K obţinut prin rotaţia unei astroide în jurul uneia din axele sale (astroid).*

Soluţie. Ecuaţia astroidei se scrie $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$. Astroida fiind simetrică faţă de ambele axe de coordonate (fig. 128), avem $\text{vol}\,(K) = 2\,\text{vol}\,(K_0)$, unde K_0 este corpul obţinut prin rotaţia mulţimii

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}_+;\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leqslant a^{\frac{2}{3}}\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+;\ 0 \leqslant y \leqslant f(x),\ 0 \leqslant x \leqslant a\},$$

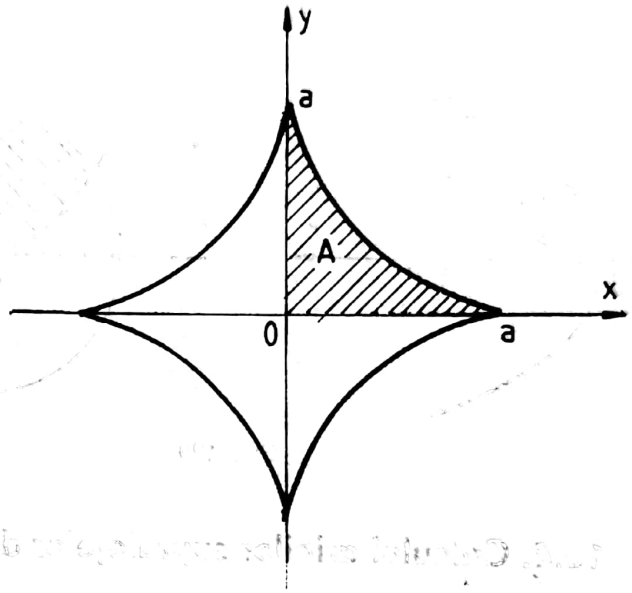
Scanned with OKEN Scanner

unde $f(x) = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, $x \in [0, a]$. Atunci (T.10.3.1.) avem :

$$\text{vol}\,(K_0) = \pi \int_0^a f^2 = \pi \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^a (a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{4}{3}} - x^2)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \pi \left(a^2 x - \frac{9}{5} a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7} a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^a = \frac{18\,\pi a^3}{105} \text{ etc.}$$

Fig. 128



10.3.7. Exerciţiu. *Să se calculeze volumul corpurilor K obţinute prin rotaţia mulţimii plane A în jurul axei Ox, unde A este definită respectiv prin relaţiile următoare :*

1° $A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ 0 \leqslant y \leqslant 1 + x^2,\ -1 \leqslant x \leqslant 1\}$;

2° $A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x,\ -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$;

3° $A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x \geqslant y^2,\ y \geqslant x^2\}$

4° $A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leqslant \sqrt{2}\, y \geqslant x^2\}$.

Ind. Semnificaţia geometrică a mulţimilor A este dată în fig. 129 iar volumul corpurilor de rotaţie K au respectiv expresiile :

1° $\text{vol}\,(K) = \pi \int_{-1}^{1} (1 + x^2)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{56}{15}\pi$;

2° $\text{vol}\,(K) = \pi \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \pi^2$;

3° $\text{vol}\,(K) = \pi \int_{-1}^{1} [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2]\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{10}$;

4° $\text{vol}\,(K) = \pi \int_{-1}^{1} [(\sqrt{2 - x^2}) - (x^2)^2]\,\mathrm{d}x = \frac{10\pi}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

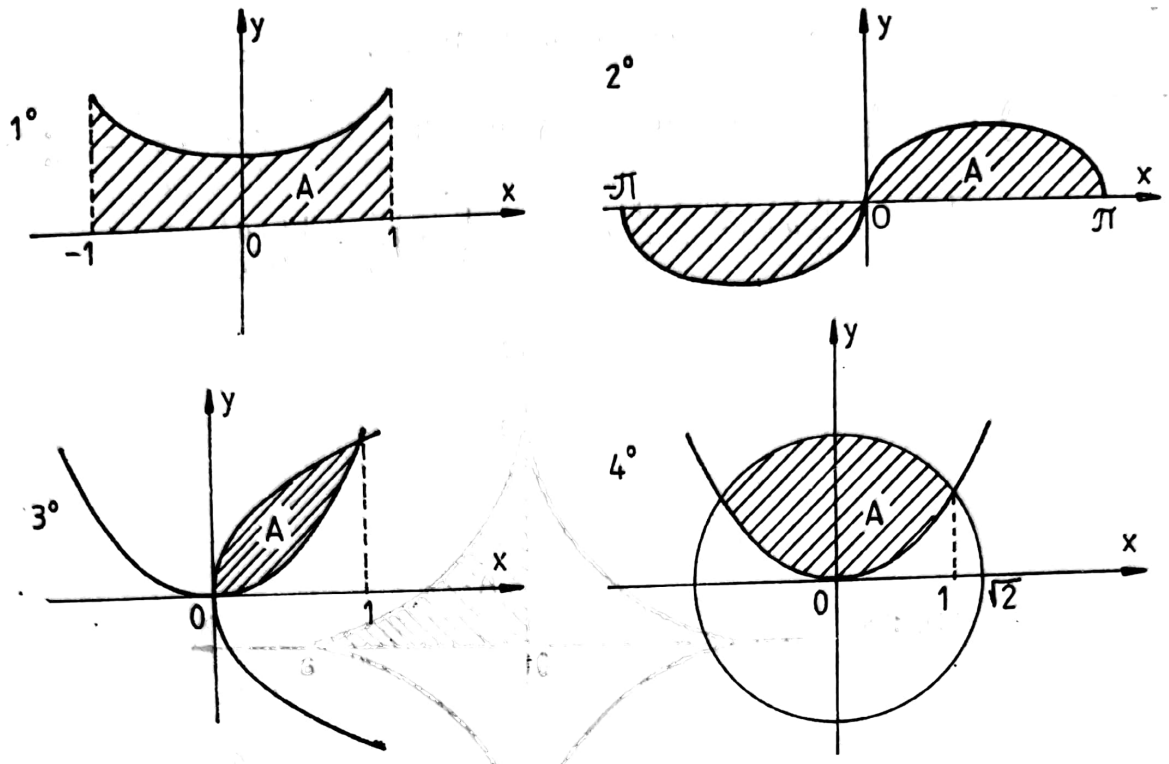


Fig. 129

10.4. Calculul ariilor suprafeţelor de rotaţie

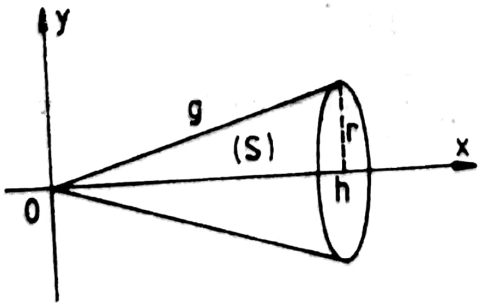
10.4.1. Exerciţiu. *Să se afle aria laterală a unui con circular drept.*

Soluţie. Un con circular drept de înălţime h şi raza r se obţine prin rotaţia dreptei $y = mx$, $x \in [0, h]$ în jurul axei ox, unde $m = \frac{r}{h}$ (fig. 130). Atunci :

$$\text{aria } (S) = 2\pi \int_0^h mx \sqrt{1 + m^2}\, dx = 2\pi m \sqrt{1 + m^2} \cdot \frac{h^2}{2} =$$

$$= 2\pi \frac{r}{h} \sqrt{\frac{h^2 + r^2}{h^2}} \cdot \frac{h^2}{2} = \pi rg,$$

unde g este generatoarea conului.



$$\boxed{\text{aria } (S) = \pi rg}$$

Fig. 130

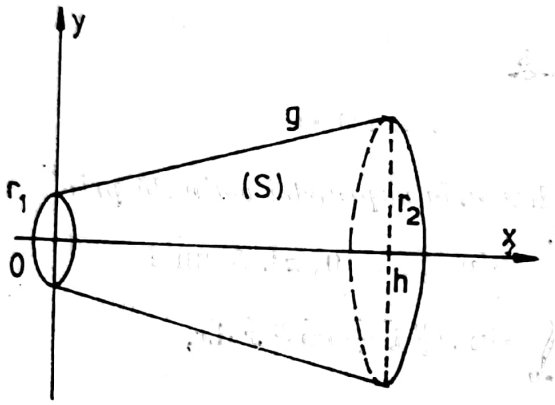
10.4.2. Exerciţiu. *Să se afle aria laterală a unui trunchi de con.*

Soluţie. Un trunchi de con de înălţime h şi cu razele bazelor r_1 şi r_2 se obţine prin rotaţia graficului funcţiei $f(x) = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{h} x$, $x \in [0, h]$, în jurul axei ox (fig. 131). Atunci :

$$\text{aria } (S) = 2\pi \int_0^h \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{h} x\right) \sqrt{1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{h}\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{h^2 + (r_2 - r_1)^2}{h^2}} \cdot \left(r_1 h + \frac{r_2 - r_1}{h} \cdot \frac{h^2}{2}\right) = \pi g (r_2 + r_1),$$

unde g este generatoarea trunchiului de con.



$$\boxed{\text{aria } (S) = \pi g (r_2 + r_1)}$$

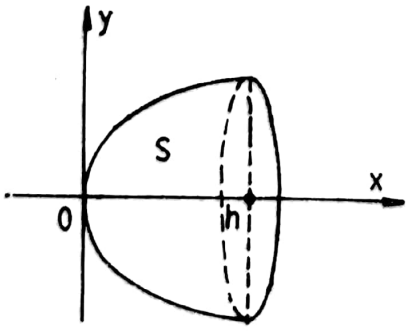
Fig. 131

10.4.3. Exerciţiu. *Să se afle aria laterală a unui paraboloid de înălţime h.*

Soluţie. Fie parabola $y^2 = 2px$ $(p > 0)$. Parabolioidul se obţine prin rotaţia graficului funcţiei $f(x) = \sqrt{2px}$, $x \in \mathbf{R}_+$ în jurul axei Ox (fig. 132). Atunci pentru aria laterală a paraboloidului de înălţime h avem :

$$\text{aria } (S) = 2\pi \int_0^h \sqrt{2px} \sqrt{1 + \frac{2p}{4x}}\, dx = 2\pi \sqrt{p} \int_0^h \sqrt{2x + p}\, dx =$$

$$= \frac{\pi \sqrt{p}\, (2x + p)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^h = \frac{2\pi \sqrt{p}}{3} [(2h + p)^{3/2} - p^{3/2}].$$



$$\boxed{\text{aria } (S) = \frac{2\pi \sqrt{p}}{3} [(2h + p)^{3/2} - p^{3/2}]}$$

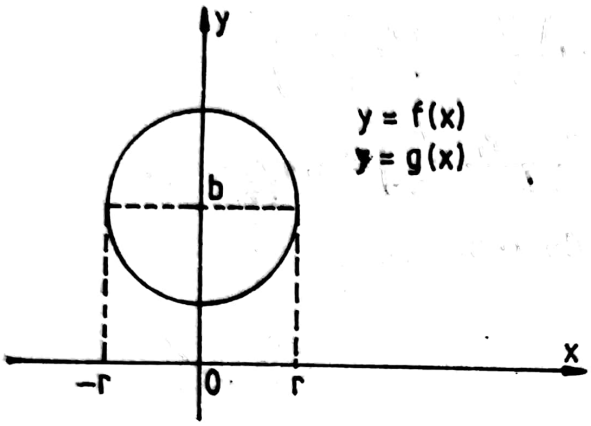
Fig. 132

10.4.4. Exerciţiu. *Să se calculeze aria torului.*

Ind.

$$\text{aria}\,(A) = 2\pi \int_{-r}^{r} [f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)} + g(x)\sqrt{1 + g'^2(x)}]\,dx,$$

unde (fig. 133) avem:



$$\begin{cases} f(x) = b + \sqrt{r^2 - x^2}, & x \in [-r, r] \\ g(x) = b - \sqrt{r^2 = x^2}, & x \in [-r, r] \end{cases}$$

Se obţine $\boxed{\text{aria}\,(S) - 4\pi r^2 b}$

Fig. 133

10.4.5. Exerciţiu. *Să se calculeze aria suprafeţei obţinută prin rotaţia unui arc de sinusoidă în jurul axei ox.*

Ind. Considerăm funcţia $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$. Atunci

$$\text{aria}\,(S) = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx,$$

deci

$$\text{aria}\,(S) = 4\pi \int_0^{\pi/2} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx.$$

Cu substituţia $\cos x = t$ obţinem:

$$\text{aria}\,(S) = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 + t^2}\,dt = 2\pi\,(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})).$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 11

INTEGRALE IMPROPRII

11.1. Integrale improprii pe un interval mărginit

11.1.1. Exerciţiu. *Să se afle natura integralei* $\int_0^a \frac{dx}{x^p}$ $(a,\ p \in \mathbf{R}_+^*)$.

Soluţie. Din P.11.1.12.(1°) rezultă că integrala $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ este convergentă, dacă $0 < p < 1$ şi divergentă dacă $1 \leqslant p < +\infty$. Punem mai departe $a = 0$ şi $b = a$.

11.1.2. Exerciţiu. *Fie* $f : [a, \infty] \to \mathbf{R}$ *o funcţie de clasă* $\mathcal{C}^1$, *monoton descrescătoare a.î.* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. *Atunci integralele improprii* $\int_a^\infty f(x) \sin x\, dx$ *şi* $\int_a^\infty f(x) \cos x\, dx$ *sînt convergente.*

Ind. Aplicăm T. 11.2.4. Cor. 2 ţinînd seama că sin şi cos sînt continue şi posedă primitive mărginite.

11.1.3. Exerciţiu. *Să se calculeze intergrala* $L_n = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \operatorname{tg}^n x}$.

Soluţie. Avem $L_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x\, dx}{\cos x + \sin^n x}$, deci cu schimbarea de variabilă $x = \frac{\pi}{2} - t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, obţinem $L_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n t\, dt}{\sin^n t + \cos^n t}$, de unde prin adunare rezultă $2L_n = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$, deci $L_n = \frac{\pi}{4}$.

11.1.4. Exerciţiu. *Să se arate că integralele* $1°\ \int_0^1 \left[\frac{1}{x}\right] dx$; $2°\ \int_0^1 \frac{dx}{x + [x]}$ *sînt divergente.*

Soluţie. 1° avem $0 \leqslant \frac{1}{x} - 1 \leqslant \left[\frac{1}{x}\right]$, $(\forall)\ x \in (0, 1]$ şi

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx = (\ln x - x)\Big|_0^1 = \infty$$

2° Avem $0 < \frac{1}{x + [x]} \leqslant \frac{1}{2x}$, $(\forall)\ x \in (0,1]$ şi $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \infty$

11.1.5. Exercițiu. *Să se calculeze integrala* $L := \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $(b > a > 0)$.

Soluție. Evident avem

$$(x-a)(b-x) = c^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

unde $c^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab > 0$. Atunci

$$L = \arcsin \frac{1}{c}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\Big|_{a+}^{b-} = \arcsin \frac{b-a}{2c} - \arcsin \frac{a-b}{2c} =$$

$$= 2 \arcsin \frac{b-a}{2c}$$

11.1.6. Exercițiu. *Să se arate că integrala* $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{(1-x)^p} dx$ *este convergentă,* $(\forall)\ p \in (0,1)$.

Soluție. Evident avem $\frac{\left|\sin \frac{1}{x}\right|}{(1-x)^p} \leqslant \frac{1}{(1-x)^p}$, $(\forall)\ x \in (0, 1)$. Cum integrala $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^p}$ este convergentă (P.11.1.2. (1°)), rezultă (T. 11.2.2. Cor. 5) că integrala $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{(1-x)^p}$ este absolut convergentă, deci convergentă.

11.1.7. Exercițiu. *Să se arate că integrala* $\int_0^1 x\left[\frac{1}{x}\right] dx$ *este convergentă, apoi să se calculeze valoarea sa.*

Soluție. Fie funcția $f(x) = x\left[\frac{1}{x}\right]$, $x \in (0,1)$]. Evident f poate fi prelungită prin continuitate în 0. De aici rezultă că $\int_0^1 f$ este convergentă; fie L valoarea sa.

De asemenea convergența integralei date $\int_1^0 f$ poate fi arătată observînd că $0 < f \leqslant 1$.

Dacă $\frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n}$, avem $n \leqslant \frac{1}{x} < n+1$, deci $\left[\frac{1}{x}\right] = n$. Atunci

$$L = \lim_{x \to \infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^1 x\left[\frac{1}{x}\right] dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} x\left[\frac{1}{x}\right] dx =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} kx\, dx = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[1\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)+2\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+n\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\Bigg] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{n}{(n+1)^2}\right] = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}.$$

Însă $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, **prin urmare** $L=\frac{\pi^2}{3}$.

11.1.8. Exerciţiu. *Să se arate că integrala* $\int_0^1 [\ln x]\,dx$ *este convergentă, apoi să se calculeze valoarea sa.*

Soluţie. $0 \leqslant -[\ln x] \leqslant 1 - \ln x$, $(\forall)\ x \in (0,1]$ Cum avem

$$\int_0^1 \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_0^1 = 1,$$

rezultă că $\int_0^1 (1-\ln x)\,dx$ este convergentă, deci (T.11.2.22. Cor. 5) integrala $\int_0^1 [\ln]\,x\,dx$ este convergentă; fie L valoarea ei.

Să observăm că dacă $e^{-k} \leqslant x < e^{-k+1}$, avem $-k \leqslant \ln x < -k+1$, deci $[\ln x] = -k$. Atunci:

$$L = \lim_{n\to\infty}\int_{e^{-n}}^1 [\ln x]\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_{e^{-k}}^{e^{-k+1}}[\ln x]\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-kx)\Big|_{e^{-k}}^{e^{-k+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} k\,e^{-k}(1-e) = (1-e)\sum_{n\geq 1} n\,(e^{-1})^n = (1-e)\frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}$$ Ex. 2.3.108.

Prin urmare:

$$\int_0^1 [\ln x]\,dx = \frac{e}{1-e}.$$

Corolar 1. *Integrala* $\int_0^1 [-\ln x]\,dx$ *este convergentă şi are valoarea* $\frac{1}{e-1}$.

Soluţie. $[\ln x] + [-\ln x] = -1$, $(\forall)\ x \in (0,1]$

$$\int_0^1 [-\ln x]\,dx = -\int_0^1 (1+[\ln x])\,dx = -\left(1+\frac{e}{1-e}\right) = \frac{1}{e-1}$$

11.1.9. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\int_0^1 (\ln x)^n\,dx$ $(n \in \mathbf{N})$.

Soluţie. Funcţia de integrat nu este definită în 0, deci avem o integrală improprie.

Notăm $L_n = \int_0^1 (\ln x)^n\,dx$ şi integrăm prin părţi:

$$L_n = \int_0^1 \underbrace{(\ln x)^n}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = x(\ln x)^n\Big|_0^1 - n\int_0^1 (\ln x)^{n-1}\,dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd regula lui Hospital avem $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon (\ln \varepsilon)^n = 0$, deci $L_n = -n L_{n-1}$ şi deci $L_n = (-1)^n n!$.

11.1.10. Exerciţiu. *Fie* $a > 0$ *şi* $f : I = [0, a] \to \mathbb{R}^*$ *o funcţie continuă. Atunci* $\int_0^a \frac{f(x)}{x^p} \, dx$ *este convergentă, dacă* $0 < p < 1$ *şi divergentă, dacă* $1 \leqslant p < \infty$.

Soluţie. Evident $f > 0$ sau $f < 0$, deci înlocuind f cu $-f$ putem presupune că $f > 0$.

Fie $m := \min f(I)$ şi $M := \max f(I)$. Atunci $0 < m \leqslant f(x) \leqslant M$, $(\forall)\ x \in I$, deci $\frac{m}{x^p} \leqslant \frac{f(x)}{x^p} \leqslant \frac{M}{x^p}$ $(\forall)\ x \in (0, a]$.

Dacă $0 < p < 1$ avem (P.11.1.2.) $\int_0^a \frac{M \, dx}{x^p}$ este convergentă, deci (T.11.2.2. Cor. 5) integrala $\int_0^a \frac{f(x)}{x^p} \, dx$ este convergentă.

Dacă $1 \leqslant p < \infty$ avem (P.11.1.2.) $\int_0^a \frac{m}{x^p} \, dx$ este divergentă, deci (T.11.2.2. Cor 5) integrala $\int_0^a \frac{f(x)}{x^p} \, dx$ este divergentă.

11.1.11. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $L = \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}$ $(a > 0)$.

Soluţie. Punem $L_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \, dx}{\sin x + \cos x}$ şi $L_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{\cos x + \sin x}$.

Cu schimbarea de variabilă $t = \pi/2 - x$, L_2 devine :

$$L_2 = \int_{\pi/2}^0 \frac{\cos(\pi/2 - t)(-dt)}{\sin(\pi/2 - t) + \cos(\pi/2 - t)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t \, dt}{\cos t + \sin t} = L_1.$$

Cum evident $L_1 + L_2 = \frac{\pi}{2}$, obţinem că $L_1 = L_2 = \frac{\pi}{4}$.

Cu schimbarea de variabilă $x = a \sin t$, L devine :

$$L = \int_0^{\pi/2} \frac{a \cos t \, dt}{a \sin t + \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 t)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t \, dt}{\sin t + \cos t} = L_2.$$

Prin urmare $L = \frac{\pi}{4}$.

Corolar 1.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \, dx}{\sin x + \cos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{4}.$$

11.1.12. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $L = \int_a^b \frac{x \, dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}}$ $(0 < a < b)$

Soluţie. Facem substituţia $x = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

Se vede imediat că funcţia $t \mapsto a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, este strict crescătoare şi aplică $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pe $[a^2, b^2]$, deci funcţia $x = x(t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, este strict crescătoare şi aplică $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pe $[a, b]$. Evident avem :

$$2xx' = -2a^2 \cos t \sin t + 2b^2 \sin t \cos t = 2(b^2 - a^2) \sin t \cos t,$$

$$x^2 - a^2 = a^2(\cos^2 t - 1) + b^2 \sin^2 t = (b^2 - a^2) \sin^2 t,$$

$$b^2 - x^2 = b^2(1 - \sin^2 t) - a^2 \cos^2 t = (b^2 - a^2) \cos^2 t.$$

Atunci

$$L = \int_0^{\pi/2} \frac{(b^2 - a^2) \sin t \cos t \, dt}{\sqrt{(b^2 - a^2)^2 \cos^2 t \sin^2 t}} = \frac{\pi}{2}.$$

11.1.13. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\int_{-1}^{1} \frac{x \, dx}{|\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}|}$.

Soluţie. Fie f funcţia de integrat. Evident f nu este definită în 0, deci integrala dată este improprie.

Rămîne să calculăm $L_1 = \lim_{t \searrow 0} \int_t^1 f(x) \, dx$ şi $L_2 = \lim_{t \nearrow 0} \int_{-1}^{t} f(x) \, dx$.

Cum $|\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}| = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$, $(\forall)$ $x \in [0, 1]$ avem $f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})$, deci $L_1 = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{2} \int_t^1 (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) \, dx =$

$$= \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} - \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} \right]_t^1 = \frac{1}{3}\sqrt{2^3}.$$

Schimbarea de variabilă $y = -x$ ne arată că $L_1 = L_2$, prin urmare integrala dată este convergentă şi este egală cu $2L_1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

11.1.14. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\int_{-1}^{1} \frac{\cos(\lambda \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$.

Soluţie. Fie funcţia $f(x) = \frac{\cos(\lambda \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$ $x \in (-1, 1)$. Funcţia f fiind continuă pe $(-1, 1)$ este integrabilă pe $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, 1)$.

Evident arc sin este o funcţie derivabilă şi strict crescătoare de la $[-1, 1]$ pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, deci putem face schimbarea de variabilă $t = \arcsin x$, $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ şi avem :

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x) \, dx = \int_{\arcsin(-1+\varepsilon)}^{\arcsin(1-\varepsilon)} \cos \lambda t \, dt = \left[\frac{1}{\lambda} \sin \lambda t \right]_{\arcsin(-1+\varepsilon)}^{\arcsin(1-\varepsilon)}$$

Atunci

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\left[\sin(\lambda \arcsin 1) - \sin(\lambda \arcsin(-1))\right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\sin\frac{\lambda\pi}{2} - \sin\frac{-\lambda\pi}{2}\right) = \frac{2}{\lambda}\sin\frac{\lambda\pi}{2}.$$

11.1.15. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $L_n = \int_0^\pi \frac{1-\cos nx}{1-\cos x}\,dx$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Soluţie. Deoarece $\lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-\cos nx)}{1-\cos x} = 0$, rezultă (T. 11.2.2. Cor. 2.) că integrala dată este convergentă. Evident avem :

$$\frac{L_{n-1} + L_{n+1}}{2} = \int_0^\pi \frac{2 - \cos(n-1)x - \cos(n+1)x}{2(1-\cos x)}\,dx =$$

$$= \int_0^\pi \frac{1 - \cos nx \cos x}{1-\cos x}\,dx = \int_0^\pi \frac{(1-\cos nx) + \cos nx(1-\cos x)}{1-\cos x}\,dx =$$

$$= L_n + \int_0^\pi \cos nx\,dx = L_n,$$

deci

$$L_n = \frac{1}{2}(L_{n-1} + L_{n+1}),\ (\forall)\ \ n \geqslant 1$$

şi deci termenii şirului $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ sînt în progresie aritmetică. Cum $L_1 - L_0 = \pi$, deducem că $L_n = n\pi$.

11.1.16. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.

Ind. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\forall)\ |x| < 1$,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = (\arcsin x - \sqrt{1-x^2})\Big|_{-1}^{1}$$

11.1.17. Exerciţiu. *Să se arate că* $1 \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Ind. Fie $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Evident avem $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} < 0$, $(\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, deci f strict descrescătoare şi deci

$$\frac{2}{\pi} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(x) < 1,\ (\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

11.1.18. Exerciţiu. *Să se arate că* $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x - \sin^4 x} = \infty$.

Scanned with OKEN Scanner

Ind. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = 4\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 2x} = -2 \operatorname{ctg} 2x \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = \infty.$

Altfel

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\sin^2 x \cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{-2\sin x \cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} =$$

deci integrala este divergentă. Cum $f>0$, rezultă că $\int_{\pi/3}^{\pi/2} f = \infty$.

11.2. Integrale improprii pe un interval nemărginit

11.2.1. Exerciţiu. *Să se arate că integrala* $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x(1+x^2)}\,dx$ *este convergentă.*

Soluţie. Evident funcţia arc tg aplică $\mathcal{C}^1$ — difeomorf intervalul $[0, \infty)$ pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, deci putem face schimbarea de variabilă $y = \operatorname{arc\,tg} x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; obţinem : $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x(1+x^2)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y}{\operatorname{tg} y}\,dy$. Cum avem $\lim_{y\searrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1$ şi $\lim_{y\nearrow\frac{\pi}{2}} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 0$, rezultă (P.11.1.5. Cor. 1) că integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y}{\operatorname{tg} y}\,dy$ este convergentă etc.

11.2.2. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\int_0^\infty \min\left\{x^2, \frac{1}{x^2}\right\}, dx.$

Soluţie. Fie $f(x) := \min\left\{x^2, \frac{1}{x^2}\right\}$, $x \in \mathbf{R}_+^*$. Evident f este continuă şi avem $f(x) = x^2$, dacă $x \in (0, 1]$ şi $f(x) = \frac{1}{x^2}$, dacă $x \in (1, \infty)$. Prin definiţie $\int_0^\infty f = \lim_{\varepsilon\to 0, t\to\infty} \int_\varepsilon^t f$. Fie deci $0 < \varepsilon < 1 < t < +\infty$ fixaţi. Atunci

$$\int_\varepsilon^t f = \int_\varepsilon^t x^2\,dx + \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{3}(1-\varepsilon^3) - \left(\frac{1}{t} - 1\right),$$

deci

$$\int_0^\infty f = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{3}(1-\varepsilon^3) - \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t} - 1\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

11.2.3. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\int_1^\infty \frac{dx}{2[x] + 3[x]^2 + [x^3]}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Fie $f(x) = \dfrac{1}{2[x] + 3[x^2] + [x]^3}$, $x \in \mathbf{R}_+$. Dacă $n < x < n+1 \Rightarrow$ $\Rightarrow [x] = n$, deci

$$\int_n^{n+1} f = \int_n^{n+1} \frac{dx}{2n + 3n^2 + n^3} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

$$\int_1^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Ţinem seama mai departe că $\sum_{k\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{4}$.

11.2.4. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala*

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \quad (a, b \in \mathbf{R}_+^*, \ a \neq b)$$

Soluţie. Am arătat (8.3.4. Exemplul 2) egalitatea:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{1}{b^2 - a^2}\left(\frac{1}{a} \operatorname{arc\ tg} \frac{x}{a} - \frac{1}{b} \operatorname{arc\ tg} \frac{x}{b}\right),$$

deci

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{1}{b^2 - a^2}\left(\frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{b} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2a(a+b)}.$$

11.2.5. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x(x+1)}{(2x^2 + 2x + 1)^2}\, dx.$

Soluţie. Evident avem $2x^2 + 2x + 1 = \dfrac{1}{2}[1 + (2x+1)^2]$, deci cu substituţia $2x + 1 = t$, obţinem:

$$L = \int_0^{\infty} \frac{x(x+1)}{(2x^2 + 2x + 1)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{t^2 - 1}{(t^2 + 1)^2}\, dt.$$

Însă (v. 8.3.3.):

$$\int \frac{t^2 - 1}{(t^2 + 1)^2}\, dt = \int \frac{dt}{t^2 + 1} - 2\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} =$$

$$= \operatorname{arc\ tg}\ t - 2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{t}{t^2 + 1} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\ tg}\ t\right) = -\frac{t}{t^2 + 1},$$

$$L = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t}{t^2 + 1}\Bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{4}.$$

11.2.6. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $L = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2 (x^2 + b^2)^2}$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$

Soluţie. Dacă $a^2 = b^2$ utilizăm 11.3.1. Exemplul 1. Presupunem $a^2 \neq b^2$; atunci

$$\frac{1}{(t + a^2)^2 (t + b^2)^2} = \frac{c_1}{(t + a^2)^2} + \frac{c_2}{t + a^2} + \frac{c_3}{(t + b^2)^2} + \frac{c_4}{t + b^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin identificare obţinem : $c_1 = c_3 = \dfrac{1}{(a^2-b^2)^2}$; $c_2 = -c_4 = \dfrac{2}{(a^2-b^2)^3}$

$$L = c_1\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} + c_2\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} + c_3\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+b^2)^2} + c_4\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+b^2}$$

Însă

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+c^2} = \frac{1}{c}\operatorname{arc\ tg}\frac{x}{c}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2c}\ (c \neq 0).$$

şi

$$\int \frac{dx}{(x^2+c^2)^2} = \frac{1}{2c^2}\cdot\frac{x}{x^2+c^2} + \frac{1}{2c^3}\operatorname{arc\ tg}\frac{x}{c}\ (c \neq 0),$$

deci

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+c^2)^2} = \frac{1}{2c^3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4c^3}\ (c \neq 0).$$

Prin urmare

$$L = \frac{1}{(a^2-b^2)^2}\cdot\frac{\pi}{4a^3} + \frac{2}{(a^2-b^2)^3}\cdot\frac{\pi}{2a} + \frac{1}{(a^2-b^2)^2}\cdot\frac{\pi}{4b^3} -$$

$$-\frac{2}{(a^2-b^2)^2}\cdot\frac{\pi}{2b} = \frac{\pi(a^2+3ab+b^2)}{4a^2b^2(a+b)^3}.$$

11.2.7. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $L = \int_0^\infty (e^{-a^2/x^2} - e^{-b^2/x^2})\,dx$, *unde* $a, b \in \mathbf{R}_+^*$.

Soluţie. Evident $\lim\limits_{x\to 0} e^{-a^2/x^2} = 0$, deci integrala $\int_0^t e^{-a^2/x^2}\,dx$ este convergentă, $(\forall)\ t \in \mathbf{R}_+^*$.

Făcînd substituţia $\dfrac{a}{x} = y$, apoi integrînd prin părţi, obţinem :

$$\int_0^t e^{-a^2/x^2}\,dx = -a\int_\infty^{at^{-1}} e^{-y^2}\frac{dy}{y^2} = a\int_{at^{-1}}^\infty e^{-y^2}\frac{dy}{y} =$$

$$= a\left(-\frac{1}{y}e^{-y^2}\Big|_{at^{-1}}^\infty - 2\int_{at^{-1}}^\infty e^{-y^2}\,dy\right) = te^{-a^2/t^2} - 2a\int_{at^{-1}}^\infty e^{-y^2}\,dy.$$

Atunci

$$\int_0^t (e^{-a^2/x^2} - e^{-b^2/x^2})\,dx = te^{-a^2/t^2} - te^{-b^2/t^2} - 2a\int_{at^{-1}}^\infty e^{-t^2}\,dt + 2b\int_{bt^{-1}}^\infty e^{-t^2}\,dt.$$

Cum $\lim\limits_{t\to\infty} t(e^{-a^2/t^2} - e^{-b^2/t^2}) = 0$ şi $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (P.11.3.9), deducem :

$$L = \lim_{t\to\infty}\int_0^t (e^{-a^2/x^2} - e^{-b^2/x^2})\,dx = -2a\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} + 2b\frac{\sqrt{\pi}}{2} = (b-a)\sqrt{\pi}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Corolar 1. *Integrala* $\int_0^\infty e^{-a^2/x^2}\,dx$ *este divergentă*, $(\forall)\ a \in \mathbf{R}$.

11.2.8. Exerciţiu. *Să se calculeze integralele* $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$ *şi* $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$, *unde* $a, b \in \mathbf{R}$ *şi* $a > 0$.

Soluţie. Am arătat relaţiile (v.8.6.5.) :

$$\int e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(-a\sin bx - b\cos bx)$$

$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(-a\cos bx + b\sin bx).$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-ax}\sin bx = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-ax}\cos bx = 0$, rezultă imediat relaţiile :

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2} \text{ şi } \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Corolar 1.

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}.$$

11.2.9. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $L = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Soluţia. 1. Deoarece funcţia $x \mapsto \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ $x \in \mathbf{R}$, este periodică de perioadă $\frac{\pi}{2}$, avem $L = 4\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$. Cu schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t$, obţinem :

$$dx = \frac{dt}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},$$

deci

$$L = 4\int_0^\infty \frac{\frac{1}{1+t^2}\,dt}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2} = 4\int_0^\infty \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt.$$

Se descompune mai departe funcţia de integrat în fracţii simple şi se integrează termen cu termen. În final deducem $L = \pi\sqrt{8}$.

Soluţia 2. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}(2\cos x \sin x)^2 =$

$$= 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \sin 2x)(\sqrt{2} + \sin 2x)$$

$$\frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{2}{(\sqrt{2} - \sin 2x)(\sqrt{2}+\sin 2x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sin 2x} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sin 2x}\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{2} - \sin 2x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sin 2x} \quad \text{(8.5.1. Exemplul 1)}$$

11.2.10. Exerciţiu. *Să se calculeze integralele :*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \sin x} \quad (a > 1).$$

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă $t = 2\pi - x$ avem

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a + \cos x} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t},$$

deci

$$L = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x} = 2 \int_0^{\pi} \frac{dx}{a + \cos x}.$$

Cu schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, obţinem :

$$L = 2 \int_0^{\infty} \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{a + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{4}{a-1} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\frac{a+1}{a-1} + t^2} =$$

$$= \frac{4}{a-1} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}} \Bigg|_0^{\infty} = \frac{2\pi}{a^2 - 1}.$$

Corolar 1. *Să se calculeze integrala* $L = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + \cos x)(b + \cos x)}$ $(1 < a < b)$.

Soluţie. $\frac{1}{(a + \cos x)(b + \cos x)} = \frac{1}{b - a} \left(\frac{1}{a + \cos x} - \frac{1}{b + \cos x} \right)$,

deci

$$L = \frac{1}{b-a} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{a + \cos x} - \frac{1}{b + \cos x} \right) dx = \frac{2\pi}{b-a} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 - 1}} \right).$$

Observaţie. Integrala $\int_0^{\pi} \frac{dx}{a + \cos x}$ se poate descompune în $\int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi}$. Dacă facem în prima integrală schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ şi în a doua $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = t$, obţinem integrale proprii.

11.2.11. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $L = \int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1 + x^4}$

Soluţie. Cu substituţia $x = \frac{1}{t}$, avem $L = \int_{\infty}^{0} \frac{-1/t^2\,dt/t^2}{1 + 1/t^4} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^4}$,

Din 8.3.3. Exemplul 1 rezultă că

$$L = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{2t - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{2t + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \Bigg|_0^{\infty},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$L = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{-\sqrt{2}}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

11.2.12. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $L = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $(a < b)$.

Soluţie. Evident avem :

$$(x-a)(b-x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

deci

$$L = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2}}$$

şi deci

$$L = \frac{2}{b-a} \arcsin \frac{2x-b-a}{b-a}\Bigg|_a^b = \frac{2\pi}{b-a}.$$

11.2.13. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $L = \int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\sin x \cos^5 x}\,\mathrm{d}x$.

Soluţie. Evident avem :

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\operatorname{tg} x} \cdot \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Cu substituţia $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x} = t$, obţinem :

$$L = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2} \cdot \frac{(\operatorname{tg} x)^{-1/3}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^{\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+t^3)^2}.$$

Prin descompunere în fracţii simple se deduce

$$\frac{t}{(t^3+1)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(t^2-t+1)^2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{t-1}{t^2-t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{9}\,\frac{1}{t+1},$$

deci

$$L = \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{t-\frac{1}{2}}{(t^2-t+1)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \operatorname{arc\,tg}\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{18}\left[\ln(t^2-t+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right] + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{9}\ln(t+1)\right\}\Bigg|_0^{\infty}.$$

Ţinem mai departe seama că $\operatorname{arc\,tg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ şi

$$\{\ln(t^2-t+1) - 2\ln(t+1)\}\Big|_0^{\infty} = \ln\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2}\Big|_0^{\infty} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

11.2.14. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $L = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+b)\sqrt{x^2+a^2-b^2}}$, $(a > b > 0)$.

Ind. Cu substituţia $x + b = \frac{1}{t}$, avem :

$$L = \int_{\frac{1}{b}}^{0} \frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1-2bt+a^2t^2}{t^2}}} = \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(at-\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{a^2-b^2}{a^2}}}.$$

11.2.15. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala*

$$L = \int_0^{\infty} \frac{(x+a+b)\,\mathrm{d}x}{(x^2+ax+a^2)(x^2+bx+b^2)}, \quad (0 \neq a \neq b \neq 0).$$

Ind. $L = \frac{1}{b-a}\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+bx+b^2} - \frac{1}{x^2+bx+b^2}\right)\mathrm{d}x =$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\frac{2}{a\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} + \frac{2}{b\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{b}{2}}{\frac{b\sqrt{3}}{2}}\right)\Bigg|_0^{\infty}.$$

11.2.16. Exerciţiu. *Să se arate inegalitatea* $\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t < \operatorname{arc\,tg} x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}^*$, *de unde să se deducă că integrala improprie* $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ *este convergentă.*

Ind. Avem $\mathrm{e}^{x^2} > 1 + x^2$, $(\forall)\ x \neq 0$, deci $\mathrm{e}^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$, $(\forall)\ x \neq 0$

11.2.17. Exerciţiu. *Să se arate că* $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Ind. Ţinem seama de expresia primitivei $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ (v.8.3.3. Exemplul 1).

11.2.18. Exerciţiu. *Să se arate că* $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Ind. Se face substituţia $\sqrt{x} = t$; vezi P.11.3.9.

11.2.19. Exerciţiu. *Să se calculeze integrala* $\int_0^{\infty} \frac{x^3 \ln x}{(1+x^4)^3}\,\mathrm{d}x$.

11.2.20. Exerciţiu. *Să se arate că integralele* $\int_0^{\infty} x \sin x^4\,\mathrm{d}x$ *şi* $\int_0^{\infty} x \cos x^4\,\mathrm{d}x$ *sînt convergente.*

Ind. Facem substituţia $x = \sqrt{t}$, $t \in [0, \infty)$ şi aplicăm 11.3.1. Exemplul 8.

11.2.21. Exerciţiu. *Să se arate că integrala* $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x + [x]}$ *este divergentă,* $(\forall)\ a > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Avem $\frac{1}{x+[x]} \geqslant \frac{1}{2x}$, $(\forall)\ x \geqslant a$ și $\int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty$.

11.2.22. Exercițiu. *Să se arate că integrala* $\int_1^\infty [x]^{-x}\,dx$ *este convergentă apoi să se calculeze valoarea sa.*

Ind. Fie $f(x) = [x]^{-x}$, $x \in \mathbf{R}_+^*$. Evident f este continuă pe $\mathbf{R}_+^* \setminus \mathbf{N}$ și avem $f(x) = 1/n^x$, $(\forall)\ x \in [n,\ n+1)$. Atunci :

$$\int_1^\infty f = \sum_{n\geqslant 1} \int_n^{n+1} f = 1 + \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n^n} - \frac{1}{n^{n+1}}\right).$$

11.2.23. Exercițiu. *Fie* $f, g : [a, \infty] \to \mathbf{R}$ *două funcții cu propretățile :* 1° f *monotonă, nenegativă și* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$; 2° g *local integrablilă și* $\sup_{x,y\geqslant a} \left|\int_x^y g\right| < +\infty$. *Atunci integrala* $\int_a^\infty (fg)$ *este convergentă.*

Soluție. Utilizînd a doua formulă de medie (T.9.2.12) rezultă că pentru $(\forall)\ x, y \geqslant a$, $x < y$, există $\xi \in (x, y)$ a.î. $\int_x^y (fg) = f(\xi)\int_x^\xi g$.

Cum $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ și $\sup_{x,y\geqslant a}\left|\int_x^y g\right| < +\infty$, rezultă că pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, există $c > a$ a.î. $\left|\int_x^y fg\right| < \varepsilon$ $(\forall)\ x, y > c$, deci din T.11.2.3. deducem că integrala $\int_a^\infty (fg)$ este convergentă.

Aplicație. Integrala $\int_0^1 \frac{\sin 1/x}{x^p}\,dx$ *este convergentă, dacă* $p < 2$ *și divergentă, dacă* $p \geqslant 2$.

Într-adevăr, facem schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{t}$, $t \in [1, \infty)$ și obținem $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{2-p}}\,dt$, care este convergentă pentru $p < 2$ cf. Ex. 11.2.23. Dacă $p \geqslant 2$, integrala $\int_1^\infty t^{p-2}\sin dt$ este evident divergentă.'

11.2.24. Exercițiu. *Să se studieze cu ajutorul teoremei Cauchy-Maclaurin* T.11.2.6. *natura seriilor* $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Soluție 1° Fie $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$, $x \in [2, \infty)$. Atunci cu substituția $t = \ln x$, $x \in [2, \infty)$, avem $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{dt}{t}$. Cum integrala $\int_{\ln 2}^\infty \frac{dt}{t}$ este evident divergentă, rezultă (T.11.2.6) că seria $\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ este divergentă.

2° Fie $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$, $x \in [2, \infty)$. Atunci avem : $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{dt}{t^2}$ și integrala $\int_{\ln 2}^\infty \frac{dt}{t}$ este convergentă etc.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 12

ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCŢII

12.1. Şiruri de funcţii

12.1.1. Exerciţiu. *Fie* $f, f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *un şir de funcţii definit astfel* : $f(x) = 0$, $(\forall)$ $x \in [0,1)$, $f(1) = 1$ *şi* $f_n(x) = x^n$, $(\forall)$ $x \in [0,1]$ *şi* $n \geqslant 1$. *Atunci* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *converge simplu şi neuniform la* f.

Soluţie. Fie $0 \leqslant x < 1$. Atunci $x^n \to 0$, deci $f_n(x) \to 0$. Cum $f_n(1) = 1$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, rezultă că $f_n \xrightarrow{s} 0$. Evident avem :

$$|f(x) - f_n(x)| = \begin{cases} x^n, & \text{dacă } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & ,, \quad x = 1, \end{cases}$$

deci

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| = 1, \quad (\forall) \quad n \geqslant 1$$

şi deci $(f_n)_{n\geqslant 1}$ nu converge uniform la f pe $[0,1]$ (P.12.1.6.).

Fie $a \in (0,1)$ fixat. Evident avem :

$$\sup_{x\in[0,a]} |f(x) - f_n(x)| = a^n \to 0 \ (n \to \infty),$$

deci (P.12.1.6.) $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniform la f pe $[0, a]$.

12.1.2. Exerciţiu. *Fie* $f_n : [0,1] \to [0,1]$ $(n \geqslant 1)$ *un şir de funcţii cu* f_n *având graficul din* fig. 134. *Atunci şirul* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *converge simplu şi neuniform la* 0.

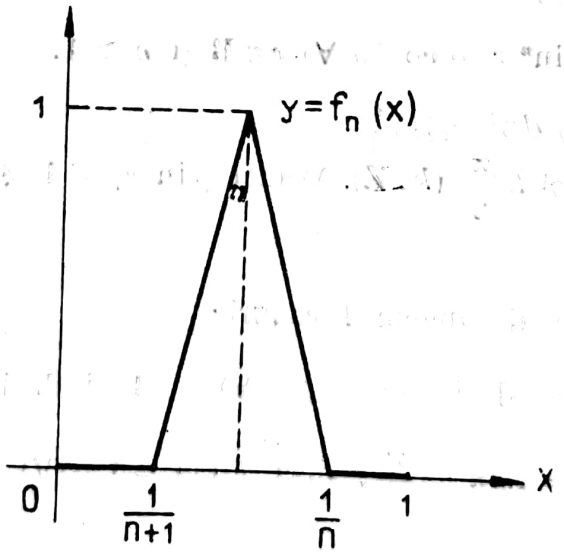


Fig. 134

Soluție. Fie $x \in (0,1]$ fixat. Atunci există $n_x \geq 1$ a.i. $\frac{1}{n_x} < x$, deci $f_n(x)=0, (\forall)$ $n \geq n_x$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Cum $f_n(0) = 0$, $(\forall)$ $n \geq 1$, rezultă că $f_n \xrightarrow{s} 0$.

Deoarece $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = 1$, rezultă că $(f_n)_{n\geq 1}$ nu converge uniform la 0 (P. 12.1.6.).

Fie $a \in (0,1)$ fixat. Evident avem :

$$\sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - 0| = 0 \text{ dacă } \frac{1}{n} < a,$$

deci (P.12.1.6.) $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniform la 0 pe $[a, 1)$.

12.1.3. Exercițiu. *Să se studieze convergența șirului* $(f_n)_{n\geq 1}$ *de funcții definit astfel :* $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, x \in \mathbf{R}_+$.

Soluție. Evident $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+$, deci $f_n \xrightarrow{s} 1$. Deoarece

$$|f_n(x) - 1| = \frac{1}{1+nx}, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+,$$

avem

$$\sup_{x\in\mathbf{R}_+} |f_n(x) - 1| = 1,$$

deci $(f_n)_{n\geq 1}$ nu converge uniform pe $\mathbf{R}_+$ (P.12.1.6.).

Fie $a > 0$ fixat. Atunci avem

$$\sup_{x\geq a} |f_n(x) - 1| = \frac{1}{1+na} \to 0 \ (n \to \infty).$$

deci (P.12.1.6.) $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniform pe intervalul $[a, \infty)$.

12.1.4. Exercițiu. *Fie* $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(n \geq 1)$ *un șir de funcții definit astfel :*

$$f_n(x) = \sin^n x + \cos^n x (\forall)\ x \in \mathbf{R} \text{ și } n \geq 1.$$

Să se studieze convergența șirului $(f_n)_{n\geq 1}$.

Soluție. Fie $x \in \mathbf{R}$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$. Atunci $|\sin x| < 1$ și $|\cos x| < 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Dacă $x = k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$, distingem 4 cazuri :

(i) $k = 4m$; $x = 2m\pi$, deci $f_n(x) = 1$, $(\forall)$ $n \geq 1$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$.

(ii) $k = 4m + 1$; $x = 2m\pi + \frac{\pi}{2}$, deci $f_n(x) = 1$, $(\forall)$ $n \geq 1$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

(iii) $k = 4m + 2$; $x = 2m\pi + \pi$, deci $f_n(x) = (-1)^n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ nu există.

(iiii) $k = 4m + 3$; $x = 2m\pi + \dfrac{3\pi}{2}$, deci $f_n(x) = (-1)^n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ nu există.

Prin urmare șirul $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplu pe mulțimea de convergență și neuniform, deoarece (T.12.1.11. Cor. 1) funcția limită este discontinuă în fiecare punct de forma $x = 2m\pi$ sau $x = 2m\pi + \dfrac{\pi}{2}$ $(m \in \mathbf{Z})$.

12.1.5. Exercițiu. *Fie* $f_n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R} (n \geqslant 1)$ *un șir de funcții definit astfel* $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, *dacă* $0 \leqslant x \leqslant n$ *și* $f(x) = 1$, *dacă* $n < x < \infty$. *Să se studieze natura șirului* $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

Soluție 1° $f_n \xrightarrow{s} 0$. Într-adevăr, fie $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$ și $\varepsilon > 0$ fixați. Atunci $f_n(x_0) = \dfrac{x_0}{n} < \varepsilon$, dacă $n \geqslant \dfrac{x_0}{\varepsilon}$, deci $f_n(x_0) \to 0$ $(n \to \infty)$.

2° $\|f_n\|_\infty = 1$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci (P.12.1.6.) $(f_n)_{n\geqslant 1}$ nu converge uniform.

3° Fie $A \subseteq \mathbf{R}_+$ o mulțime mărginită și k un majorant al lui A. Cum $f_n(k) \to 0$ $(n \to \infty)$ și $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(k)$, $(\forall)\ x \in A$ și $n \geqslant k$, rezultă că $\sup\limits_{x\in A} |f_n(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$, prin urmare $f_n \xrightarrow[A]{u} 0$ (P.12.1.6.).

12.1.6. Exercițiu. *Fie* $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *un șir de funcții defininit astfel* $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$. *Atunci* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *converge uniform la* 0.

Soluție. Evident avem $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$; să calculăm exact valoarea lui $\|f_n\|_\infty$ $(n \geqslant 1)$. Deoarece $f_n'(x) = \dfrac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2}$, $(\forall).\ x \in \mathbf{R}$. avem $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - nx^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Atunci

$$\|f_n\|_\infty = \max\left\{|f(-\infty)|, \left|f\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|, \left|f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|, |f(+\infty)|\right\}$$

Cum $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |f(x)| = 0$ și $\left|f_n\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ $(n \geqslant 1)$, rezultă $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Așadar $\|f_n\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$, deci $f_n \xrightarrow{u} 0$ (P.12.1.16.).

12.1.7. Exercițiu. *Să se studieze natura șirului* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *de funcții definit astfel* : $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1 + nx^2}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Soluție. Evident avem $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ deci $f_n \xrightarrow{s} f$.

Scanned with OKEN Scanner

Mai departe avem :

$$f(x) - f_n(x) = \begin{cases} \left|1 - \dfrac{nx^2}{1+nx^2}\right| = \dfrac{1}{1+nx^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Cum $\sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x) - f_n(x)| = 1$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, rezultă că $(f_n)_{n \geqslant 1}$, nu converge uniform pe $\mathbf{R}$ către f (P.12.1.6.).

Fie mai departe $\alpha > 0$ fixat. Dacă $|x| \geqslant \alpha$. avem $\dfrac{1}{1+nx^2} \leqslant \dfrac{1}{1+n\alpha^2}$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, deci

$$\sup_{|x| \geqslant \alpha} |f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+n\alpha^2} \to 0 \ (n \to \infty),$$

prin urmare (P.12.1.6.) $f_n \xrightarrow[A]{u} f$, unde $A := \{x \in \mathbf{R} ; |x| \geqslant \alpha\}$.

12.1.8. Exerciţiu. *Să se studieze natura şirului* $(f_n)_{n \geqslant 1}$ *de funcţii definit astfel* : $f_n(x) = e^{-nx^2} \sin nx$, $x \in \mathbf{R}$.

Soluţie. $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}^*$ avem $|f_n(x)| \leqslant e^{-nx^2}$, deci $f_n(x) \to 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$ şi cum $f_n(0) = 0$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, rezultă că $f_n \xrightarrow{s} 0$.

Mai departe avem :

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| \geqslant f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-\frac{1}{n}} \sin 1 \geqslant e^{-1} \sin 1 > 0,$$

deci $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| \not\to 0$ şi deci $(f_n)_{n \geqslant 1}$ nu converge uniform pe $[0,1]$.

În fine, fie $a > 0$ fixat ; atunci $e^{-nx^2} \leqslant e^{-na^2} \to 0$ $(n \to \infty)$, dacă $|x| \geqslant a$. Rezultă că

$$\sup_{|x| \geqslant a} |f_n(x)| \leqslant e^{-na^2} \to 0 \ (n \to \infty),$$

prin urmare $f_n \xrightarrow[A]{u} 0$, unde $A := \{x \in \mathbf{R} ; |x| \geqslant a\}$.

12.1.9. Exerciţiu. *Să se studieze natura şirului* $(f_n)_{n \geqslant 1}$, *de funcţii definit astfel* $f_n(x) := nx\, e^{-ny}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$.

Soluţie. Evident $f_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, deci $f_n \xrightarrow{s} 0$. Cum avem $\sup_{x \in \mathbf{R}_+^*} |f_n(x)| \geqslant f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1} > 0$, rezultă că $\sup_{x \in \mathbf{R}_+^*} |f_n(x)| \not\to 0$ $(n \to \infty)$, deci $(f_n)_{n \geqslant 1}$ nu converge uniform pe $\mathbf{R}_+^*$. Considerăm funcţia $\varphi(t) = te^{-t}$, $t \in \mathbf{R}_+$. Evident φ este strict crescătoare pe $[0,1]$ şi strict descrescătoare pe $[1, \infty)$. Fixăm mai departe $a > 0$ şi fie $n > N := E\left(\frac{1}{a}\right)$; atunci, $(\forall)$ $x \geqslant a$ avem $nx \geqslant na \geqslant 1$, deci $nxe^{-nx} \leqslant na\, e^{-na}$ şi deci $\sup_{x \geqslant a} f_n(x) \leqslant na\, e^{-na}$. Aşadar $\sup_{x \geqslant a} f_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$, deci $f_n \xrightarrow[A]{u} 0$, unde $A = [a, \infty]$.

12.1.10. Exerciţiu. *Fie* A *o mulţime şi* $f, g, f_n, g_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$ *cu* $f_n \xrightarrow{u} f$ *şi* $g_n \xrightarrow{u} g$. *Atunci au loc afirmaţiile :*

Scanned with OKEN Scanner

1° $f_n + g_n \xrightarrow{u} f + g$;

2° *Dacă funcţiile f şi g sînt mărginite, rezultă că* $f_n g_n \xrightarrow{u} fg$;

3° *Dacă funcţiile f sau g sînt nemărginite, nu rezultă numai decît că* $f_n g_n \to fg$.

Soluţie 1° $\|f_n + g_n - (f+g)\|_\infty \leqslant \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty$ etc.

2° Fie $\varepsilon > 0$ fixat; evident $(\exists)\ \varepsilon_1 > 0$ şi $\varepsilon_2 > 0$ cu proprietatea cu $\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \|g\|_\infty + \varepsilon_2 \|f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Fie mai departe $N \geqslant 1$ a.i. $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon_1$ şi $\|g_n - g\|_\infty \leqslant \varepsilon_2$, $(\forall)\ n \geqslant N$. Ţinem mai departe seamă de identitatea

$$f_n g_n - fg = (f_n - f)(g_n - g) + f(g_n - g) + g(f_n - f),\ (\forall)\ n \geqslant 1$$

3° Să construim un contraexemplu. Fie $f_n,\ g_n;\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $f_n := \mathbf{1}_\mathbf{R}$ şi $g_n := \frac{1}{n}$. Evident $f_n \xrightarrow{u} \mathbf{1}_\mathbf{R}$ şi $g_n \xrightarrow{u} 0$ în timp ce $(f_n g_n)_{n\geqslant 1}$ nu converge uniform la 0, deoarece $\|f_n g_n\|_\infty = +\infty$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

12.1.11 Exerciţiu. *Fie $f : [0,3] \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea că există $(P_n)_{n\geqslant 1}$ un şir de polinoame de grad $\leqslant 3$ a.î. $P_n(x) \to f(x)$, $(\forall)\ x \in [0,3]$. Atunci f este o funcţie polinomială de grad $\leqslant 3$.*

Soluţie. Fie $P_n = a_n X^3 + b_n X^2 + c_m X + d_n$ $(n \geqslant 1)$. Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = f(0);\ \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n + c_n + d_n) = f(1);$$

$$\lim_{n\to\infty} (8a_n + 4b_n + 3c_n + d_n) = f(2);\ \lim_{n\to\infty} (27\,a_n + 9\,b_n + 3c_n + d_n) = f(3),$$

rezultă că şirurile $(a_n + b_n + c_n)_{n\geqslant 1}$, $(4a_n + 2b_n + c_n)_{n\geqslant 1}$ şi $(9a_n + 3b_n + c_n)_{n\geqslant 1}$ sînt convergente, deci şirurile $(3a_n + b_n)_{n\geqslant 1}$ şi $(8a_n + 2b_n)_{n\geqslant 1}$ sînt convergente, de unde deducem în fine că şirurile $(a_n)_{n\geqslant 1}$ $(b_n)_{n\geqslant 1}$ şi $(c_n)_{n\geqslant 1}$ sînt convergente; fie a, b respectiv c limitele lor şi $d = f(0)$.

Prin urmare, $(\forall)\ x \in [0,3]$ avem:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (a_n x^3 + b_n x^2 + c_n x + d_n) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

deci f este o funcţie polinomială de grad $\leqslant 3$.

12.1.12. Exerciţiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Atunci $(\exists)$ $(P_n)_{n\geqslant 1}$ un şir de polinoame cu coeficienţii reali a.î. $P_n \xrightarrow[A]{u} f$, $(\forall)\ A \in \mathbf{R}$ compactă.*

Soluţie. Aplicînd T.12.1.18. pentru funcţia $f|_{[-1,1]}$, rezultă că $(\exists)\ P_1 \in \mathbf{R}[X]$ a.î. $|f(x) - P_1(x)| < 1$, $(\forall)\ x \in [-1,1]$. Mai departe, aplicînd T. 12.1.18. pentru funcţia $f|_{[-2,2]}$, rezultă că $(\exists)\ P_2 \in \mathbf{R}[X]$ a.î. $|f(x) - P_2(x)| < \frac{1}{2}$, $(\forall)$ $x \in [-2, 2]$. Prin inducţie construim, în acest mod, un şir $(P_n)_{n\geqslant 1}$ de polinoame, cu coeficienţi reali a.î. $|f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n}$, $(\forall)\ x \in [-n, n]$. Şirul $(P_n)_{n\geqslant 1}$ satisface condiţiile din enunţ. Într-adevăr, fie $A \subseteq \mathbf{R}$ compactă fixată. Atunci $(\exists)\ N \geqslant 1$ cu $A \subseteq [-N, N]$, deci $|f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n}$ $(\forall)\ x \in A \wedge n \geqslant N$, prin urmare $P_n \xrightarrow[A]{u} f$.

Scanned with OKEN Scanner

12.1.13. Exerciţiu. *Fie* $(f_n)_{n\geq 1}$, *unde* $f_n \in \mathcal{F}([0,1])$ $(n \geq 1)$, *un şir de funcţii cu* f_n *având graficul din fig. 135. Atunci* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge simplu şi neuniform la* 0.

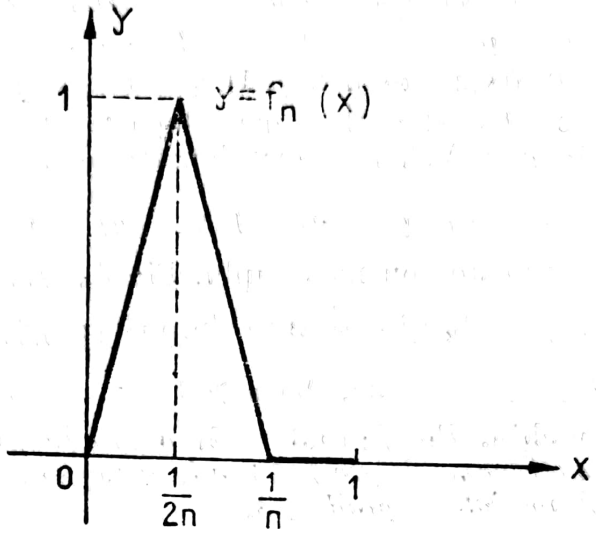


Fig. 135

Ind. Fie $x \in (0,1]$ fixat. Atunci $(\exists)\ N \geq 1$ a.î. $\frac{1}{n} < x$, $(\forall)\ n \geq N$ deci $f_n(x) = 0, (\forall)\ n \geq N$ deci $f_n \xrightarrow{s} 0$.

Cum $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1$, convergenţa este neuniformă.

12.1.14. Exerciţiu. *Fie* $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(n \geq 1)$ *un şir de funcţii definit astfel:*

$f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ *şi* $f_n = f_1 \circ f_{n-1}$, $(\forall)\ n \geq 2$. *Să se arate că* $f_n \xrightarrow{u} 0$.

Ind. Se arată prin inducţie relativ la n relaţia:

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \text{ şi } n \geq 1,$$

de unde rezultă imediat afirmaţia căutată.

Corolar 1 $\sqrt{n}\, f_n(x) \to \operatorname{sign} x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

12.1.15. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie de clasă* $\mathcal{C}^\infty$. *Ştiind că şirul* $(f^{(n)})_{n\geq 1}$ *este uniform convergent, să se determine limita sa.*

Ind. Fie φ limita şirului $(f^{(n)})_{n\geq 1}$. Deoarece şirul $((f^{(n)})')_{n\geq 1}$ esfte uniform convergent, rezultă că $(f^{(n)})' \to \varphi'$, deci $\varphi = \varphi'$, de unde deducem că $\varphi(x) = ke^x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

12.1.16. Exerciţiu. *Să se construiască un şir uniform convergent de funcţii derivabile pentru care funcţia limită nu este derivabilă.*

Soluţie. Să considerăm funcţiile (fig. 136):

$$f(x) = |x|,\ |x| \leq 1 \text{ şi } f_n(x) = \begin{cases} \frac{2}{n} - \sqrt{\frac{1}{n^2} - x^2}, & |x| \leq \frac{1}{n} \\ |x|, & \frac{1}{n} \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

Atunci

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} \frac{2}{n} - \sqrt{\frac{2}{n^2} - x^2} - x, |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ 0, \qquad \frac{1}{n} \leqslant |x| \leqslant 1, \end{cases}$$

deci

$$\sup_{|x| \leqslant 1} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

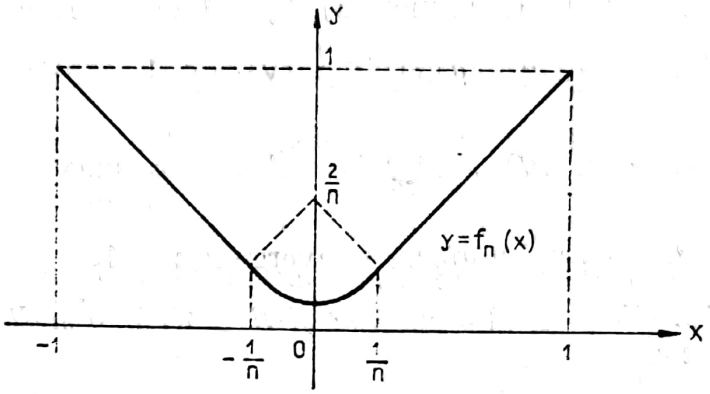


Fig. 136

Prin urmare $f_n \xrightarrow{u} f$ și rămîne să observăm că fiecare funcție f_n este derivabilă pe $[-1, 1]$ în timp ce funcția limită f nu este derivabilă în $x = 0$.

Corolar 1. *Există $(f_n)_{n\geqslant 1}$ un șir uniform convergent de funcții derivabile pentru care șirul derivatelor $(f_n')_{n\geqslant 1}$ nu este uniform convergent.*

Soluție. Fie $(f_n)_{n\geqslant 1}$ șirul consderat mai sus și f limita sa. Dacă $(f_n')_{n\geqslant 1}$ ar fi uniform convergent, fie g limita sa, atunci (T. 12.1.14.) f ar fi derivabilă și $f' = g$, absurd.

12.1.17. Exercițiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$ un șir echimărginit de funcții. Atunci șirul $\left(\frac{1}{n} f_n\right)_{n\geqslant 1}$ este uniform convergent și are limita 0.*

Soluție. Șirul $(f_n)_{n\geqslant 1}$ fiind echimărginit există $M > 0$ a.î.

$$|f_n(x)| \leqslant M, \ (\forall)\ x \in A \wedge n \geqslant 1,$$

deci

$$\left|\frac{1}{n} f_n(x)\right| \leqslant \frac{M}{n}, \ (\forall)\ x \in A \wedge n \geqslant 1,$$

și deci $\frac{1}{n} f_n \xrightarrow{u} 0$.

Corolar 1. *Fie $f_n \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$ $(n \geqslant 1)$ un șir de funcții definit astfel $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ și $n \geqslant 1$. Atunci $f_n \xrightarrow{u} 0$.*

Corolar 2. *Fie $f_n \in \mathcal{F}((0, \pi))$ $(n \geqslant 1)$ un șir de funcții definit astfel $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}$, $(\forall)\ x \in (0, \pi) \wedge n \geqslant 1$. Atunci $(f_n)_{n\geqslant 1}$ este un șir uniform convergent*

Scanned with OKEN Scanner

de funcții derivabile pentru care șirul derivatelor $(f_n')_{n\geqslant 1}$ nu converge în nici un punct.

12.1.18. Exercițiu. *Fie X o mulțime și $f_n \in \mathcal{F}(X)$ $(n \geqslant 1)$ un șir de funcții. Atunci $(f_n)_{n\geqslant 1}$ este uniform convergent pe mulțimea $A \subseteq X \Leftrightarrow (\exists) A_1, \ldots, A_s \subseteq A$ cu $\bigcup_{i=1}^{s} A_i = A$ a.î. $(f_n)_{n\geqslant 1}$ este uniform convergent pe fiecare A_i, $i \in \overline{1, s}$.*

Soluție. Implicația $(\Rightarrow)$ este evidentă.

$(\Leftarrow)$ Fie $g_i \in \mathcal{F}(X)$, $i \in \overline{1, s}$ a.î. $f_n \overset{u}{\underset{A_i}{\to}} g_i$ și fie $f : X \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = g_i(x)$ dacă $x \in A_i$ și $f(x) = 0$ dacă $x \in \mathbf{R} \setminus A$. Definiția lui f este coerentă și avem $f_n \overset{u}{\underset{A}{\to}} f$.

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)\ N_i \geqslant 1$ cu $i \in \overline{1, s}$ a.î.

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - g_i(x)| \leqslant \varepsilon, (\forall)\ x \in A_i \wedge n \geqslant N_i.$$

deci

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ x \in \bigcup_{i=1}^{s} A_i = A \wedge n \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant s} N_i$$

și deci $f_n \overset{u}{\underset{A}{\to}} f$, adică $(f_n)_{n\geqslant 1}$ este uniform convergent pe A.

12.1.19. Exercițiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $H \subseteq \mathcal{F}(A)$ o mulțime de funcții λ — lipschitziene, i.e.*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \lambda\, |x_1 - x_2|,\ (\forall)\ x_1, x_2 \in A \wedge f \in H.$$

Atunci H este echicontinuă.

Soluție. Fie $\varepsilon > 0$ fixat și $\eta = \varepsilon/\lambda$. Atunci avem

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \varepsilon, (\forall)\ x_1, x_2 \in A,\ |x_1 - x_2| \leqslant \eta \wedge f \in H,$$

deci H este echicontinuă.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $H \subseteq \mathcal{F}(I)$ o mulțime de funcții derivabile cu proprietatea că mulțimea $\{f' \mid f \in H\}$ este echimărginită. Atunci H este echicontinuă.*

Soluție. Mulțimea $\{f';\ f \in H\}$ fiind echimărginită, $(\exists)\ M > 0$ a.î. $|f'(x)| \leqslant M$, $(\forall)\ x \in I$ și $f \in H$. Atunci, $(\forall)\ x_1, x_2 \in I$ și $f \in H$ avem (T.6.3.4.):

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| \cdot |f'(\xi)| \leqslant M\, |x_1 - x_2|,$$

deci H este echicontinuă.

12.1.20. Exercițiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $H \subseteq \mathcal{C}(A)$ o mulțime finită de funcții continue. Atunci H este echicontinuă.*

Soluție. Fie $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ o enumerare a mulțimii H și fie $x_0 \in A$ și $\varepsilon > 0$ fixați. Funcția f_i $(i = \overline{1, n})$ fiind continuă, există V_i o vecinătate a lui x_0 a.î.

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ x \in A \cap V_i$$

Evident mulțimea $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ este o vecinătate a lui x_0 și avem

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leqslant \varepsilon, (\forall)\ x \in A \cap V \wedge i = \overline{1, n},$$

deci H este echicontinuă în x_0 și deci pe A.

Scanned with OKEN Scanner

12.1.21. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime compactă şi $H \subseteq \mathcal{C}(A)$ o mulţime finită de funcţii continue. Atunci H este echimărginită.*

Soluţie. Fie $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ o enumerare a mulţimii H. Mulţimea A fiind compactă şi $f_i (i = \overline{1, n})$ continuă, f_i este mărginită, deci există $M_i > 0$ a.î.

$$|f_i(x)| \leqslant M_i, \ (\forall)\ x \in A.$$

Dacă $M = \max\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$, atunci avem :

$$|f_i(x) \leqslant M, \ (\forall)\ x \in A \wedge i = \overline{1, n},$$

deci H este echimărginită.

12.1.22. Exerciţiu. *Un şir uniform convergent de funcţii mărginite este echimărginit.*

Soluţie. Fie $f_n \in \mathcal{F}(A)$, $(n \geqslant 1)$ un şir uniform convergent de funcţii mărginite şi f limita sa. Atunci pentru $\varepsilon = 1$, $(\exists)\ n_0 \geqslant 1$ a.î.

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant 1, \ (\forall)\ x \in A \wedge n \geqslant n_0,$$

deci

$$|f_n(x)| \leqslant 1 + |f(x)|, \ (\forall)\ x \in A \wedge n \geqslant n_0 \tag{1}$$

Funcţiile f_n $(n \geqslant 1)$ fiind mărginite, rezultă (T. 12.1.12.) că f este mărginită, deci există $M > 0$, $M_1 > 0, \ldots, M_{n_0} > 0$ a.î.

$$|f(x)| \leqslant M \ \text{şi} \ |f_i(x)| \leqslant M_i, \ (\forall)\ x \in A \wedge i = \overline{1, n_0} \tag{2}$$

Din (1) $\wedge$ (2) deducem că

$$|f_n(x)| \leqslant \max\{1 + M, M_1, \ldots, M_{n_0}\}, \ (\forall)\ x \in A \wedge n \geqslant 1,$$

deci şirul $(f_n)_{n \geqslant 1}$ este echimărginită.

12.1.23. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime, $(x_n)_{n \geqslant 1}$ un şir convergent de elemente din A cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x \in A$ şi $f_n \in \mathcal{C}(A)$ $(n \geqslant 1)$ un şir de funcţii continue cu proprietatea că $f_n \xrightarrow{u} f \in \mathcal{F}(A)$. Atunci $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_n) = f(x)$.*

Soluţie. Evident avem :

$$|f(x) - f_n(x_n)| \leqslant |f(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f_n(x_n)|, \ (\forall)\ n \geqslant 1 \tag{1}$$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Deoarece $f_n \xrightarrow{u} f$, $(\exists)\ n_1 \geqslant 1$ a.î.

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon/2, \ (\forall)\ x \in A \wedge n \geqslant n_1 \tag{2}$$

Cum $f_n \in \mathcal{C}(A)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, rezultă (T.12.1.11.Cor. 1) că $f \in \mathcal{C}(A)$, deci există $n_2 \geqslant 1$ a.î.

$$|f(x) - f(x_n)| \leqslant \varepsilon/2, \ (\forall)\ n \geqslant n_2 \tag{3}$$

Din (1) $\wedge$ (2) $\wedge$ (3) deducem

$$|f(x) - f_n(x_n)| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \ (\forall)\ n \geqslant \max\{n_1, n_2\},$$

prin urmare $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_n) = f(x)$.

12.1.24 Exerciţiu. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Atunci există $f_n, g_n \in \mathcal{F}([a, b])$ $(n \geqslant 1)$ două şiruri de funcţii etajate cu proprietăţile:* (i) $f_n \leqslant f \leqslant g_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$; (ii) $f_n \xrightarrow{u} f$, şi $g_n \xrightarrow{u} f$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Funcția f fiind continuă și $[a, b]$ compact este uniform continuă. Atunci pentru $\varepsilon = \frac{1}{n}$ există $\eta_n > 0$ a.î.

$$|f(x) - f(x')| \leqslant \frac{1}{n}, (\forall)\ x, x' \in [a, b], |x - x'| \leqslant \eta_n \qquad (1)$$

Fie Δ_n o diviziune a lui $[a, b]$ cu $\nu(\Delta_n) < \eta_n$ și $f_n, g_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ definite astfel : pe fiecare interval parțial $[x_i^n, x_{i+1}^n)$ al diviziunii Δ_n funcțiile f_n și g_n sînt constante și anume

$$f_n(x) = \inf f([x_i^n, x_{i+1}^n)),\ g_n(x) = \sup f([x_i^n, x_{i+1}^n),\ (\forall)\ x \in [x_i^n, x_{i+1}^n)$$

și $f_n(b) = g_n(b) = f(b)$. Atunci din (1) deducem :

$$0 \leqslant f - f_n \leqslant \frac{1}{n},\ 0 \leqslant g_n - f \leqslant \frac{1}{n},\ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

prin urmare

$$f_n \leqslant f \leqslant g_n,\ (\forall)\ n \geqslant 1 \text{ și } f_n \xrightarrow{u} f,\ g_n \xrightarrow{u} f.$$

12.1.25. Exercițiu. *Fie* $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *un șir de funcții definit astfel* $f_n(x) = nx^n$, *dacă* $x \in [0, 1)$ *și* $f_n(1) = 1$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 (\lim\limits_{n\to\infty} f_n)$.

Soluție. Dacă $x \in [0, 1)$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} nx^n = 0$.

Deoarece $f_n(1) = 1$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, conchidem că $f_n \xrightarrow{s} 0$, deci $\int_0^1 (\lim\limits_{n\to\infty} f_n) = 0$. Din T. 12.1.16. rezultă că fiecare funcție $f_n (n \geqslant 1)$ este integrabilă. Cum f_n diferă de funcția $[0, 1] \ni x \mapsto nx^n$ într-un singur punct, $x = 1$, deducem :

$$\int_0^1 f_n = \int_0^1 nx^n\, dx = \frac{n}{n+1} x^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{n}{n+1}$$

Așadar $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ etc.

12.1.26. Exercițiu. *Să se construiască un șir convergent de funcții integrabile pentru care funcția limită nu este integrabilă.*

Soluție. Fie $A = [0, 1] \cap Q$ și $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ o enumerare a mulțimii A. Considerăm șirul $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ definit astfel :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in \{r_1, r_2, \ldots r_n\} \\ 0, \text{ dacă } x \in [0, 1] \setminus \{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \end{cases}$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$, unde f este funcția lui Dirichlet. Funcția f_n fiind continuă pe $[0, 1] \setminus \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ și mărginită, este integrabilă, în timp ce funcția f nu este integrabilă.

Corolar 1. *Șirul* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *definit mai sus nu este uniform convergent.*

Scanned with OKEN Scanner

12.1.27. Exercițiu. *Să se arate că funcțiile* 1° $\sin$; 2° e^x, *nu pot fi aproximate uniform pe* $\mathbf{R}$ *prin funcții polinomiale:*

Soluție 1°. Presupunem contrariul. Atunci pentru $\varepsilon = 1$, $(\exists)\ P \in \mathbf{R}[X]$ a. î. $|P(x) - \sin x| < 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deci

$$|P(x)| \leqslant |P(x) - \sin x| + |\sin x| < 2,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

De aici rezultă P constant; fie $P = c$. Particularizînd pe x obținem $|c - 1| < 1$ și $|c + 1| < 1$, absurd.

2° Presupunem contrariul. Atunci $(\exists)\ P \in \mathbf{R}[X]$ a.î. $|e^x - P(x)| \leqslant 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deci $|1 - e^{-x}P(x)| \leqslant e^{-x}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, de unde prin trecere la limită, $x \to \infty$, obținem $|1 - 0| \leqslant 0$, absurd, etc.

12.1.28. Exercițiu. *Fie* $f_n, g_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *două) șiruri de funcții definite* astfel: $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \wedge n \geqslant 1$.

Atunci $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *este strict crescător pe* $\mathbf{R}_+^*$, $(g_n)_{n\geqslant 1}$ *este strict descrescător pe* $(0, 1]$ *și avem:*

$$f_n(x) < e^x,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*;\ e^x < g_n(x),\ (\forall)\ x \in (0, 1].$$

Soluție. Din inegalitatea lui Bernoulli deducem:

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \left(\frac{n+1+x}{n+1}\right)^{n+1} : \left(\left(\frac{n+x}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+x}\right) =$$

$$= \left[\frac{n(n+1+x)}{(n+1)(n+x)}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+x}{n} = \left[1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+x}{n} >$$

$$> \left[1 - \frac{(n+1)x}{(n+1)(n+x)}\right] \frac{n+x}{n} = 1,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*,$$

deci

$$f_n(x) < f_{n+1}(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+,\ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Analog avem:

$$\frac{g_n(x)}{g_{n+1}(x)} = \left(\frac{n+x}{n}\right)^{n+1} : \left(\frac{(n+1+x)}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1+x}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{\frac{n+x}{x}}{\frac{n+1+x}{n+1}}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+1+x} = \left(\frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+1+x} =$$

$$= \left[1 + \frac{x}{n(n+1+x)}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+1+x} > \left[1 + \frac{(n+1)x}{n(n+1+x)}\right] \frac{n+1}{n+1+x} > 1,$$

$$(\forall)\ x \in (0, 1],$$

deci

$$g_{n+1}(x) < g_n(x),\ (\forall)\ x \in (0, 1] \text{ și } n \geqslant 1$$

Corolar 1. *In același cadru avem:* $f_n \xrightarrow[A]{u} f$, $(\forall)$ A *compactă* $\subseteq \mathbf{R}_+^*$; $g_n \xrightarrow[[0,1]]{u} f$, *unde* f *este funcția exponențială.*

Scanned with OKEN Scanner

12.1.29. Exerciţiu. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie de clasă* C^1, $(h_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir convergent la* 0 *din* $\mathbf{R}^*$ *şi* $f_n(x) = \dfrac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \wedge n \in \mathbf{N}$. *Atunci* $(\forall)$ A *o mulţime compactă din* $\mathbf{R}$, *avem că* $f_n \xrightarrow[A]{u} f$.

Soluţie. Aplicăm T.6.3.4. funcţiei f şi intervalului $[x,\ x+h_n]$:

$$f(x+h_n) - f(x) = h_n f'(\xi_n),\ \xi_n \in (x,\ x+h_n),$$

deci

$$f_n(x) - f'(x) = \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} - f'(x) = f'(\xi_n) - f'(x) \tag{1}$$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat, $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime compactă fixată şi $[a,\ b]$ un interval compact cu proprietatea că $x + h_n \in [a,\ b]$, $(\forall)\ x \in A \wedge n \geqslant 1$. Atunci evident $A \subseteq [a,\ b]$ şi $\xi_n \in [a,\ b]$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Mulţimea $[a,\ b]$ fiind compactă şi f' continuă pe $\mathbf{R}$, rezultă că f' este uniform continuă pe $[a,\ b]$, deci există $\eta_\varepsilon = \eta(\varepsilon) > 0$ a.î.

$$|f'(x_1) - f'(x_2)| < \varepsilon,\ (\forall)\ x_1,\ x_2 \in [a,\ b],\ |x_1 - x_2| \leqslant \eta \tag{2}$$

Deoarece $h_n \to 0$ există $n_0 \geqslant 1$ a.î. $|h_n| \leqslant \eta$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$. De aici şi din (1) şi (2) rezultă că

$$|f_n(x) - f'(x)| < \varepsilon,\ (\forall)\ x \in A \wedge n \geqslant n_\varepsilon,$$

deci $f_n \xrightarrow[A]{u} f'$

12.1.30. Exerciţiu. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime* $x_0 \in A \cap A'$ *un punct şi* $f_n : A \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *un şir de funcţii continui în* x_0 *cu proprietatea că* $f_n(x_0) = 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ *şi există* $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$ *a.î.* $f_n(x_n) = 1$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. *Atunci şirul* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *nu posedă nici un subşir uniform convergent.*

Soluţie. Presupunem că $(f_n)_{n\geqslant 1}$ este uniform convergent şi fie $f : A \to \mathbf{R}$ limita sa. Deoarece f_n este continuă în x_0, $(\forall)\ n \geqslant 1$, rezultă că f este continuă în x_0. Evident avem $f(x_0) = 0$ şi

$$|f(x_n) - 1| = |f(x_n) - f_n(x_n)| \leqslant \|f - f_n\|_\infty \to 0,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq f(x_0)$, ceea ce contrazice faptul că f este continuă în x_0. Rămîne că $(f_n)_{n\geqslant 1}$ nu este uniform convergent.

Analog se arată că $(f_n)_{n\geqslant 1}$ nu posedă un subşir uniform convergent.

Corolar 1. *Fie* $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *un şir de funcţii continue în* 0 *a.î.* $f_n(0) = 0$ *şi* $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. *Atunci* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *nu posedă un subşir uniform convergent.*

12.1.31. Exerciţiu *Fie* $f_n : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *un şir de funcţii definit astfel* : $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$ *şi* $n \geqslant 1$. *Atunci* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *converge uniform (resp. simplu şi neuniform) pe orice interval compact* $[a,\ b]$ *cu* $a > 0$ *(resp.* $a = 0$*).*

Soluţie. Fie $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel : $f(x) = 1$ dacă $x > 0$ şi $f(0) = 0$. Atunci

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} \sqrt[n]{x} - 1, & x \geqslant 1 \\ 1 - \sqrt[n]{x}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcția $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in \mathbf{R}_+^*$, fiind strict crescătoare, rezultă

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = \max \{|\sqrt[n]{a} - 1|, |\sqrt[n]{b} - 1|\}.$$

deci $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniform (resp. simplu și neuniform) la f pe $[a, b]$, dacă $a > 0$ (resp. $a = 0$).

Corolar 1. *Fie* $f_n : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *un șir de funcții definit astfel* : $f_n(x) = \frac{1}{x}\sqrt[n]{x}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+^* \wedge n \geqslant 1$. *Atunci* $(f_n)_{n \geqslant 1}$ *converge uniform (resp. simplu și neuniform) pe orice interval* $[a, b]$ *cu* $a > 0$ *(resp.* $(0, b]$*) către funcția* f, *unde* $f(x) = \frac{1}{x}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+^*$

Corolar 2. *Fie* $f_n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *un șir de funcții definit astfel* : $f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+$ *și* $n \geqslant 1$. *Atunci* $(f_n)_{n \geqslant 1}$ *converge uniform (resp. simplu și neuniform) pe orice interval* (a, b) *cu* $a > 0$ *(resp.* $a = 0$*) către funcția* f, *unde* $f(x) = \ln x$, $x \in \mathbf{R}_+^*$.

Soluție. Se aplică Cor. 1.

12.1.32. Exercițiu. *Fie funcțiile* $f_n(x) = [x^n]^{1/n}$, $x \in \mathbf{R}_+$, $n \in \mathbf{N}$. *Să se arate că* $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+$ *șirul* $(f_n(x))_{n \geqslant 1}$ *este convergent*; *fie* f *limita sa. Să se studieze continuitatea funcțiilor* f *și* $f_n (n \in \mathbf{N})$.

Ind. Pentru $k^{1/n} \leqslant x < (k+1)^{1/n}$ avem $k \leqslant x^n < k + l$, deci $[x^n] = k$ și $f_n(x) = k^{1/n}$. Așadar f_n este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{\sqrt[n]{k};\ k \geqslant 1\}$ și discontinuă pe $\{\sqrt[n]{k};\ k \geqslant 1\}$.

Să observăm că $f_n(x) = 0$, $(\forall)$ $x \in [0, 1)$ și $n \in \mathbf{N}$, deci $f_{|[0,1)} = 0$. Dacă $x \geqslant 1$ avem $x^n \geqslant 1$, deci $[x^n] \geqslant 1$ și deci $f_n(x) \geqslant 1$. Cum $[x^n] \leqslant x^n \leqslant [x^n] + 1$ avem $x \geqslant f_n(x) \geqslant 1$, $(\forall)$ $x \geqslant 1$, deci

$$0 \leqslant x - f_n(x) = \frac{x^n - f_n^n(x)}{x^{n-1} + x^{n-2} f_n(x) + \ldots + f^{n-1}(x)} \leqslant \frac{x^n - [x^n]}{n} < \frac{1}{n}.$$

12.1.33. Exercițiu. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime simetrică și* $f, f_n \in \mathcal{F}(A)$, $(n \geqslant 1)$. *Dacă* $f_n \xrightarrow{s} f$ *și fiecare* $f_n (n \geqslant 1)$ *este pară (resp. impară), atunci* f *este pară (resp. impară).*

Soluție $f(-x) = \lim_{n \to \infty} f_n(-x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ etc.

12.1.34. Exercițiu. *Să se construiască un șir de funcții* $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *discontinue în fiecare punct și care converge uniform către o funcție continuă.*

Ind. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcția lui Dirichlet și $f_n := \frac{1}{n} f$, $(n \geqslant 1)$. Atunci $f_n \xrightarrow{u} 0$. *și fiecare* $f_n (n \geqslant 1)$ *este discontinuă pe* $\mathbf{R}$

12.1.35. Exercițiu. *Fie* $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *un șir de funcții definit astfel*

$$f_1(x) = \sin x \text{ și } f_{n+1}(x) = \sin f_n(x),\ (\forall)\ n \geqslant 1.\ \textit{Atunci}\ f_n \xrightarrow{u} 0$$

Soluție. Evident $f_n (n \geqslant 1)$ este continuă și periodică de perioadă 2π. Rămîne să arătăm că $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniform pe $[-\pi, \pi]$. Deoarece $\sin x \leqslant x$,

Scanned with OKEN Scanner

$(\forall)\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și sin este strict crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ rezultă că $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$, $(\forall)\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Analog din inegalitatea $x \leqslant \sin x$, $(\forall)\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ și sin strict crescătoare pe $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ rezultă că $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, $(\forall)\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Așadar $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ există, $(\forall)\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Trecînd la limită în relația $f_{n+1}(x) = \sin f_n(x)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, obținem $f(x) = \sin f(x)$, deci $f(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Din T. 12. 1.13. rezultă că $f_n \xrightarrow[\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]]{u} 0$ și $f_n \xrightarrow[\left[0, \frac{\pi}{2}\right]]{u} 0$, deci $f_n \xrightarrow[[-\pi, \pi]]{u} 0$,

Evident $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \Leftrightarrow x + \pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; $f_n(x+\pi) = -f_n(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Deoarece $-f_n \xrightarrow[\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]]{u} 0$, deducem că $f_n \xrightarrow[\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]]{u} 0$. Analog $f_n \xrightarrow[\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]]{u} 0$, deci $f_n \xrightarrow[[-\pi, \pi]]{u} 0$.

Corolar 1. *In același cadru : seria de funcții* $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n f_n$ *este uniform convergentă.*

Soluție. Aplicăm teorema Leibniz (T. 12.2.18. Cor. 4). și Ex. 12.1.35.

12.1.36. Exercițiu. *Fie* $(P_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de funcții polinomiale care converge uniform pe* $\mathbf{R}$ *la o funcție* f. *Atunci* f *este un polinomială.*

Soluție. Deoarece $P_n \xrightarrow{u} f$, pentru 1 există $n_0 \geqslant 1$ a.î.

$$|P_n(x) - f(x)| \leqslant 1,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R},\ (\forall)\ n \geqslant n_0,$$

deci

$$|P_n(x) - P_{n_0}(x)| \leqslant 2,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R},\ (\forall)\ n \geqslant n_0.$$

Așadar, $P_n - P_{n_0}$ este un polinom mărginit pe $\mathbf{R}$, deci o constantă, să o notăm cu c_n, de unde rezultă că $P_n = P_{n_0} + c_n$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$.

Să arătăm că șirul numeric $(c_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent.

Într-adevăr, pentru $x \in \mathbf{R}$ fixat avem $P_n(x) \to f(x)$, deci $P_n(x) - P_{n_0}(x) \to f(x) - P_{n_0}(x)$ și deci $c_n \to f(x) - P_{n_0}(x)$. Fie $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Cum limita unui șir de numere este unică, din calculul făcut avem :

$$c = f(x) - P_{n_0}(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}, \text{ adică } f = c + P_{n_0}$$

12.1.37. Exercițiu. *Fie* $f_n : [0, 1) \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *un șir de funcții definit astfel :* f_n *ia pe fiecare interval* $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ $(k = \overline{1, 2^n})$ *valoarea* 1 *pentru* k *par și valoarea* 0 *pentru* k *impar. Atunci* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *nu conține nici un subșir simplu convergent.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ un subșir arbitrar al șirului dat. Construim prin inducție relativ la k un șir de intervale $([a_k, b_k))_{k\geq 1}$ incluse în $[0, 1)$ cu proprietățile:

1° $[a_k, b_k) \supseteq [a_{k+1}, b_{k+1})$, $(\forall)\ k \geq 1$; 2° $[a_k, b_k)$ are lungimea $\frac{1}{2^{n_k}}$, $(\forall) k \geq 1$; 3° f_{n_k} ia pe intervalul $[a_k, b_k)$ valoarea 0 sau 1, după cum k este par respectiv impar.

Evident $b_{k+1} - a_{k+1} \leq \frac{1}{2}(b_k - a_k)$, $(\forall)\ k \geq 1$, deci $\bigcap_{k\geq 1} [a_k, b_k]$ se reduce la un punct; să-l notăm cu c. Să observăm că dacă f_n ia pe intervalul $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ valoarea 1, iar funcția f_m, cu $m > n$, ia pe intervalul $\left[\frac{j-1}{2^m}, \frac{j}{2^m}\right) \subseteq \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ valoarea 0, atunci $\frac{j}{2^m} < \frac{k}{2^n}$. De aici deducem că $b_{k+1} < b_k$, $(\forall)\ k \geq 1$, deci $c \in \bigcap_{k\geq 1} [a_k, b_k)$. Șirul $(f_{n_k}(c))_{k\geq 1}$ nu este convergent, deoarece $f_{n_k}(c)$ este 0 sau 1 după cum k este par respectiv impar.

Prin urmare, $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ nu este simplu convergent.

12.1.38. Exercițiu. *Fie $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă cu $f(0) = 0$. Atunci există $P_n \in \mathbf{R}[X]$, $P_n = \sum_{k\geq 0} a_{k,n} X^k$ $(n \geq 1)$ un șir de funcții polinomiale care converge uniform pe $[0,1]$ către f a.î. $\lim_{n\to\infty} a_{k,n} = 0$ $(\forall)\ k \geq 0$.*

Soluție. Fie $n \geq 1$ fixat. Atunci $(\exists)\ \varepsilon_n \in (0,1)$ a.î. $|f(x)| \leq \frac{1}{n}$, $(\forall)\ x \in [0, \varepsilon_n]$. Considerăm $g:[0,1] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă definită astfel: g constantă pe $[0, \varepsilon_n]$ și $g(x) = x^{-n} f(x)$, $(\forall)\ x \in [\varepsilon_n, 1]$. Aplicînd T. 12.1.18. Cor. 1 există $Q_n \in \mathbf{R}[X]$ un polinom a.î. $\|g - Q_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$. Dacă $P_n(x) = x^n Q_n(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, atunci:

$$f(x) - P_n(x) = f(x) - x^n Q_n(x) = \begin{cases} f(x) - x^n g(x) + x^n(g(x) - Q_n(x)), & (\forall)\ x \in [0, \varepsilon_n] \\ x^n g(x) - x^n Q_n(x) = x^n(g(x) - Q_n(x)), & (\forall) x \in [\varepsilon_n, 1] \end{cases}$$

Cum $g(x) = \varepsilon_n^{-n} f(\varepsilon_n)$, dacă $x \in [0, \varepsilon_n]$; $|f(x)| \leq \frac{1}{n}$, $(\forall)\ x \in [0, \varepsilon_n]$ și $|g(x) - Q_n(x)| \leq \frac{1}{n}$, $(\forall)\ x \in [0,1]$, rezultă că

$$|f(x) - P_n(x)| \leq 3/n, \quad (\forall)\ x \in [0, 1]$$

Prin urmare, am găsit un șir $(P_n)_{n\geq 1}$ de polinoame care converg uniform pe $[0,1]$ către f și grad $P_n \geq n$, $(\forall)\ n \geq 1$. Atunci, dacă $P_n = \sum_{k\geq 0} a_{k,n} X^n$, avem $a_{k,n} = 0 (0 \leq k < n)$, deci $\lim_{n\to\infty} a_{k,n} = 0$, $(\forall)\ k \geq 0$.

12.1.39. Exercițiu. *Fie $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Atunci $f = 0$.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ fixat, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Atunci

$$\int_a^b P(x) f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^k f(x)\,dx = 0 \tag{1}$$

Din T. 12.1.18. rezultă că $(\exists)(P_n)_{n\geq 1}$ un șir de funcții polinomiale definite pe $[a, b]$ a.î. $\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \to 0 (n \to \infty)$ deci $\sup_{x\in[a,b]} |P_n(x)f(x) - f^2(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$. Din T.12.1.16 rezultă că $\int_a^b P_n f \to \int_a^b f^2$, $(n \to \infty)$. Însă cf. (1) avem $\int_a^b P_n f = 0$, $(\forall)\ n \geq 1$, deci $\int_a^b f^2 = 0$ și deci (P. 9.2.12. Cor. 3) $f = 0$.

12.2. Serii de funcții

12.2.1. Exercițiu. *Să se studieze natura seriei de funcții* $\sum_{n\geq 1} x^n(1-x)$, $x \in \mathbf{R}$

Soluția. Deoarece seria $\sum_{n\geq 1} x^n$, $x \in \mathbf{R}$, este simplu convergentă pe $(-1, 1)$ și divergentă pe $\mathbf{R}\setminus(-1,1)$ rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} x^n(1-x)$, $x \in \mathbf{R}$, este simplu convergentă pe $(-1,1]$ și divergentă pe $\mathbf{R}\setminus(-1,1]$.

Să presupunem că seria $\sum_{n\geq 1} x^n(1-x)$ este uniform convergentă pe $(a,1]$, cu $-1 \leq a < 1$ și fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)\ n_\varepsilon \geq 1$ a.î.

$$|(1-x)(x^n + x^{n+1} + \ldots + x^{n+p})| \leq \varepsilon,\ (\forall)\ n \geq n_\varepsilon,\ p \geq 1 \wedge x \in (a, 1],$$

deci

$$|x^n(1 - x^{p+1})| \leq \varepsilon, (\forall)\ n \geq n_\varepsilon,\ p \geq 1 \wedge x \in (a, 1] \tag{1}$$

Din (1) prin trecere la limită, $p \to \infty$, obținem :

$$|x^n| \leq \varepsilon,\ (\forall)\ n \geq n_\varepsilon \wedge x \in (a, 1] \Leftrightarrow 1 = \sup_{x\in(a,1]} |x^n| \leq \varepsilon,\ (\forall)\ n \geq n_\varepsilon$$

Contradicția obținută arată că $\sum_{n\geq 1} x^n(1-x)$ converge neuniform pe $(a, 1]$.

12.2.2. Exercițiu. *Să se studieze natura seriei de funcții* $\sum_{n\geq 1} f_n$, *unde*

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n},\ x \in \mathbf{R}\ (n \geq 1).$$

Soluție. Cum $f_n(0) = 0$, $(\forall)\ n \geq 1$, avem că $\sum_{n\geq 1} f_n(0) = 0$. Dacă $x \neq 0$ atunci $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ este seria geometrică cu rația $\frac{1}{1+x^2}$, deci are suma egală cu $\frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}}$, adică cu 1. Așadar seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este simplu convergentă și are ca sumă funcția f, unde $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este definită astfel $f(0)=0$ și $f(x)=1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}^*$. Cum f nu este continuă în 0, seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ nu este uniform conver-

Scanned with OKEN Scanner

gentă pe nici o vecinătate a lui 0. În fine, să observăm că seria dată este normal convergentă pe mulțimea $A = \{x \in \mathbf{R};\ |x| \geqslant a > 0\}$, fiind majorată pe A de seria numerică convergentă $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a^2}{(1+a^2)^n}$.

12.2.3. Exercițiu. *Seria de funcții* $\sum_{n\geqslant 1} 3^n \sin \frac{1}{4^n x}$, $x \in \mathbf{R}^*$, *este absolut convergentă, însă nu este uniform convergentă pe nici o vecinătate punctată a lui* 0.

Soluție. Fie $f_n(x) = 3^n \sin \frac{1}{4^n x}$, $x \in \mathbf{R}^*$. Evident avem

$$f_n(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin 1/4^n x}{1/4^n x} \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}^*.$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 1/4^n x}{1/4^n x} = 1$, există $N \geqslant 1$ a.î.

$$0 < \frac{\sin 1/4^n x}{1/4^n x} \leqslant 2,\ (\forall)\ n \geqslant \mathbf{N},$$

deci

$$0 < |f_n(x)| < \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{2}{x},\ (\forall)\ n \geqslant \mathbf{N}$$

Atunci seria numerică $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$, cu $x \in \mathbf{R}^*$ fixat, este majorată de seria geometrică $\sum_{n\geqslant 1} (3/4)^n$, deci este convergentă.

Seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ nu este uniform convergentă pe nici o vecinătate punctată $\dot{V}$ a lui 0, deoarece $\sup_{x\in\dot{V}} |f_n(x)| = 3^n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

12.2.4. Exercițiu. *Seria de funcții* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbf{R}$, *este uniform convergentă pe* $A \subseteq \mathbf{R}$), *compactă, în timp ce seria modulelor este convergentă însă nu este uniform convergentă.*

Soluție. Fie $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbf{R}$. Evident $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ și deoarece $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{N}$, rezultă (T. 12.1.13.) că $f_n \xrightarrow[A]{u} 0$, deci (T. 12.2.18. Cor. 4) seria $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n f_n$ este uniform convergentă pe A.

Pentru partea a doua v. Ex. 12.2.2.

12.2.5. Exercițiu. *Să se arate că seriile de funcții* 1° $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} x^n$, $x \in (0,1)$; 2° $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$, $x \in \mathbf{R}_+$; 3° $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \sin^n x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; *sînt uniform convergente pe fiehare mulțime compactă inclusă în mulțimea de convergență.*

Soluție. Aplicăm T. 12.1.13, și T. 12.2.18. Cor. 4, ținînd cont că următoarele șiruri de funcții sînt monoton descrescătoare și converg punctual la 0.

1° $f_n(x) = x^n$, $(\forall)\ x \in (0,1) \wedge n \in \mathbf{N}$.

$2^\circ\ f_n(x) = \dfrac{1}{x+n},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+ \wedge n \in \mathbf{N}.$

$3^\circ\ f_n(x) = \sin^n x,\ (\forall)\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \wedge n \in \mathbf{N}.$

12.2.6. Exerciţiu. *Să se studieze natura seriilor de funcţii* $1^\circ \sum_{n\geqslant 0} x^p e^{-nx},\ x \in \mathbf{R}_+,\ p > 1$; $2^\circ \sum_{n\geqslant 1} x(1-x)^{n-1},\ x \in \mathbf{R}$.

Soluţie. 1° Fie $f_n(x) = x^p e^{-nx},\ x \in \mathbf{R}_+$ cu $p > 1$ fixat. Atunci

$$f_n'(x) = (p - nx)\, x^{p-1} e^{-nx} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{p}{n},$$

deci

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{p^p}{n^p} e^{-p}$$

Evident avem $\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty \sim \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^p}$, deci seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este normal convergentă, $(\forall)\ p > 1$.

2° Seria dată este normal convergentă pe mulţimea $A = \{x;\ |1-x| \leqslant r\}$, $(\forall)\ r \in (0,1)$, deci pe intervalul $[1-r,\ 1+r]$, $(\forall)\ r \in (0,1)$; este divergentă pe mulţimea $B = \{x;\ |1-x| > 1\}$, deci pe mulţimea $\mathbf{R} \setminus [0,\ 2]$). Din P. 12.2.8. Cor. 1 rezultă că seria dată converge simplu şi neuniform pe mulţimea $[0,\ 2)$.

12.2.7. Exerciţiu. *Să se studieze natura seriei de funcţii* $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^k}{1 + x^{2k} n^\alpha}$, $x \in \mathbf{R}_+$, *unde* $k \in \mathbf{N}$ *şi* $\alpha \in \mathbf{R}_+$.

Soluţie. Fie $x \in \mathbf{R}_+$ fixat. Atunci $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^k}{1 + x^{2k} n^\alpha} \sim \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$, deci prima serie este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $0 < \alpha \leqslant 1$.

Aşadar seria dată este simplu convergentă (pe $\mathbf{R}_+$).

Să observăm că $(1 - x^k n^{\alpha/2})^2 \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+$, deci

$$0 < \frac{x^k}{1 + x^{2k} n^\alpha} \leqslant \frac{1}{2n^{\alpha/2}},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+ \wedge n \in \mathbf{N},$$

şi deci pentru $\alpha > 2$ seria dată este normal convergentă (pe $\mathbf{R}_+$).

Mai precis fie $f_n(x) = \dfrac{x^k}{1 + x^{2k} n^\alpha},\ x \in \mathbf{R}_+$. Atunci

$$f_n'(x) = \frac{k x^{k-1}(1 - n^\alpha x^{2k})}{(1 + x^{2k} n^\alpha)^2},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+,$$

deci $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = n^{-\alpha/2k}$, de unde deducem:

$$\sup f_n(\mathbf{R}_+) = \max\{f_n(0+), f_n(n^{-\alpha/2k}), f_n(+\infty)\} = \frac{1}{n^{\alpha/2}}.$$

Prin urmare (P. 12.2.2. (3°)) seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este normal convergentă $\Leftrightarrow \alpha > 2$.

Scanned with OKEN Scanner

12.2.8. Exerciţiu. *Să se arate că seria de funcţii* $\sum_{n\geq 1} e^{-(x-n)^2}$, $x \in [0,1]$ *este normal convergentă şi are suma o funcţie indefinit derivabilă.*

Soluţie. Deoarece $e^{-(n-x)^2} = e^{-x^2} \cdot e^{2nx-n^2}$ $(\forall)$ $x \in [0,1]$, iar funcţia $x \mapsto e^{-x^2}$, $x \in [0,1]$ este indefinit derivabilă, cu fiecare derivată mărginită, este suficient să studiem seria de funcţii $\sum_{n\geq 1} e^{2nx-n^2}$, $x \in [0,1]$.

Fixăm $n \in \mathbf{N}$ şi fie $f_n(x) = e^{2nx^2-n^2}$, $x \in [0,1]$. Atunci

$$f_n^{(k)}(x) = (2n)^k e^{2nx-n^2}, \quad (\forall)\ k \geq 0 \wedge x \in [0,1],$$

deci

$$0 < f_n^{(k)}(x) \leq (2n)^k e^{2n-n^2}, \quad (\forall)\ k \geq 0 \wedge x \in [0,1]$$

Însă cf. criteriul lui Cauchy (T. 12.2.10.) rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} (2n)^k e^{2n-n^2}$ este convergentă, deci seria $\sum_{n\geq 1} f_n^{(k)}$ este normal convergentă $(\forall)$ $k \geq 0$ şi deci (T. 12.2.16. Cor. 1) suma seriei $\sum_{n\geq 1} f_n$ este o funcţie indefinit derivabilă.

12.2.9. Exerciţiu. *Să se arate că seria de funcţii* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^2+n^4}$, $x \in \mathbf{R}$, *este normal convergentă; fie* f *suma sa. Să se calculeze* $\int_0^\infty f$.

Soluţie. Seria dată este normal convergentă fiind majorată de seria numerică convergentă $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$. Deci putem integra termen cu termen pe intervalul $[0, x]$ $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$:

$$\int_0^x f = \sum_{n\geq 1} \int_0^x \frac{dt}{t^2+n^4} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n^2}$$

Seria obţinută fiind normal convergentă putem inversa $\sum$ cu limita şi avem

$$\int_0^\infty f = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f = \lim_{x\to\infty} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Se cunoaşte însă relaţia $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, deci $\int_0^\infty f = \frac{\pi^3}{12}$.

12.2.10. Exerciţiu. *Să se calculeze suma seriei numerice* $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

Soluţie. Fie $f_n(x) = \cos^{2n} x$, dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi $f_n(0) = 0$. Evident avem $f_n(x) \searrow 0$, $(\forall)$ $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, deci seria $\sum_{n\geq 0} (-1)^n f_n$ este uniform convergentă (T. 12.2.18. Cor. 4) şi are suma o funcţie f definită astfel: $f(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}$, dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi $f(0) = 0$. Deoarece f şi f_n sînt integrabile avem (T.12.2.15.):

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Modificînd valoarea funcției într-un punct, integrala nu se schimbă, deci (9.4.1.Exemplul 11) avem :

$$\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{d(\operatorname{tg} x)}{1+2\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Atunci relația (1) se transcrie :

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Se amplifică cu $-\frac{2}{\pi}$ și se obține suma seriei date.

12.2.11. Exercițiu. *Să se determine mulțimea de convergență a seriei de funcții* $\sum_{n\geq 1} n\cos^{n-1} x$, $x \in \mathbf{R}$, *apoi să se calculeze suma sa.*

Soluție. Deoarece funcția cos este periodică, este suficient să presupunem că $x \in [0, 2\pi)$. Dacă $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$, cos x este 1,0 sau -1 și natura seriei se deduce imediat prin înlocuirea lui x.

Fie $A = [0, 2\pi) \setminus \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ și să considerăm seria $\sum_{n\geq 1} \cos^n x$, $x \in A$. Pentru $0 < \delta < \pi$ fixat există $0 < q < 1$ a.î. $|\cos x| \leq q$ $(\forall)$ $x \in B := (\delta, \pi - \delta) \cup (\pi + \delta, 2\pi - \delta)$. Atunci seria de funcții $\sum_{n\geq 1} \cos^n x$, $x \in A$ (resp. $\sum_{n\geq 1} (\cos^n x)$, $x \in A$) este normal convergentă pe B, fiind majorată pe B de seria geometrică $\sum_{n\geq 1} q^n$ (resp. de seria $\sum_{n\geq 1} nq^n$) deci (T.12.2.16.) o putem deriva termen cu termen și avem :

$$\sum_{n\geq 1} -n\cos^{n-1} x \sin x = \left(\sum_{n\geq 1} \cos^n x\right)' = \left(\frac{\cos x}{1-\cos x}\right)' = \frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2},$$

deci

$$\sum_{n\geq 1} n\cos^{n-1} x = \frac{1}{(1-\cos x)^2}, \quad (\forall)\ x \in B \tag{1}$$

Cum $\delta > 0$ a fost arbitrar, putem înlocui în (1) pe B cu A.

12.2.12. Exercițiu. *Fie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *și* $\sum_{n\geq 1} b_n$ *două serii numerice absolut convergente. Atunci există* $x_0 \in (0, 2\pi)$ *a.î.* $\sum_{n\geq 1} (a_n \cos n x_0 + b_n \sin n x_0) = 0$

Soluție. Fie funcția $f(x) = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx\right)$, $x \in [0, 2\pi]$.

Evident seria care definește pe f, ca și seria derivatelor sale, este uniform convergentă, deci putem deriva termen cu termen și obținem :

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),\ (\forall)\ x \in [0, 2\pi].$$

Cum $f(0) = f(2\pi) = \sum_{n\geq 1} \left(-\frac{b_n}{n}\right)$, cf. T.6.3.2. există $x_0 \in (0, 2\pi)$ a.î. $f'(x_0) = 0$, deci $\sum_{n\geq 1} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Corolar 1. $(\forall)\ p > 1$ *există* $x_0 \in (0, 2\pi)$ *a.î.* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p} \cos nx_0 + \sin nx_0) = 0$.

12.2.13. Exerciţiu. *Să se arate că seria de funcţii* $\sum_{n\geq 1} \frac{nx - [nx]}{2^n}$ *este normal convergentă pe* $\mathbf{R}$ *şi are suma o funcţie continuă pe* $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Soluţie. Fie funcţiile $\varphi(x) = x - [x]$, $x \in \mathbf{R}$; $\varphi_n(x) = \varphi(nx)$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, φ este periodică de perioadă 1 şi φ este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, deci $0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1$ şi φ_n este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \frac{1}{n}\mathbf{Z}$. Cum $\bigcup_{n\in N} \frac{1}{n}\mathbf{Z} = \mathbf{Q}$, rezultă că φ_n este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Evident $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\varphi_n}{2^n} \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n}$, deci seria dată este normal convergentă pe $\mathbf{R}$ şi deoarece φ_n este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deducem (T.12.2.13.) că suma sa este o funcţie continuă pe $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Observaţie. În loc de φ putem considera o funcţie periodică arbitrară de perioadă 1 care este continuă şi mărginită pe (0,1).

12.2.14. Exerciţiu. *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir absolut convergent* (*i.e.* $\sum_{n\geqslant 1} |a_{n+1} - a_n| < +\infty$) *de elemente din* $\mathbf{K}$, *care are limita* 0. *Atunci seriile* $\sum_{n\geqslant 1} a_n \cos nx$ *şi* $\sum_{n\geqslant 1} a_n \sin nx$ *sînt uniform convergente pe orice mulţime compactă* $A \subseteq (0, 2\pi)$.

Soluţie. Fie $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos kx$. Atunci (P.4.1.11.):

$$s_n(x) = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{n+1}{2} x,\ (\forall)\ x \in (0, 2\pi),$$

deci

$$|s_n(x)| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|},\ (\forall)\ x \in (0, 2\pi).$$

Mulţimea $A \subseteq (0, 2\pi)$ fiind compactă şi funcţia $x \mapsto \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$, $x \in (0, 2\pi)$ continuă, există $x_0 \in A$ un punct în care îşi atinge maximul. Atunci avem:

$$|s_n(x)| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x_0}{2}\right|},\ (\forall)\quad x \in A \text{ şi } n \geqslant 1,$$

deci (T. 12.2.18.) seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n \cos nx$ este uniform convergentă pe A.

Raţionament analog pentru a doua serie.

Corolar 1. *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *două şiruri absolut convergente de elemente din* $\mathbf{K}$, *care au limita* 0. *Atunci seria* $\sum_{n\geqslant 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, $x \in (0, 2\pi)$, *este uniform convergentă pe orice mulţime compactă* $A \subseteq (0, 2\pi)$, *deci este simplu convergentă pe* $(0,2\pi)$ *şi are suma o funcţie continuă.*

Corolar 2. *Seriile de funcţi* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \cos nx$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \sin nx$ *sînt simplu convergente pe* $(0,2\pi)$ *şi suma fiecăreia este o funcţie continuă.*

Scanned with OKEN Scanner

12.2.15. Exerciţiu. *Fie* $X \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime compactă şi* $\sum_{n\leq 1} f_n (f_n \in \mathcal{F}(X), n \geq 1)$ *o serie de funcţii continui cu valori reale nenegative. Dacă seria* $\sum_{n\leq 1} f_n$ *este simplu convergentă şi suma ei este continuă, atunci ea este uniform convergentă.*

Soluţie. Fie $s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \ (n \geq 1)$. Evident $(s_n)_{n\leq 1}$ este un şir monoton crescător de funcţii continui, care converge simplu la o funcţie continuă. Atunci (T.12.2.13.) $(s_n)_{n\geq 1}$ este uniform convergent, deci $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă.

12.2.16. Exerciţiu. *Fie* $X \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime şi* $f_n \in \mathcal{F}(X) \ (n \geq 1)$ *un şir echimărginit de funcţii. Atunci seria* $\sum_{n\geq 1} \frac{f_n}{n^\alpha}$ *este normal convergentă* $(\forall)\ \alpha > 1$.

Soluţie. Şirul $(f_n)_{n\geq 1}$ fiind echimărginit, există $\mathbf{M} > 0$ a.î. $|f_n(x)| \leq M (\forall)\ x \in X$ şi $n \geq 1$. Atunci seria $\sum_{n\geq 1} \frac{f_n}{n^\alpha}$ este majorată de seria numerică convergentă $\sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^\alpha}$, deci este normal convergentă.

Corolar 1. *Seriile de funcţii* $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ *şi* $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$, $x \in \mathbf{R}$ *sînt normal convergente pe* $\mathbf{R}$ *şi au suma o funcţie de clasă* C^k, *dacă* $\alpha > k + 1$.

Soluţie. Este suficient să observăm că seriile de funcţii $\sum_{n\geq 1} \frac{(\sin nx)^{(i)}}{n^\alpha}$ şi $\sum_{n\geq 1} \frac{(\cos nx)^{(i)}}{n^\alpha}$ sînt normal convergente pentru $i = \overline{0, k}$.

Corolar 2 *Seriile de funcţii* $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin a_n x}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos a_n x}{n^2}$, $x \in \mathbf{R}$ *sînt normal convergente pe* $\mathbf{R}$, *pentru* $a_n \in \mathbf{R}$ $(n \geq 1)$ *arbitrare.*

12.2.17. Exerciţiu. *Fie* $\sum_{n\geq 1} f_n$, $f_n \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$, *o serie uniform convergentă de funcţii mărginite. Atunci şirul* $(f_n)_{n\geq 1}$ *este echimărginit.*

Soluţie. Seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ fiind uniform convergentă, rezultă (P. 12.2.4.) că şirul $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniform la 0. Cum fiecare funcţie $f_n (n \geq 1)$ este mărginită, rezultă (P. 12.1.4.) că şirul $(f_n)_{n\geq 1}$ este echimărginit.

Corolar 1. *Fie* $\sum_{n\geq 1} f_n$, $f_n \in \mathcal{F}(X)$ *o serie mormal convergentă de funcţii. Atunci şirul* $(f_n)_{n\geq 1}$ *este echimărginit.*

12.2.18. Exerciţiu. *Fie* $f, f_n \in \mathcal{F}(X) \ (n \geq 1)$ *un şir de funcţii. Atunci :*

1° *Dacă* $\sup_{x\in A} |f(x)| < +\infty$ *şi seria* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *este uniform (resp. normal) convergentă pe* A, *rezultă că seria* $\sum_{n\geq 1} f f_n$ *este uniform (resp. normal) convergentă pe* A.

2° *Dacă* $\inf_{x\in A} |f(x)| > 0$ *şi seria* $\sum_{n\geq 1} f f_n$ *este uniform (resp. normal) convergentă pe* A, *rezultă că seria* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *este uniform (resp. normal) convergentă pe* A.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. 1° Fie $\varepsilon > 0$ și $M = \sup_{x \in A} |f(x)| < +\infty$. Atunci $(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î. $\left| \sum_{i=n}^{n+p} f_i(x) \right| \leqslant \varepsilon/M$, $(\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$, $p \geqslant 1 \wedge x \in A$,

deci

$$\left| \sum_{i=n}^{n+p} f(x) f_i(x) \right| \leqslant M \cdot \varepsilon/M = \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon,\ p \geqslant 1 \wedge x \in A$$

și deci seria $\sum_{n \geqslant 1} f f_n$ este uniform convergentă pe A.

2° Fie $\varepsilon > 0$ și $m = \inf_{x \in A} |f(x)| > 0$. Atunci $(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î.

$$\left| \sum_{i=n}^{n+p} f(x) f_i(x) \right| \leqslant m\varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon, p \geqslant 1 \wedge x \in A,$$

deci

$$m \left| \sum_{i=n}^{n+p} f_i(x) \right| \leqslant m\varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon,\ p \geqslant 1 \wedge x \in A$$

și deci seria $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ este uniform convergentă pe A.

12.2.19. Exercițiu. *Fie $f_n \in \mathcal{F}(X)$ $(n \geqslant 1)$ un șir de funcții.* ***Dacă seria*** $\sum_{n \geqslant 1} |f_{n+1} - f_n|$ *este uniform convergentă, atunci șirul $(f_n)_{n \geqslant 1}$ este uniform convergent.*

Soluție. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Seria $\sum_{n \geqslant 1} |f_{n+1} - f_n|$ fiind uniform convergentă există $n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î.

$$\sum_{k=n}^{n+p} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ x \in X,\ n \geqslant n_\varepsilon \wedge p \geqslant 1$$

Însă

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|,$$

deci

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ x \in X,\ n \geqslant n_\varepsilon \wedge p \geqslant 1$$

și deci $(f_n)_{n \geqslant 1}$ este uniform convergentă.

Observație. Afirmația reciprocă nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu. $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $(\forall)\ x \in X$ și $n \geqslant 1$. Atunci $f_n \xrightarrow{u} 0$ și $\sum_{n \geqslant 1} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$ este divergentă $(\forall)\ x \in X$.

12.2.20. Exercițiu. *Fie $f_n \in \mathcal{F}(X)$ $(n \geqslant 1)$ un șir de funcții. Dacă $(f_n)_{n \geqslant 1}$ este uniform convergent, el posedă un subșir $(f_{n_k})_{k \geqslant 1}$ a.î. seria $\sum_{k \geqslant 1} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ este normal convergentă.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ un șir din $\mathbf{R}_+$ cu proprietatea că seria $\sum_{k\geq 1}\varepsilon_k$ este convergentă.

Ptr. $\varepsilon_1(\exists)\, n_1 \geq 1$ a.î. $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon_1(\forall)\ x \in X,\ n, m \geq n_1$

Ptr. $\varepsilon_2(\exists)\, n_2 \geq n_1$ a.î. $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon_2(\forall)\ x \in X,\ n, m \geq n_2$

. . . . . .

Ptr. $\varepsilon_k(\exists)\, n_k \geq n_{k-1}$ a.î. $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon_k(\forall)\ x \in X,\ n, m \geq n_k$

. . . . . .

De aici deducem că

$$|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq \varepsilon_k(\forall)\ \ x \in X \wedge k \geq 1$$

deci seria $\sum_{k\geq 1} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ este normal convergentă.

12.2.21. Exercițiu. *Fie* $\sum_{n\geq 1} f_n (f_n \in \mathcal{F}(X),\ (n \geq 1))$ *o serie uniform convergentă. Atunci există* $n_k \in \mathbf{N}$, $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ *a.î. seria următoare* $\sum_{k\geq 1}(f_{n_k+1} + f_{n_k+2} + \ldots + f_{n_{k+1}})$ *este normal convergentă.*

Soluție. Fie $\varepsilon_k > 0 (k \geq 1)$ cu proprietatea că $\sum_{k\geq 1} \varepsilon_k < +\infty$.

Aplicînd succesiv T. 12.2.10. deducem:

Pentru $\varepsilon_1(\exists) n_1 \geq 1$ a.î. $|f_n + f_{n+1} + \ldots + f_{n+p}| \leq \varepsilon_1,\ n > n_1,\ p \geq 1$

Pentru $\varepsilon_2(\exists)\, n_2 > n_1$ a.î. $|f_n + f_{n+1} + \ldots + f_{n+p}| \leq \varepsilon_2,\ n > n_2,\ p \geq 1,$

Pentru $\varepsilon_k(\exists)\, n_k > n_{k-1}$ a.î. $|f_n + f_{n+1} + \ldots + f_{n+p}| \leq \varepsilon_k,\ n > n_k\ \ p \geq 1$

. . . . . .

Evident avem:

$$|f_{n_k+1} + f_{n_k+2} + \ldots + f_{n_{k+1}}| \leq \varepsilon_k,\ (\forall)\ k \geq 1,$$

deci seria $\sum_{k\geq 1} (f_{n_k+1} + f_{n_k+2} + \ldots + f_{n_{k+1}})$ este normal convergentă

12.2.22. Exercițiu. *Să se arate că* $(\forall)\ a \in \mathbf{K}$, $|a| < 1$, *seriile de funcții* $\sum_{n\geq 1} a^n \sin nx$, $\sum_{n\geq 1} a^n \cos nx$ *sînt convergente și au suma o funcție de clasă* $\mathcal{C}^\infty$.

Ind. Dacă $f_n(x) = a^n \sin nx$, $x \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{N}$, atunci

$$f_n'(x) = n\, a^n \cos nx,\ f''(x) = -n^2 a^n \sin nx,\ \ldots\ldots$$

Prin urmare seriile de funcții $\sum_{n\geq 1} f_n$, $\sum_{n\geq 1} f_n'$, $\sum_{n\geq 1} f_n''$, ... sînt normal convergente, fiind majorate de seriile numerice convergente $\sum_{n\geq 1} |a|^n$, $\sum_{n\geq 1} n|a|^n$, $\sum_{n\geq 1} n^2 |a|^n$, ... respectiv.

12.2.23. Exercițiu. *Să se studieze natura seriilor de funcții*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^n x}{n^p},\ x \in \mathbf{R};\quad \sum_{n\geq 1} \frac{\cos^n x}{n^p},\ x \in \mathbf{R}\ (p \in \mathbf{R}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Ind. Studiem prima serie; funcția sin fiind periodică este suficient să o studiem pe intervalul $[0, 2\pi)$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\sin^n x}{n^p}\right|} = |\sin x|$, seria dată este simplu convergentă pe $[0, 2\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$,

Dacă $x = \frac{\pi}{2}$, avem $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p}$, deci conv. $(\forall)\ p > 1$ și div. $(\forall)\ p \leqslant 1$.

Dacă $x = \frac{3\pi}{2}$, avem $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^p}$, deci conv. $(\forall)\ p > 0$ și div. $(\forall)\ p \leqslant 0$.

12.2.24. Exercițiu. *Să se studieze natura seriei de funcții*

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{x}{1+nx} - \frac{1}{1+(n-1)x}\right),\ x \in \mathbf{R}_+.$$

Ind. $s_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x}{1+nx} - \frac{x}{1+(n-1)x}\right) = \frac{x}{1+nx} \to -x\ (n\to\infty)$

$$0 < \frac{x}{1+nx} < \frac{1}{n},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+ \Rightarrow s_n \xrightarrow{u} -1_{\mathbf{R}_+}$$

Seria dată este uniform convergentă.

12.2.25. Exercițiu. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție de clasă $\mathcal{C}^\infty$. Știind că seria $\sum\limits_{n\geqslant 1} f^{(n)}$ este uniform convergentă, să se determine suma sa.*

Ind. Fie φ suma seriei date. Deoarece seria $\sum\limits_{n\geqslant 0} (f^{(n)})'$ este uniform convergentă, avem (T.12.2.16.):

$$\varphi' = \sum_{n\geqslant 0} (f^{(n)})' = \sum_{n\geqslant 1} f^{(n)} = \varphi - f$$

Deducem φ din ecuația diferențială: $\varphi' - \varphi + f = 0$.

12.2.26. Exercițiu. *Seria de funcții $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$, $x \in \mathbf{R}_+^*$, este divergentă pe $(0, 1]$, converge simplu și neuniform pe $(1, \infty)$ și converge uniform pe $[a, \infty)$, $(\forall)\ a > 1$.*

Ind. 1° Fie $0 < x < 1$ fixat. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} nx^n = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx} = \infty$ și deci seria dată este divergentă în x.

2° Dacă $x = 1$, atunci $\frac{\ln(1+n)}{n} > \frac{1}{n}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ etc.

3° Deoarece $\ln(1+nx) < nx$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+$, avem:

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n} \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a^{n-1}},\ (\forall)\ x \geqslant a$$

Scanned with OKEN Scanner

Seria dată nu este uniform convergentă pe $(1, \infty)$, deoarece avem :

$$\sup_{n>1} \sum_{k=n}^{n+p} \frac{\ln(1+kx)}{kx^k} > \sum_{k=n}^{n+p} \frac{\ln(1+k)}{k} \geqslant \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k}.$$

şi aplicăm mai departe criteriul lui Cauchy (T.12.2.10 .)

12.2.27. Exerciţiu. *Fie X o mulţime, $f \in \mathcal{F}(X)$ o funcţie arbitrară. Atunci seria* $\sum_{n>1} \frac{1}{n^\alpha + |f|^n}$ *este normal convergentă,* $(\forall)\ \alpha > 1$.

Ind. Seria dată este majorată de seria numerică $\sum_{n>1} \frac{1}{n^\alpha}$

12.2.28. Exerciţiu. *Să se construiască o serie uniform convergentă de funcţii* $\sum_{n>1} f_n (f_n \in \mathcal{F}(\mathbf{R}), (n \geqslant 1))$, *care nu este absolut convergentă în nici un punct* $x \in \mathbf{R}$.

Ind. Fie $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{|x| + n}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ şi $n \in \mathbf{N}$. Atunci $\sum_{n>1} f_n$ este uniform convergentă $\left(\frac{1}{|x|+n+1} < \frac{1}{|x|+n}, (\forall)\ x \in \mathbf{R} \text{ şi } n \in \mathbf{N}\ ; \frac{1}{|x|+n} < \frac{1}{n} \to 0\right)$ şi $\sum_{n>1} |f_n(x)| \sim \sum_{n>1} \frac{1}{n}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

12.2.29. Exerciţiu. *Să se construiască o serie normal convergentă, deci uniform convergentă, de funcţii discontinui în fiecare punct* $\sum_{n>1} f_n$, $(f_n \in \mathcal{F}(\mathbf{R}), (n \geqslant 1))$, *care are suma o funcţie continuă (resp. discontinuă) în fiecare punct.*

Ind. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcţia lui Dirichlet ; $f_0 := -f$ şi $f_n := \frac{f}{n(n+1)}$ $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Atunci f_n este discontinuă pe, $\mathbf{R}$ $(\forall)\ n \geqslant 0$, $\sum_{n>0} f_n \ll \sum_{n>1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n>0} f_n = 0$ $\left(\text{deoarece } \sum_{n>1} \frac{1}{n(n+1)} = 1\right)$ şi $\sum_{n>1} f_n = f$.

12.2.30. Exerciţiu. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime. Să se construiască o serie de funcţii* $\sum_{n>1} f_n$ $(f_n \in \mathcal{F}(\mathbf{R}), (n \geqslant 1))$ *care are mulţimea de convergenţă egală cu A.*

Ind. Fie $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel :

$$f_n(x) = \frac{1}{|x| + n^2}, (\forall)\ x \in A \quad \text{şi} \quad f_n(x) = \frac{1}{|x| + n},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus A.$$

Atunci $\sum_{n>1} f_n(x) \sim \sum_{n>1} \frac{1}{n^2}$ $\left(\text{resp. } \sim \sum_{n>1} \frac{1}{n}\right)$, dacă $x \in A$ (resp. $\mathbf{R} \setminus A$)

Corolar 1. *Există serii de funcţii* $\sum_{n>1} f_n$ $(f_n \in \mathcal{F}(\mathbf{R}), (n \geqslant 1))$ *pentru care mulţimea de convergenţă este vidă.*

12.2.31. Exerciţiu. *Fie* $f_n(x) = \underbrace{\sin \sin \ldots \sin}_{n\text{-ori}} x$, $x \in \mathbf{R}$. *Să se studieze natura seriei de funcţii* $\sum_{n>1} f_n$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție 1) Dacă $x \in \pi\mathbf{Z}$, avem $\sin x = 0$, deci $f_n(x) = 0$ $(\forall)$ $n \geqslant 1$ și deci seria dată este convergentă.

2) Fie $x \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$ fixat. Evident $\sin x \in [-1, 1] \subseteq \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Presupunem că $\sin x > 0$ și fie $k \geqslant 1$ a.î. $\sin x \geqslant \frac{1}{k}$. Vom arăta prin inducție relativ la n inegalitatea $f_n(x) \geqslant \frac{1}{kn}$ $(\forall)$ $n \geqslant 1$. (1)

Pentru $n = 1$ inegalitatea este evidentă și fie $n \geqslant 1$ cu $f_n(x) \geqslant \frac{1}{kn}$. Atunci ținînd seama că funcția sin este strict crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și utilizînd inegalitatea $\sin x \geqslant \frac{x}{1+x}$, $(\forall)$ $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, obținem :

$$f_{n+1}(x) \geqslant \sin\frac{1}{kn} \geqslant \frac{\frac{1}{kn}}{1+\frac{1}{kn}} = \frac{1}{kn+1} \geqslant \frac{1}{k(n+1)},$$

prin urmare $f_n(x) \geqslant \frac{1}{kn}$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$. Inegalitatea (1) este arătată.

Atunci

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \geqslant \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \to \infty \Leftrightarrow \sum_{n\geqslant 1} f_n(x) = \infty.$$

Dacă $\sin x < 0$, avem $\sin(-x) > 0$, deci $f_n(x) = -f_n(-x)$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$ și deci $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x) = -\infty$.

12.2.32. Exercițiu. *Fie $f_n \in \mathcal{F}([a, b])$ $(n \geqslant 1)$ un șir de funcții monotone. Dacă seriile $\sum_{n\geqslant 1} |f_n(a)|$ și $\sum_{n\geqslant 1} |f_n(b)|$ sînt absolut convergente, atunci seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este normal convergentă.*

Soluție. f_n fiind monotonă rezultă

$$|f_n(x)| \leqslant \max\{|f_n(a)|, |f_n(b)|\} \leqslant |f_n(a)| + |f_n(x)|, \ (\forall)\ x \in [a, b],$$

deci seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este majorată de seria numerică convergentă $\sum_{n\geqslant 1}(|f_n(a)| + |f_n(a)|)$ și deci este normal convergentă.

12.2.33. Exercițiu. *Să se studieze natura seriei de funcții $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{1+|x|^n}$, $x \in \mathbf{R}$*

Soluție. Fie $0 < c < 1$ fixat. Deoarece seria $\sum_{n\geqslant 0} c^n$ este convergentă și $\frac{|x^n|}{1+|x|^n} \leqslant c^n$, $(\forall)$ $|x| \leqslant c$, rezultă că seria dată este normal convergentă pe $[-c, c]$. De aici rezultă că seria dată este absolut convergentă pe $(-1, 1)$.

În fine, șirul $\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)_{n\geq 1}$ are limita 1, dacă $x \geqslant 1$ și nu are limită, dacă $x \leqslant -1$, prin urmare seria dată este divergentă pe $\mathbf{R}\setminus(-1,1)$.

12.2.34. Exercițiu. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f_n \in \mathcal{F}(I)$ $(n \geqslant 1)$ un șir de funcții convexe. Atunci 1° Dacă $f_n \xrightarrow{s} f$ rezultă că f este convexă; 2° Dacă seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este punctual convergentă rezultă că suma sa este o funcție convexă.*

Ind. $(\forall)$ $x, y \in I$ și $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ avem:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} (\lambda f_n(x) + (1-\lambda) f_n(y)) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \text{etc.}$$

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f_n \in \mathcal{F}(I)$ $(n \geqslant 1)$ un șir de funcții derivabile cu $f'' \geqslant 0$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$. Dacă $f_n \xrightarrow{s} f$, atunci f este convexă.*

12.2.35. Exercițiu. *Să se studieze natura seriei de funcții $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{x^n}$, $x \in \mathbf{R}^*$.*

Soluție. Punem $t = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$ și obținem seria $\sum_{n\geq 1} nt^n$, $t \in \mathbf{R}^*$ care este evident simplu convergentă pe mulțime $(-1,1)\setminus\{0\}$ și normal convergentă pe mulțimea $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]\setminus\{0\}$, $(\forall)$ $\varepsilon \in (0,1)$. Așadar seria dată $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{x^n}$ este simplu convergentă pe mulțimea $\left\{x;\ 0 < \left|\frac{1}{x}\right| < 1\right\}$ adică pe mulțimea $\mathbf{R}\setminus[-1,1]$ și este normal convergentă pe mulțimea $\left\{x;\ 0 < \left|\frac{1}{x}\right| < 1-\varepsilon\right\}$, $(\forall)$ $\varepsilon \in (0,1)$, adică pe mulțimea $\{x;\ |x| > 1+\eta\}$, $(\forall)$ $\eta \in \mathbf{R}_+^*$.

12.3. Serii de puteri

12.3.1. Exercițiu. *Să se calculeze raza de convergență pentru următoarele serii de puteri:* $\sum_{n\geq 0} \frac{nx^n}{2^n}$; $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!}$; $\sum_{n\geq 1} x^{n!}$; $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{2n}$; $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$, *unde* $a_{2n} = \frac{1}{n}$ *și* $a_{2n-1} = \frac{1}{2^{n+1}}$ $n \geqslant 1$; $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$, *unde* $a_{2n} = (-1)^n$ *și* $a_{2n+1} = \ln n$; $\sum_{n\geq 1} 2^{n^2} x^{n^2}$; $\sum_{n\geq 1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n^2} x^n$.

Soluție. 1° Considerăm seria $\sum_{n\geq 1} \frac{nx^n}{2^n}$. Aici $a_n = \frac{n}{2^n}$, deci $\omega = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt[n]{n} = \frac{1}{2}$ și deci raza de convergență este 2.

2° Considerăm seria $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!}$. Aici $a_n = \frac{1}{n!}$, deci $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$ și deci raza de convergență este ∞.

Scanned with OKEN Scanner

3° Considerăm seria $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$, unde $a_{2n} = \frac{1}{n}$ și $a_{2n-1} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Atunci

$$(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\geq 1} = (\sqrt[2n]{|a_{2n}|})_{n\geq 1} \cup (\sqrt[2n-1]{|a_{2n-1}|})_{n\geq 1} = \left(\sqrt[2n]{\frac{1}{n}}\right)_{n\geq 1} \cup \left(\sqrt[2n-1]{\frac{1}{2^{n+1}}}\right)_{n\geq 1}.$$

Cum $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{n}} = 1$ și $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{2^{n+1}} = \sqrt{2}$, rezultă (T. 12.3.5) :

$$\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \max\left\{1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = 1 \Leftrightarrow \rho = 1.$$

12.3.2. Exercițiu. *Să se arate, fără a utiliza teoremele* 12.3.4. — 12.3.5., *că seria de puteri* $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ *posedă proprietățile* :

1° *are raza de convergență* 1, $(\forall)$ $\alpha \in \mathbf{R}$;

2° *este normal convergentă pe* $B[0, 1]$, $(\forall)$ $\alpha > 1$;

3° *dacă* $0 < \alpha \leqslant 1$, *atunci* : (i) *este convergentă în* $x = -1$ *și divergentă în* $x = 1$, (ii) *este normal convergentă pe* $B[0, r]$, $(\forall)$ $0 < r < 1$ *și* (iii) *nu este uniform convergentă pe* $B(0, 1)$.

Soluție. 1° Fie ρ raza de convergență. În punctul $x = 1$ seria dată este convergentă, deci $\rho \geqslant 1$. Dacă $x_0 > 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{x_0^n}{\alpha^\alpha} = +\infty$, deci $\sum_{n\geq 1} \frac{x_0^n}{n^\alpha}$ este divergentă și deci $\rho \leqslant x_0$. Cum $x_0 > 1$ a fost arbitrar, deducem că $\rho \leqslant 1$ deci $\rho = 1$.

2° Avem $\left|\frac{x^n}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$, $(\forall)$ $x \in B[0, 1]$ și $n \geqslant 1$. Cum seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă, rezultă că seria dată este normal convergentă pe $B[0,1]$.

3° (ii) Avem $\left|\frac{x^n}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{r^n}{n^\alpha}$, $(\forall)$ $x \in B[0, r]$ și $n \geqslant 1$. Cum seria $\sum_{n\geq 1} \frac{r^n}{n^\alpha}$ este convergentă (T.3.2.7.), rezultă că seria dată este normal convergentă pe $B[0, r]$.

3° (iii) Presupunem că seria dată ar fi uniform convergentă pe $B(0, 1)$ și fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)$ $n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î.

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} \frac{x^k}{k^\alpha}\right| \leqslant \varepsilon, \quad (\forall) \quad x \in B(0, 1), \quad n \geqslant n \wedge p \geqslant 1 \tag{1}$$

Fixăm $n \geqslant n_\varepsilon$ și $p \geqslant 1$ și trecem la limită în (1) după x, $x \to 1$; obținem :

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k^\alpha}\right| \leqslant \varepsilon, \quad (\forall) \quad n \geqslant n_\varepsilon \wedge p \geqslant 1$$

Aceasta contrazice faptul că seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă.

12.3.3. Exercițiu. *Să se calculeze raza de convergență și suma seriei de puteri* $\sum_{n\geq 1} n^2 x^{n-1}$, $|x| < 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n-1]{n^2}=1$, raza de convergență este 1; fie s suma seriei date. Să considerăm seria $\sum\limits_{n\geq 1} x^n$, care are raza de convergență 1; fie σ suma sa. Atunci (P.12.3.7.):

$$\sigma'(x)=\sum_{n\geq 1} nx^{n-1},\quad |x|<1,$$

deci

$$x\sigma'(x)=\sum_{n\geq 1} nx^n,\ |x|<1$$

și deci

$$x\sigma''(x)+\sigma'(x)=\sum_{n\geq 1} n^2x^{n-1}=s(x),\quad |x|<1.$$

Cum însă $\sigma(x)=\dfrac{x}{1-x}$, $|x|<1$ avem:

$$\sigma'(x)=\frac{1}{(1-x)^2},\quad \sigma''(x)=\frac{1}{(1-x)^3},\quad |x|<1,$$

prin urmare

$$s(x)=\frac{x}{(1-x)^3}+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{(1-x)^3},\quad |x|<1.$$

Corolar 1. *Pentru* $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$, $|x|<1$, *avem relațiile*:

$$\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right),\quad \sum_{n\geq 1} n^2x^{n-1}=\frac{d}{dx}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right),\ldots.$$

12.3.4 Exerciţiu. *Să se determine suma seriilor de puteri*:

$1^\circ\ \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$, $|x|<1$; $2^\circ\ \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $|x|<1$; $3^\circ\ \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{x^{4n-1}}{4n-1}$, $|x|<1$.

Soluție. 1° Fie $|x|<1$ fixat, spre exemplu $x>0$. Seria $\sum\limits_{n\geq 0} t^n$, $t\in\mathbf{R}$ fiind normal convergentă pe intervalul $[0, x]$, avem (P. 12.3.8.):

$$\sum_{n\geq 0}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t},$$

deci

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\qquad (1)$$

Repetînd procedeul se obține:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t=-\int_0^x\ln(1-t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=(1-x)\ln(1-x)+x\qquad (2)$$

Se împarte mai departe la x.

Scanned with OKEN Scanner

2° Seria $\sum_{n\geq 1} t^{2n-2}$, $t \in \mathbf{R}$ fiind normal convergentă pe $[0, x]$, dacă $|x| < 1$, avem :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n\geq 1} \int_0^x t^{2n-2}\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}.$$

3° Seria $\sum_{n\geq 1} t^{4n-3}$, $t \in \mathbf{R}$ fiind normal convergentă pe $[0, x]$, dacă $|x|<1$, avem :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^{4n-1}}{4n-1} = \sum_{n\geq 1} \int_0^x t^{4n-2}\,dt = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^4}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \text{ etc.}$$

Corolar 1.

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} = 2\ln 2 - 1.$$

Soluție. Seriile (1) și (2) din Ex. 12.3.4. satisfac condițiile din T.12.3.11. pentru $x_0 = -1$, deci putem trece la limită cu x către -1.

12.3.5. Exercițiu. *Să se determine suma seriei de puteri* $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$, $|x|<1$

Soluție. Fie $x \in (-1, 1)$ fixat, spre exemplu $x > 0$. Considerăm seria de puteri $\sum_{n\geq 1} t^{4n-4}$ care are raza de convergență 1, deci este normal convergentă pe intervalul $[0, x] \subseteq (-1, 1)$ și deci poate fi integrată termen cu termen :

$$\sum_{n\geq 1} \int_0^x t^{4n-4}\,dt = \int_0^x \sum_{n\geq 1} t^{4n-4}\,dt$$

Atunci

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^{4n-3}}{4n-3} = \int_0^x \frac{dt}{1-t^4} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1-t^2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

12.3.6. Exercițiu. *Să se determine suma seriei de puteri* $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$, $|x| < 1$.

Soluție. Fie $|x|<1$, fixat, spre exemplu $x>0$. Seria $\sum_{n\geq 0} t^n$, $t \in \mathbf{R}$ fiind normal convergentă pe $[0, x]$, avem (P.12.3.8.) :

$$\sum_{n\geq 0} \int_0^x t^n\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

Cum $|x| < 1$ a fost arbitrar obținem că

$$\sum_{n\geq 1} \frac{t^{n-1}}{n} = -\frac{1}{t}\ln(1-t), \quad 0 < |t| < 1 \tag{1}$$

Deoarece $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\ln(1-t) = -1$, putem prelungi prin continuitate în $t = 0$ funcția $t \mapsto \frac{1}{t}\ln(1-t)$, $t \in (0, x]$. Atunci, deoarece seria $\sum_{n\geq 1} \frac{t^{n-1}}{n}$ este normal

convergentă pe $[0, x]$, din (1) obținem :

$$\sum_{n\geqslant 1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{n}\,dt = -\int_0^x \frac{1}{t}\ln(1-t)dt,$$

deci

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n^2} = -\int_0^x \frac{1}{t}\ln(1-t)dt \qquad (2)$$

Corolar 1.

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Soluție. Înlocuim în relația (2) pe x cu 1 și ținem seamă (P.11.3.1. Exemplul 4) din relația $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}$.

12.2.7. Exercițiu. *Fie* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *o serie de puteri și* ρ *raza sade convergență,* $0 < \rho < \infty$. *Atunci seria* $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ *este uniform convergentă pe* $B(0, \rho) \Leftrightarrow \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *este uniform convergentă pe* $B(0, \rho]$.

Ind. Funcțiile $f_n(x) = a_n x^n$, $x \in \mathbf{K}$ fiind continui, putem aplica P.12.2.8. Cor. 1.

Corolar 1. *Fie* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *o serie de puteri și* ρ *raza sa de convergență. Dacă* $(\exists)\ x_0 \in \mathbf{K}$, $|x_0| = \rho$ *a.î. seria* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x_0^n$ *este divergentă, atunci seria dată nu este uniform convergentă pe* $B(0, \rho)$.

12.3.8. Exercițiu. *Fie* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *o serie de puteri care are raza de convergență* ρ. *Dacă* $A \subseteq B(0, \rho)$ *și* A *compactă, atunci seria dată este normal convergentă pe* A.

Soluție. Fie funcția $f(x) = |x|$, $x \in B(0, \rho)$. Cum f este continuă și A este compactă, rezultă că f este mărginită pe A și își atinge marginile (T.5.5.17. Cor 1). Atunci avem :

$$(\exists)\ x_0 \in A \text{ a.î. } f(x) \leqslant f(x_0),\ (\forall)\ x \in A \Leftrightarrow (\exists)\ x_0 \in A \text{ a.î. } |x| \leqslant |x_0|,\ (\forall)\ x \in A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \subseteq B(0, r),\ |x_0| \leqslant r < \rho$$

Însă (T.12.3.4.) seria dată este normal convergentă pe $B(0, r)$ și deci și pe A.

12.3.9. Exercițiu. *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *un șir din* $\mathbf{R}$ *monoton descrescător, care are limita* 0. *Atunci seria de puteri* $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n a_n x^n$ *este uniform convergentă pe intervalul* $[0,1]$.

Soluția 1. Din (T.3.2.6.) rezultă că seria numerică $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n$ este convergentă, deci $\rho \geqslant 1$. Dacă $\rho > 1$, atunci (T.12.3.4.) seria dată este normal convergentă pe mulțimea $B\,[0,1]$, deci în particular pe $[0,1]$. Dacă $\rho = 1$ putem aplica T.12.3.11. Cor. 1.

Soluția 2. Fie $f_n(x) = a_n x^n$, $x \in [0,1]$. Evident $f_{n+1} \leqslant f_n\ (\forall)\ n \geqslant 1$ și $f_n \overset{*}{\to} 0$, deci (T.12.2.18. Cor. 4) seria $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n f_n$ este uniform convergentă, adică seria $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n x^n$ este uniform convergentă.

Scanned with OKEN Scanner

12.3.10. Exerciţiu. *Fie* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *o serie de puteri cu coeficienţi reali care are raza de convergenţă* $\rho > 0$ *şi suma* s. *Atunci :*

1° $\int_0^x s(t)\,dt = \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, $(\forall)$ $x \in (-\rho, \rho)$;

2° *Dacă* $\rho \leqslant 1$ *şi* $a_n \geqslant 0$, $(\forall)$ $n \geqslant 0$ *avem :*

$$\int_0^{-\rho} s(t)\,dt = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^{n+1} \frac{a_n}{n+1} \rho^n.$$

Soluţie. 1° Aplicăm. P. 12.3.8.

2° Să observăm că $x^n = (-1)^n |x|^n$, $(\forall)$ $x \in (-\rho, 0)$. Considerăm funcţiile $f_n(x) = \begin{cases} a_n |x|^n, & x\,(-\rho,\ 0)] \\ 0 & x = -\rho \end{cases}$. Deoarece $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ avem $f_{n+1} \leqslant f_n$, $(\forall)$ $n \geqslant 0$ şi $f_n \overset{s}{\to} 0$, deci (T.12.2.18. Cor. 4) seria $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n f_n$ este uniform convergentă şi deci (T.12.2.15.). poate fi integrată termen cu termen :

$$\int_{-\rho}^0 \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n f_n = \sum_{n\geqslant 0} \int_{-\rho}^0 (-1)^n f_n$$

Modificînd valoarea funcţiilor de integrat în punctul $x = -\rho$, valoarea integralelor nu se schimbă, deci

$$\int_{-\rho}^0 s(t)\,dt = \sum_{n\geqslant 0} \int_{-\rho}^0 a_n t^n\,dt = -\sum_{n\geqslant 0} (-1)^{n+1} \frac{a_n}{n+1} \rho^{n+1}.$$

12.3.11. Exerciţiu. *Fie* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *o serie de puteri cu coeficienţi reali care are raza de convergenţă cu* $0 < \rho < \infty$, *şi suma* s. *Dacă seria dată este convergentă în* $x_0 = \rho$, *atunci avem relaţiile :*

$$1^\circ\ s'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1};\ 2^\circ\ \int_0^x s(t)\,dt = \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \Big\},\ (\forall)\ x \in [0, \rho]$$

Soluţie. Din T.12.3.11. Cor. 1 rezultă că seria dată este uniform convergentă pe intervalul $[0, \rho]$. Funcţiile $f_n(x) = a_n x^n$, $x \in [0, \rho]$, fiind derivabile, deci şi integrabile, putem aplica T.12.2.16. Cor. 1 şi T.12.2.15.

Corolar 1. *Fie* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *o serie de puteri cu coeficienţi reali care are raza de convergenţă* $\rho = 1$ *şi suma* s. *Dacă* (i) $\lim_{x\nearrow 1} s(x)$ *există şi este finită şi* (ii) $\lim_{n\to\infty} n|a_n| = 0$ *atunci avem relaţiile :*

$$1^\circ\ s'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1};\ 2^\circ\ \int_0^x s(t)\,dt = \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \Big\},\ (\forall)\ x \in [0, 1]$$

Soluţie. Din teorema lui Tauber rezultă că seria dată este uniform convergentă pe [0,1]. Continuăm raţionamentul ca mai sus.

12.3.12. Exerciţiu. *Să se calculeze suma seriei de puteri* $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Soluţie. Raza de convergenăţă este 1 ; fie f suma sa. Atunci (P. 12.3.7.) :

$$f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2},\ |x| < 1,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + C = \text{arc tg } x + C, \ |x| < 1.$$

Cum $f(0) = 0$, rezultă $f(x) = \text{arc tg } x$, $|x| < 1$.
Seria dată fiind convergentă în $x = 1$, avem (T.12.3.11) :

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}, \text{ deci } \frac{\pi}{4} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

12.3.13. Exerciţiu. *Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ un polinom. Să se calculeze suma seriei de puteri* $\sum_{n \geqslant 0} P(n) \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbf{R}$.

Soluţie. Scriem P sub forma :

$$P(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t(t-1) + \ldots + c_k t(t-1) \ldots (t-k+1)$$

Atunci

$$\sum_{n \geqslant 0} P(n) \frac{x^n}{n!} = c_0 \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!} + \ldots + c_k \sum_{n \geqslant 0} n(n-1)\ldots(n-k+1) \frac{x^n}{n!} =$$

$$= c_0 \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!} + c_1 x \sum_{n \geqslant 1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + c_k \sum_{n \geqslant k} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$= c_0 e^x + c_1 x e^x + \ldots + c_k x^k e^x.$$

12.3.14. Exerciţiu. *Să se calculeze raza de convergenţă şi suma seriei de puteri* $\sum_{n \geqslant 0} (a + nr) x^n$ $(a, r \in \mathbf{R}^*)$.

Soluţia 1. Deoarece $\lim_{n \to \infty} \frac{|a + (n+1)r|}{|a + nr|} = 1$, rezultă că $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a + nr|} = 1$, deci raza de convergenţă a seriei date este 1.

Fie $s_n = \sum_{k=0}^{n} (a + kr) x^k$. Atunci

$$s_n - x s_n = a + r(x + x^2 + \ldots + x^n) - (a + nr) x^{n+1}$$

şi deoarece $\lim_{n \to \infty} x^n = 0$, pentru $|x| < 1$, deducem :

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \left(a + r \frac{x}{1-x} \right) \frac{1}{1-x}, \ |x| < 1.$$

Soluţia 2. Evident avem :

$$\sum_{k=0}^{n} (a + kr) x^k = a \sum_{k=0}^{n} x^k + rx \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}, \ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Deoarece $\sum_{n \geqslant 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ şi $\sum_{n \geqslant 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ pentru $|x| < 1$, deducem

$$\sum_{n \geqslant 0} (a + nr) x^n = \frac{a}{1-x} + \frac{rx}{(1-x)^2}, \ |x| < 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum în punctul $x = 1$ seria dată este divergentă, din T.12.3.4. rezultă că raza de convergenţă este 1.

12.3.15. Exerciţiu. *Fie* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *o serie de puteri a.î.* $a_0 > 0$, $a_n \geqslant 0$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$ *şi* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_0 + a_1 + \ldots + a_n} = 0$. *Dacă seria dată este divergentă în punctul* $x = 1$, *atunci raza sa de convergenţă este egală cu* 1.

Soluţie. Notăm $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ cu s_n iar razele de convergenţă ale seriilor de puteri $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ şi $\sum_{n\geqslant 0} s_n x^n$ le notăm cu ρ şi ρ' respectiv.

Deoarece seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ este divergentă în punctul $x = 1$, din definiţia razei de convergenţă avem că $\rho \leqslant 1$. Cum $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{s_n} = 0$ există $n_0 \geqslant 1$ a.î. $a_n/s_n \leqslant 1$, $(\forall)$ $n \geqslant n_0$, deci, $(\forall)$ $r \geqslant 0$ seria $\sum_{n\geqslant 0} a_n r^n$ este majorată de seria $\sum_{n\geqslant 0} s_n r^n$. De aici deducem că $\rho \geqslant \rho'$.

Pe de altă parte avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{s_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1} - a_{n+1}}{s_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{s_{n+1}}\right) = 1,$$

deci din P.12.3.6. rezultă că $\rho' = 1$ şi deci $\rho \geqslant 1$.

Prin urmare $\rho \leqslant 1$ şi $\rho \geqslant 1$, deci $\rho = 1$.

Corolar 1. *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir de numere reale nenegative cu* $a_n \to 0$ *şi* $\sum_{n\geqslant 0} a_n = \infty$. *Atunci seria de puteri* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *are raza de convergenţă egală cu* 1.

12.3.16. Exerciţiu. *Fie* s *suma seriei de puteri* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$, $x \in \mathbf{R}$. *Să se arate că* $e^{-\frac{x^2}{2}} s(x) < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+$.

Soluţie. Fie $a_n = \frac{1}{(2n+1)!!}$. Se vede imediat că $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \infty$, deci (P. 12.3.6.) seria dată are raza de convergenţă $+\infty$. Derivînd relaţia

$$s(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}, \quad x \in \mathbf{R},$$

obţinem

$$s'(x) = 1 + xs'(x), \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Rezolvînd ecuaţia diferenţială (liniară) obţinută, deducem :

$$e^{-\frac{x^2}{2}} s(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+.$$

Evident însă avem :

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt < \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+.$$

deci

$$e^{-\frac{x^2}{2}} s(x) < \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+.$$

Scanned with OKEN Scanner

12.3.17. Exercițiu. *Fie f suma seriei de puteri $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n}}{2n+1}$. Să se stabilească relația:*

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=(1+x^2)f(x),\ (\forall)\ |x|<1.$$

Soluție. Seria $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n}}{2n+1}$ are raza de convergență 1 și avem:

$$xf(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|<1.$$

Cum

$$\ln(1\pm x)=\pm x-\frac{x^2}{2}\pm\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\pm\ldots,\quad |x|<1,$$

prin adunare se obține

$$\ln(1-x^2)=-2\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{2n}}{2n},\quad |x|<1$$

Atunci

$$xf(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{2n}}{2n}=-\ln(1-x)+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

deci

$$f(x)=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x},\ 0<|x|<1$$

și deci

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=\frac{1+x^2}{4x}\ln\frac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{1-\frac{2x}{1+x^2}}=$$

$$=\frac{1+x^2}{2x}\ln\frac{1+x}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}=(1-x^2)f(x),\ |x|<1.$$

12.3.18. Exercițiu. *Fie $\sum_{n\geqslant 0}c_nx^n$ o serie de puteri care are suma s și cu proprietatea că $(\exists)\ N\geqslant 1$ a.î. orice mulțime $\{c_{kN}, c_{kN+1}, \ldots, c_{kN+N-1}\}$ $(k\geqslant 1)$ este o permutare a mulțimii $\{c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}\}$. Să se calculeze $\lim_{x\nearrow 1}(1-x)\,s(x)$.*

Soluție. Se vede imediat (T. 2.5.7. Cor. 3) că:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{c_n}=\max\{\lim_{k\to\infty}\sqrt[kN]{|c_0|},\ldots,\lim_{k\to\infty}\sqrt[kN+N-1]{|c_{N-1}|}\}=1,$$

deci seria dată are raza de convergență 1.

Fie $P(x)=\sum_{j=0}^{N-1}c_jx^j$, $x\in\mathbf{R}$. Atunci

$$s(x)=P(x)+x^NP_1(x)+x^{2N}P_2(x)+\ldots+x^{kN}P_k(x)+\ldots\ (|x|<1),$$

unde $P_k(x) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j^* x^j$ și $\{c_0^*, c_1^*, \ldots, c_{N-1}^*\}$ este o permutare a mulțimii $\{c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}\}$. Deoarece mulțimea $\{c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}\}$ posedă un număr finit de permutări, există un număr finit de polinoame distincte $P_k(k \geqslant 1)$. Cum $P_k(1) = P(1)$, $(\forall)\ k \geqslant 1$, pentru $\varepsilon > 0$ fixat $(\exists)\ \delta = \delta > 0$ a.î.

$$|P(x) - P_k(x)| \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ 1 - \delta < x < 1 \wedge k \geqslant 1.$$

Evident avem :

$$(1 - x)s(x) = (1 - x)(1 + x^N + x^{2N} + \ldots)\, P(x) +$$

$$+ (1 - x)x^N[P_1(x) - P(x)] + (1 - x)x^{2N}([P_2(x) - P(x)] + \ldots =$$

$$= \frac{1 - x}{1 - x^N} P(x) + R(x),$$

unde

$$|R(x)| \leqslant (1 - x)\frac{x^N}{1 - x^N}\varepsilon \leqslant \varepsilon\ (\forall)\ 1 - \delta < x < 1.$$

Cum $\lim\limits_{x \nearrow 1} \dfrac{1 - x}{1 - x^N} P(x) = \dfrac{1}{N} P(1)$, rezultă că

$$\lim_{x \nearrow 1}(1 - x)s(x) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} c_j.$$

12.3.19. Exerciţiu. *Fie* $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n x^n$, $x \in \mathbf{K}$, *o serie de puteri cu* $a_n \geqslant 0$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$ *şi raza de convergenţă* ρ *finită. Atunci seria dată este convergentă în orice punct* $x \in \mathbf{K}$, $|x| = \rho$.

Soluţie. Seria dată este absolut convergentă, deci convergentă, în orice punct $x \in \mathbf{K}$ cu $|x| = \rho$.

12.3.20. Exerciţiu. *Să se arate că seria de puteri* $\sum\limits_{n \geqslant 0} 2^{-n}x^n$ *converge simplu şi neuniform pe* $(-2, 2)$.

Soluţie. Seria dată are evident raza de convergenţă $\rho = 2$, deci (T.12.3.4.) este absolut convergentă pe $(-2, 2)$. Dacă seria dată va fi uniform convergentă pe $(-2, 2)$, atunci $1 = \sup\limits_{x \in (-2, 2)} |2^{-n}x^n| \to 0$ $(n \to \infty)$, absurd.

12.3.21. Exerciţiu (E u l e r). *Fie* $\sum\limits_{n \geqslant 0} c_n x^n$ *o serie de puteri care are raza de convergenţă* $\rho \geqslant 1$ *şi* $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k (n \geqslant 0)$. *Atunci*

$$\sum_{n \geqslant 0} c_n x^n = (1 - z)\sum_{n \geqslant 0} s_n x^n,\ (\forall)\ x \in \mathbf{K},\ |x| < 1$$

Soluţie. Seriile $\sum\limits_{n \geqslant 0} x^n$ şi $\sum\limits_{n \geqslant 0} c_m x^n$ sînt absolut convergente pentru $(\forall)\ x \in \mathbf{K}$, $|x| < 1$. Atunci (T.3.4.2.) seria produs a celor două serii este convergentă şi avem

$$\frac{1}{1 - x}\sum_{n \geqslant 0} c_m x^n = \sum_{n \geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k x^n\right) = \sum_{n=0} s_n x^n,\ |x| < 1$$

12.3.22. Exerciţiu. *Fie* $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ *o serie de puteri cu proprietatea că* $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} |a_m| > 0$. *Atunci raza de convergenţă* ρ *a seriei date este* $\leqslant 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $\alpha := \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|$. Din T.2.5.6. Cor. 4 rezultă că $(\exists)$ $(|a_{n_k}|)_{k\geq 1}$ un subșir al șirului $(|a_n|)_{n\geq 1}$ a.î. $|a_{n_k}| \geq \frac{1}{2}\alpha$, $(\forall)$ $k \geq 1$. Atunci (T.12.3.5.) avem :

$$\omega := \overline{\lim_{n\to\infty}} (|a_n|)^{1/n} \geq \overline{\lim_{k\to\infty}} (|a_{n_k}|)^{1/n_k} \geq \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n_k} = 1,$$

deci $\rho = \frac{1}{\omega} \leq 1$.

Corolar 1. *Fie* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *o serie de puteri cu proprietatea că șirul* $(|a_n|)_{n\geq 1}$ *nu converge la* 0, *în particular* $|a_n| \geq 1$, $(\forall)$ $n \geq 1$. *Atunci raza de convergență a seriei date este* ≤ 1.

12.4. Dezvoltarea unei funcții în serie Taylor

12.4.1. Exercițiu. *Fie* $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Să se arate că f poate fi dezvoltată, în seria Taylor cu centrul în fiecare punct* $a \in \mathbf{R}^*$.

Soluție. f este indefinit derivabilă și avem :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \quad (\forall)\, x \in \mathbf{R}^*\ (\forall)\ n \geq 1$$

Fixăm a, $x \in \mathbf{R}_+^*$, spre exemplu $a < x$. Evident nu există $M > 0$ a.î.

$$|f^{(n)}(t) = \frac{n!}{x^{n+1}} \leq M,\ (\forall)\ t \in [a, x] \wedge n \in \mathbf{N},$$

deci nu putem aplica T.12.4.4. Cor. 3.

Se vede însă imediat că $(\forall)$ $a \in \mathbf{R}^*$, putem scrie

$$f(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-a}{a}} = \frac{1}{a} \sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\frac{x-a}{a}\right)^n, \quad \left|\frac{x-a}{a}\right| < 1,$$

deci

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (x-a)^n, \quad |x-a| < |a|,$$

prin urmare f poate fi dezvoltată în serie Taylor cu centrul în a.

12.4.2. Exercițiu. *Să se arate inegalitățile* :

$$1^\circ\ 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \begin{cases} < e^x, (\forall)\ x > 0 \text{ și } n \geq 1 \\ > e^x, \ (\forall)\ x < 0 \text{ și } n - \text{par} \\ < e^x, (\forall)\ x < 0 \text{ și } n - \text{impar} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$2^\circ\ x - \frac{x^3}{3!} + \ldots \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \begin{cases} < \sin x, (\forall)\ x > 0 \text{ și } n - \text{impar} \\ > \sin x, (\forall), x < 0 \text{ și } n - \text{impar} \\ > \sin x, (\forall)\ x > 0 \text{ și } n - \text{par} \\ < \sin x, (\forall)\ x < 0 \text{ și } n - \text{par} \end{cases}$$

$$3^\circ\ 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \begin{cases} < \cos x, (\forall)\ x \neq 0 \text{ și } n - \text{impar} \\ > \cos x, (\forall)\ x \neq 0 \text{ și } n - \text{par} \end{cases}$$

$$4^\circ\ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \begin{cases} < \ln(1+x), (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+ \text{ și } n - \text{par} \\ > \ln(1+x), (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+ \text{ și } n - \text{impar} \\ > \ln(1+x), (\forall)\ x \in (-1, 0) \text{ și } n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Soluție. Inegalitățile date se arată utilizînd formula lui Taylor cu restul lui Lagrange pentru funcțiie $x \mapsto e^x$, $x \in \mathbf{R}$; $x \mapsto \sin x$, $x \in \mathbf{R}$; $x \mapsto \cos x$, $x \in \mathbf{R}$; $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \in (-1, \infty)$.

Să justificăm, spre exemplu 1°. Din T.12.4.4. Cor. 1 avem:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\xi^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ unde } \xi = \theta x,\ \theta \in (0, 1)$$

Cum

$$\xi^{n+1} \begin{cases} > 0, & x > 0 \wedge n \geqslant 1 \\ < 0, & x < 0 \wedge n - \text{par} \\ > 0, & x < 0 \wedge n - \text{impar}, \end{cases}$$

obținem evident inegalitățile din enunț.

Corolar 1.

$$1^\circ\ x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+;$$

$$2^\circ\ x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+.$$

12.4.3. Exercițiu. *Fie P un polinom neidentic nul cu coefcicienți reali. Dacă $P^{(i)}(a) \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$), $(\forall)\ 0 \leqslant i \leqslant n$, atunci pentru orice rădăcină reală x_0 a lui P avem $x_0 \leqslant a$ (resp. $x_0 \geqslant a$).*

Soluție. Am văzut (P.12.5.1.) că

$$P(x) = P(a) + \frac{x-a}{1!} P'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} P^{(n)}(a),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Presupunem că $P^{(i)}(a) \geqslant 0$, $(\forall)\ 0 \leqslant i \leqslant n$. Deoarece P nu este identic nul, rezultă că există $0 \leqslant i_0 \leqslant n$ a.î. $P^{(i_0)}(a) > 0$. Atunci $P(x) > 0$, $(\forall)\ x > a$, deci pentru orice rădăcină reală x_0 a lui P avem $x_0 \leqslant a$.

Corolar 1. *Orice polinom neidentic nul cu coeficienții reali nenegativi (resp. nepozitivi) are rădăcinile nepozitive (resp. nenegative).*

Soluție. Fie $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n (a_i \in \mathbf{R})$. Se vede imediat că $P^{(i)}(0) = a_i$, $(\forall)\ 0 \leqslant i \leqslant n$, deci putem aplica Ex. 12.4.3.

Scanned with OKEN Scanner

12.4.4. Exerciţiu. *Ecuaţia* $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}=0$, *nu admite rădăcini reale*, $(\forall)\ n\geqslant 1$.

Soluţie. Cum coeficienţii ecuaţiei sînt pozitivi, ea nu poate avea rădăcini pozitive.

Să presupunem că ecuaţia admite o rădăcină negativă x_0. Atunci din Ex. 12.4.2. deducem :

$$0=1+\frac{x_0}{1!}+\ldots+\frac{x_0^{2n}}{(2n)!}>e^{x_0}>0,$$

absurd. Prin urmare ecuaţia nu admite rădăcini reale.

Corolar 1. *Polinomul* $P(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$, $x\in\mathbf{R}$ *nu poate avea decît cel mult o rădăcină reală şi atunci ea este simplă.*

Soluţie. Dacă $\mathbf{P}$ admite 2 rădăcini reale (distincte sau confundate), atunci polinomul $P'(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, $x\in\mathbf{R}$ admite cel puţin o rădăcină reală. Cum n sau $n-1$ este par aceasta contrazice Ex. 12.4.4.

12.4.5. Exerciţiu. *Fie* $I\subseteq\mathbf{R}$ *un interval*, $f:I\to\mathbf{R}$ *o funcţie de clasă* $\mathcal{C}^n$ *şi* $a\in\mathring{I}$ (*a.î.* $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$. *Dacă* $f^{(n)}$ *păstrează un semn constant pe* $I\cap(a,\infty)$, *atunci şi* f *păstrează acelaşi semn constant pe* $I\cap(a,\infty)$.

Soluţie. Scriem formula lui Taylor cu restul lui Lagrange

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+$$

$$+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi),\ \xi\in(a,x).$$

Cum prin ipoteză avem

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0,\ (\forall)\ x\in I\cap(a,\infty),$$

rezultă

$$f(x)=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi)\begin{cases}\geqslant 0, & f^{(n)}\geqslant 0 \text{ pe } I\cap(a,\infty)\\ \leqslant 0, & f^{(n)}\leqslant 0 \text{ pe } I\cap(a,\infty)\end{cases}$$

Corolar 1. *Fie* $I\subseteq\mathbf{R}$ *un interval*, $a\in\mathring{I}$ *şi* $f,g:I\to\mathbf{R}$ *două funcţii de clasă* $\mathcal{C}^n$ *a.î.* $f^{(i)}(a)=g^{(i)}(a)$, $(\forall)\ i=\overline{0,n-1}$ *şi* $f^{(n)}(x)\leqslant g^{(n)}(x)$, $(\forall)\ x\in I, x>0$. *Atunci* $f(x)\leqslant g(x)$, $(\forall)\ x\in I, x>0$.

Soluţie. Aplicăm, Ex. 12.4.5. pentru funcţia $g-f$.

Observaţie Pentru $x\in I\cap(-\infty,a)$ în Ex. 12.4.5. avem :

$$f(x)=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi)\begin{cases}\geqslant 0, & n \text{ par şi } f^{(n)}\geqslant 0 \text{ pe } I\cap(-\infty,a)\\ \leqslant 0, & n \text{ impar şi } f^{(n)}\geqslant 0 \text{ pe } I\cap(-\infty,a)\\ \leqslant 0, & n \text{ par şi } f^{(n)}\leqslant 0 \text{ pe } I\cap(-\infty,a)\\ \geqslant 0, & n \text{ impar şi } f^{(n)}\geqslant 0 \text{ pe } I\cap(-\infty,a)\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

12.4.6. Exerciţiu. *Fie* $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ *o funcţie de clasă* $\mathcal{C}^2$ *a.î.* $f(0)=f(1)$. *Atunci* $|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}\|f''\|_\infty$, $(\forall)x\in[0,1]$, *unde* $\|f''\|_\infty=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f''(t)|$

Soluţie. Să scriem formula lui Taylor cu restul lui Lagrange:

$$f(0)=f(x)+\frac{(0-x)^1}{1!}f'(x)+\frac{(p-x)^2}{2!}f''(\xi),\quad \xi\in(0,x);$$

$$f(1)=f(x)+\frac{(1-x)^1}{1!}f'(x)+\frac{(1-x)^2}{2!}f''(\eta),\quad \eta\in(x,1).$$

De aici prin scădere rezultă relaţia:

$$0=\left(\frac{1-x}{1!}+\frac{x}{1!}\right)f'(x)+\frac{(1-x)^2}{2!}f''(\xi)-\frac{x^2}{2!}f''(\eta),$$

deci punînd $M=\|f''\|_\infty$ obţinem:

$$|f'(x)|\leqslant\left(\frac{(1-x)^2}{2}+\frac{x^2}{2}\right)M=(2x^2-2x+1)\frac{M}{2},\ (\forall)\ x\in[0,1].$$

Cum evident avem $0<2x^2-2x+1\leqslant 1$, $(\forall)\ x\in[0,1]$, deducem că

$$|f'(x)|\leqslant\frac{M}{2},\ (\forall)\ x\in[0,1].$$

Corolar 1. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcţie de clasă* $\mathcal{C}^2$ *a.î.* $f(a)=f(b)$. *Atunci* $|f'(x)|\leqslant\frac{b-a}{2}\|f''\|_\infty$, $(\forall)\ x\in[a,b]$, *unde* $\|f''\|_\infty=\sup\limits_{t\in[a,b]}f''(t)|$.

12.4.7. Exerciţiu. *Fie* $I\subseteq\mathbf{R}$ *un interval şi* $f:I\to\mathbf{R}$ *o funcţie de* n *ori derivabilă într-un punct* $a\in I$. *Atunci*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_{k-1}(x;a)}{(x-a)^k}=\frac{1}{k!}f^{(k)}(a),\ (\forall)\ k=\overline{1,\ n}$$

unde T_{k-1} *este polinomul Taylor de grad* $k-1$ *asociat funcţiei* f *şi punctului* a.

Soluţie. Aplicînd T.6.4.3. Cor. 1 deducem:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_{k-1}(x;a)}{(x-a)^k}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(k-1)}(x)-(T_{k-1}(x;a))^{(k-1)}}{k\cdot(k-1)\ \ldots\ 2\cdot(x-a)}=$$

$$=\frac{1}{k!}\lim_{x\to a}\frac{f^{(k-1)}(x)-f^{(k-1)}(a)}{x-a}=\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$$

12.4.8. Exerciţiu. *Fie* $I\subseteq\mathbf{R}$ *un interval,* $a\in I$ *un punct şi* $f:I\to\mathbf{R}$ *o funcţie de* $n+1$ *ori derivabilă în* a. *Fie mai departe* $g:I\to\mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $g(x)=\frac{f(x)-T_{n-1}(x;a)}{(x-a)^n}$, *dacă* $x\in I\setminus\{a\}$ *şi* $g(a)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)$. *Atunci* g *este derivabilă în* a.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Evident avem :

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_{n-1}(x;a)-\frac{1}{n}(x-a)^n f^{(n)}(a)}{(x-a)^{n+1}}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(x;a)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)\quad\text{(Ex. 12.4.7.)}$$

12.4.9. Exerciţiu. *Să se arate inegalitatea* $e^n>\frac{(n+1)^n}{n!}$, $(\forall)\ n\in\mathbf{N}$.

Soluție. Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange ne dă

$$e^n=1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{n^n}{n!}e^{\theta n},\ 0<\theta<1.$$

Deoarece

$$\frac{1}{n!},\frac{1}{(n-1)!},\ldots,\frac{1}{1!}\leqslant 1\ \text{și}\ \frac{1}{e^{\theta n}}<1,$$

avem

$$e^n>1\frac{1}{n!}+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{(n-1)!}+\ldots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\cdot 1+\frac{n^n}{n!}=$$

$$=\frac{1}{n!}\left(1+n\cdot n+\frac{n(n-1)}{2!}n^2+\ldots+n^n\right)=\frac{1}{n!}(1+n)^n.$$

12.4.10. Exerciţiu. *Dacă* $f(x)=x^n$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$, *atunci*

$$f(1)+\frac{1}{1!}f'(1)+\frac{1}{2!}f''(1)+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(1)=2^n.$$

Soluție. Aplicăm P.12.5.1. pentru $P(x)=x^n$, $x\in\mathbf{R}$, în care înlocuim x cu 2 și x_0 cu 1.

12.4.11. Exerciţiu. *Fie* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcție de clasă* $\mathcal{C}^{n+1}$. *Atunci* f *este polinom de grad* $n\Leftrightarrow f^{(n+1)}=0$.

Soluție. ($\Leftarrow$). Din T.12.4.4. Cor. 1 rezultă : $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$, $(\exists)\ \theta_x\in(0,1)$ a.î.

$$f(x)=T_n(x;0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta_x x)$$

Cum $f^{(n+1)}=0$, rezultă $f(x)=T_n(x;0)$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$.

12.4.12. Exerciţiu. *Fie* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcție de două ori derivabilă a.î.* $|f|<1$ *și* $|f''|<1$. *Atunci* $|f'|<2$.

Ind. $(\forall)\ x,\ x+h\in\mathbf{R}$, avem (T.12.4.4. Cor. 1) :

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x+\theta h)(0<\theta<1),$$

deci

$$|f'(x)|=\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{h}{2}f''(x+\theta h)\right|<\frac{2}{|h|}+\frac{|h|}{2}=2,$$

pentru $h=2$.

Scanned with OKEN Scanner

12.4.13. Exerciţiu. *Fie* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie de trei ori derivabilă. Atunci există un polinom* $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *cu proprietăţile:* $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$; $P(x_0) = f(x_0)$, $P(-x_0) = f(-x_0)$ *pentru un* $x_0 > 0$ *fixat. Să se arate că* $(\exists)\ -x_0 < t < x_0$ *a.î.*

$$a_3 = \frac{1}{6} f'''(t) \text{ şi } f'(0) = \frac{f(x_0) - f(x_0)}{2x_0} - \frac{x_0^2}{6} f'''(t).$$

12.4.14. Exerciţiu. *Să se arate inegalitatea:*

$$\left| \sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \right| < \frac{x^2}{8}, (\forall)\ x > 0$$

Soluţie. Fie $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x \in I := (-1, \infty)$. Evident f este de două ori derivabilă şi avem:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}},\ f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}},\ (\forall)\ x \in I$$

Fie $x > 0$ fixat. Cf. T.12.4.4. Cor. 1 $(\exists)\ 0 < c < x$ a.î.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(c),$$

deci

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (1+c)^{-\frac{3}{2}}$$

Cum $1 + c > 0$, avem $(1+c)^{-3/2} < 1$, prin urmare

$$\left| \sqrt{(1+x)} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \right| < \frac{x^2}{8}$$

Aplicaţie. $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2}$ cu o eroare $< \frac{1}{8}$; $\sqrt{1,2} \approx 1 + \frac{0,2}{2} = 1,1$ cu o eroare $< \frac{1}{8} \cdot (0,2)^2 = 0,005$; $\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = 3\sqrt{1 + \frac{1}{9}} \approx 3\sqrt{1 + \frac{1}{9}} \approx$ $\approx 3\left(1 + \frac{1}{18}\right) = \frac{19}{6}$, cu o eroare $< 3 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{216}$

12.4.15. Exerciţiu.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)}{x^7} = \frac{1}{30}.$$

Ind. Ţinem seama că:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7),\ x \to 0;$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17}{315} x^7 + o(x^7),\ x \to 0$$

12.4.16 Exerciţiu. *Să se calculeze* $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Din P.12.5.11. avem :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\,(|x|)^2,\ x \to 0$$

$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{1!2} + \frac{x^4}{2!4} + o\,(|x|^5),\ x \to 0$$

Atunci

$$\frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2!4}\right) + \frac{o(|x|^5)}{x^4},\ x \to 0,$$

deci

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = \frac{1}{4!} - \frac{1}{2!4} = -\frac{1}{12}$$

12.4.17. Exercițiu. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$

Soluție : Din P.12.5.11 avem :

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + o(|x|^2),\ x \to 0$$

Atunci

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{1}{2!} + \frac{o(|x|^2)}{x^2},\ x \to 0,$$

deci $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

12.4.18. Exercițiu. *Să se calculeze, utilizînd formula lui Taylor, limita* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Ind. $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{1!}\cdot\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{2!}\cdot\dfrac{1}{4}(1+\theta x)^{-\frac{3}{2}},\ 0<\theta<1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2} - \frac{x}{8}(1+\theta x)\right] = \frac{1}{2}$$

12.4.19. Exercițiu. *Dacă seria* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n^2$ *este convergentă, atunci există* $k \geqslant 1$ *a.î. produsul infinit* $\prod\limits_{n\geq k} \cos x_n$ *este convergent.*

Soluție. Aplicînd formula lui Taylor funcției cos obținem :

$$\cos x_n = 1 - \frac{1}{2!} x_n^2 \cos \theta_n x_n,\quad \theta_n \in (0,\ 1)$$

seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n^2$ fiind convergentă rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n^2 \cos \theta_n x_n$ este absolut convergentă, deci produsul $\prod\limits_{n\geq k}\left(1 - \dfrac{1}{2} x_n^2 \cos \theta_n\, x_n\right)$ este absolut convergent pentru k suficient de mare, deoarece $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2} x_n^2 \cos \theta_n\, x_n < 1$, $(\forall)\ n \geqslant k$, pentru k suficient de mare.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 13

METODE NUMERICE ÎN ANALIZA MATEMATICĂ

13.1. Separarea rădăcinilor şi rezolvarea numerică a ecuaţiilor

13.1.1. Exerciţiu. *Să se determine parametrul real* λ *a.î. ecuaţia următoare*

$$2x^3 + x^2 - 4x + \lambda = 0$$

are toate rădăcinile reale şi distincte.

Ind. Fie $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + \lambda$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci

$$f'(x) = 2(3x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ şi } x = \frac{2}{3}.$$

Formăm şirul lui Rolle:

$$f(-\infty) = -\infty, f(-1) = \lambda + 3, f\left(\frac{2}{3}\right) = \lambda - \frac{44}{27}, f(+\infty) = +\infty,$$

din care deducem că f are rădăcini reale distincte, dacă $\lambda + 3 > 0$ şi $\lambda - \frac{44}{27} < 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left(-3, \frac{44}{27}\right)$.

13.1.2. Exerciţiu. *Să se discute cu ajutorul şirului lui Rolle natura rădăcinilor reale ale ecuaţiei* $\sin^3 x + \cos^3 x - \lambda + 1 = 0$, *în funcţie de parametrul real* λ.

Soluţie. Considerăm funcţia

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x - \lambda + 1, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Deoarece f este periodică de perioadă 2π, este suficient să studiem f pe intervalul $x \in [0, 2\pi)$.

Cum avem:

$$|\lambda - 1| = |\cos^3 x + \sin^3 x| \leqslant 1 \ (\forall) \ x \in [0, 2\pi],$$

rezultă că ecuaţia dată are eventual soluţii reale numai pentru $0 \leqslant \lambda \leqslant 2$.

$$f'(x) = 3 \sin x \cos x (\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, 2\pi\right\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Obținem următorul tablou :

$f'(x)=0$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	2π	
λ \ $f(x)$	$2-\lambda$	$1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda$	$2+\lambda$	$-\lambda$	$1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda$	$2-\lambda$	rădăcini
$\lambda=0$	+	+	+	$\boxed{0}$	+	+	$x_1=\pi$ dublă
$0<\lambda<1-\frac{1}{\sqrt{2}}$	+	+	+	−	+	+	$x_1\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ $x_2\in\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$
$\lambda=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$	+	+	+	$\boxed{0}$	+	+	$x_1\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ $x_2=\frac{5\pi}{4}$ dublă
$1-\frac{1}{\sqrt{2}}<\lambda<1+\frac{1}{\sqrt{2}}$	+	+	+	−	−	+	$x_1\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ $x_2\in\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$
$1+\frac{1}{\sqrt{2}}<\lambda<2$	+	−	+	−	−	−	$x_1\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, $x_2\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, $x_3\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$
$\lambda=2$	$\boxed{0}$	−	+	−	−	$\boxed{0}$	$x_1=0$, $x_2=2\pi$ duble $x_3\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ $x_4\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

Am scris că rădăcinile 0, π, $\frac{5\pi}{4}$ și 2π sînt duble, deoarece $f''(x)\neq 0$, $(\forall)\ x\in\left\{0,\pi,\frac{5\pi}{4},2\pi\right\}$ (v. P.12.5.3.)

Observație. Se poate ajunge la același rezultat, reprezentînd grafic funcțiile $y=\sin^3 x+\cos^3 x+1$, $x\in\mathbf{R}$ și $y=\lambda$, $x\in\mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

13.1.3. Exerciţiu. *Să se determine numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei* $x^4 - 4x^2 - 16x + 2 = 0$, *utilizînd şirul Sturm.*

Ind. Avem şirul lui Sturm: $P_0 = P$; $P_1(x) = x^3 - 2x + 4$; $P_2(x) = x^2 + 6x - 1$; $P_3(x) = -7x + 2$; $P_4(x) = -1$. De aici obţinem:

$$V(-\infty) = V(+, -, +, +, -) = 3,\ V(0) = V(+ -, -, +, -) = 3,$$

$$V(1) = V(-, -, +, -, -) = 2,\ V(2) = V(-, 0, +, -, -) = 2,$$

$$V(3) = V(+, +, +, -, -) = 1 \text{ şi } V(+\infty) = V(+, +, +, -, -) = 1$$

Ecuaţia dată are numai două soluţii reale; una situată în intervalul (0,1) şi cealaltă în intervalul (2,3).

13.1.4. Exerciţiu. *Să se determine numărul soluţiilorr reale ale ecuaţiei* $x^4 - 7x^2 - 9x - 2 = 0$, *utilizînd şirul lui Sturm.*

Ind. Şirul lui Sturm: $P_0 = P$; $P_1(x) = 4x^3 - 14x - 9$; $P_2(x) = 14x^2 + 27x + 8$; $P_3(x) = 69x + 225$, $P_4 = 1$. De aici obţinem $V(-\infty) = V(+, -, +, -, +) = 4$ şi $V(+\infty) = V(+, +, +, +, +) = 0$, deci ecuaţia dată are toate rădăcinile reale. $V(-4) = V(+, -, +, -, +) = 4$, $V(-3) = V(+, -, +, +, +) = 2$, $V(-1) = V(+, +, -, +, +) = 2$, $V(0) = V(-, -, +, +, +) = 1$, $V(3) = V(-, +, +, +, +) = 1$, $V(4) = V(+, +, +, +) = 0$. Două soluţii sînt situate în intervalul $(-4, -3)$, una în intervalul $(-1, 0)$ şi ultima în intervalul $(3, 4)$.

13.1.5. Exerciţiu. *Să se determine numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei* $x^3 + px + q = 0$ $(p, q \in \mathbf{R})$, *utilizînd şirul lui Sturm.*

Ind. Fie $P(x) = x^3 + px + q$, $x \in \mathbf{R}$. Şirul lui Sturm: $P = P_0$; $P_1(x) = 3x^2 + p$; $P_2(x) = -2px - 3q$; $P_3(x) = -4p^3 - 27q^2$.

i) Dacă $\Delta = -4p^3 - 27q^2 > 0$ rezultă că $p < 0$; deci $V(-\infty) = V(-, +, -, +) = 3$, $V(+\infty) = V(+, +, +, +) = 0$ şi deci ecuaţia dată are toate cele trei soluţii reale.

ii) Dacă $\Delta < 0$, atunci $(\forall)$ $p \in \mathbf{R}$ avem relaţiile $V(-\infty) = V(-, +, \text{sign } p, -) = 2$, $V(+\infty) = V(+, +, \text{sign } p, -) = 1$, deci ecuaţia dată are o soluţie reală.

iii) Dacă $\Delta = 0$, ecuaţia are o soluţie dublă (P.12.5.3.).

13.1.6. Exerciţiu. *Se consideră ecuaţia lui Kepler* $x - \varepsilon \sin x = t$. *Atunci* $(\forall)$ $\varepsilon, t \in \mathbf{R}$ *cu* $|\varepsilon| < 1$, *ecuaţia admite o soluţie unică; să se determine aproximativ această soluţie în cazul cînd* $\varepsilon = \frac{1}{2}$ *şi* $t = \frac{1}{3}$.

Ind. Fixăm $t \in \mathbf{R}$ şi considerăm funcţia $f(x) = \varepsilon \sin x + t$, $x \in \mathbf{R}$. Arătăm că f este o ε — contracţie, deci putem aplica principiul contracţiei (T. 13.3.5.)

13.1.7. Exerciţiu. *Să se calculeze* $\sqrt{3}$ *utilizînd formula lui Heron, cu o eroare* $\leqslant 10^{-2}$.

Soluţie. Dacă alegem $x_1 = \frac{3}{2}$, atunci (T.13.3.3. Cor. 4) $0 < \alpha_1 = \sqrt{3} - \frac{3}{2} < \frac{1}{4}$, deci $|\alpha_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{4}$, încît rămîne să determinăm pe $n \geqslant 1$ a.î. $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n \geqslant 6$. Să calculăm pe x_6:

$$x_1 = \frac{3}{2};\ x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{7}{8};\ x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{8} + \frac{3}{\frac{7}{8}}\right) = \frac{141}{112} = 1{,}2589285;$$

Scanned with OKEN Scanner

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{141}{112} + \frac{3}{\frac{144}{112}}\right) = \frac{(141)^2 + 336 \cdot 112}{2 \cdot 112 \cdot 141} = \frac{57 \cdot 513}{2 \cdot 112 \cdot 141} = 1{,}8209536\,;$$

$$x_5 = \frac{1}{2}\left(x_4 + \frac{3}{x_4}\right) = \frac{1}{2}\left(0{,}8209536 + \frac{3}{0{,}8209536}\right) = 1{,}7342210\,;$$

$$x_6 = \frac{1}{2}\left(x_5 + \frac{3}{x_5}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{x_5^2 + 3}{x_5} = \frac{3{,}0075224 + 3}{2 \cdot 1{,}7342210} = 1{,}7320521.$$

Prin urmare $\sqrt{3} \approx 1{,}732051$, cu o eroare $\leqslant \frac{1}{100}$.

13.1.8. Exerciţiu. *Să se calculeze cu aproximaţie, utilizînd principiul contracţiei, o rădăcină a ecuaţiei* $x^3 - 12x + 1 = 0$.

Soluţie. Fie ecuaţia $x^3 - 12x + 1 = 0$. Dacă punem $P(x) = x^3 - 12x + 1$, $x \in \mathbf{R}$ atunci $P(0) > 0$ şi $P(1) < 0$ deci P posedă în intervalul $[0, 1]$ cel puţin o rădăcină. Cum $P'(x) = 3(x^2 - 4) < 0$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$ avem că P este strict monotonă pe $[0, 1]$ deci P are în $[0, 1]$ o singură rădăcină x^*. Să observăm că ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia $x = \frac{1}{12}(x^3 + 1)$.

Fie funcţia $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ definită astfel $f(x) = \frac{1}{12}(x^3 + 1)$. Cu $f'(x) = \frac{1}{4}x^2$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$ avem $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$ deci f este o λ—contracţie cu $\lambda = \frac{1}{4}$ şi deci ecuaţia $f(x) = x$ admite o singură rădăcină, evident egală cu x^*.

Să determinăm x^* prin metoda aproximaţiilor succesive. Fie $x_0 \in [0, 1]$ fixat şi $x_n = f(x_{n-1})$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Atunci $|x^* - x_n| \leqslant \frac{\lambda^n}{1 - \lambda}|x_1 - x_0|$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Să aflăm $n \geqslant 1$ a.î. x_n să aproximeze x^* cu o eroare $\leqslant 10^{-2}$. Pentru $x_0 = 0$ avem $x_1 = \frac{1}{12}$ deci rămîne să aflăm $n \geqslant 1$ a.î.

$$\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}\left|\frac{1}{12} - 0\right| \leqslant 10^{-2} \Leftrightarrow 9 \cdot 4^n \geqslant 10^2 \Leftrightarrow n \geqslant 2.$$

Aşadar x_2 aproximează pe x^* cu o eroare $\leqslant 10^{-2}$. Cum $x_0 = 0$ şi $x_1 = \frac{1}{12}$ avem $x_2 = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{12^3} + 1\right) = \frac{1729}{20.736} = 0{,}083381\ldots$.

13.1.9. Exerciţiu. *Fie* $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă cu proprietăţile:* $1^\circ\ f(a) < 0$ *şi* $f(b) > 0$; $2^\circ\ 0 < m \leqslant f'(x) \leqslant M < +\infty$, $(\forall)\ x \in [a, b]$. *Atunci unica soluţie a ecuaţiei* $f(x) = 0$ *poate fi obţinută cu ajutorul principiului contracţiei pentru o funcţie convenabil aleasă* $g\colon [a, b] \to [a, b]$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie funcția $g(x) = x = \lambda f(x)$, $x \in [a, b]$, unde λ este un parametru real. Evident g este derivabilă și avem $g'(x) - 1 = \lambda f'(x)$, $(\forall)\ x \in [a, b]$, deci

$$1 - \lambda M \leqslant 1 - \lambda f'(x) \leqslant 1 - \lambda m,\ (\forall)\ x \in [a, b]$$

Dacă $\lambda > 0$ este suficient de mic avem $1 - \lambda M \in (0, 1)$ și $1 - \lambda m \in (0, 1)$. Atunci g este o contracție de raport $1 - \lambda m$. Din 1° rezultă $g(a) = a - \lambda f(a) > a$ și $g(b) = b - \lambda f(b) < b$. Evident pentru $\lambda > 0$ suficient de mic avem $a < a - \lambda f(a) < b - \lambda f(b) < b$, deci $g(a)$ și $g(b)$ aparțin lui $[a, b]$. Cum g este strict crescătoare, deoarece $g' > 0$, rezultă că $g([a, b]) \subseteq [a, b]$. Aplicînd principiul contracției rezultă că $(\forall)\ x_0 \in [a, b]$ avem $g^n(x_0) \to x^*$, unde $g(x^*) = x^*$. Evident $g(x^*) = x^* \Leftrightarrow x^* = \lambda f(x^*) = x^* \Leftrightarrow f(x^*) = 0$.

13.2. Aproximarea funcțiilor (polinoame de interpolare)

13.2.1. Exercițiu. *Să se scrie polinomul de interpolare sub forma lui Lagrange și Newton asociat unei funcții f și unei mulțimi de puncte formată din 2,3,... puncte.*

Ind. $L_2(x) = f(x_1)\dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f(x_2)\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$;

$$N_2(x) = f(x_1) + f(x_1; x_2)\cdot(x - x_1) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\cdot(x - x_1)$$

Am obținut ecuația unei drepte. Pentru 3 puncte obținem ecuația unei parabole etc.

13.2.2. Exercițiu. *Să se determine un polinom $P \in \mathbf{R}[X]$ de grad minim care în n puncte distincte date $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ ia respectiv valorile $y_1, y_2, \ldots y_n$.*

Ind. Scriem polinomul de interpolare sub forma lui Lagrande sau Newton asociat unei funcții arbitrare f cu $f(x_i) = y_i (i = \overline{1, n})$ și mulțimi de puncte $x_i (i = \overline{1, n})$.

13.2.3. Exercițiu. *Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ un polinom de grad cel mult n și $f(x) = P(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Atunci $(\forall)\ x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ distincte între ele, polinomul de interpolare asociat funcției f și punctelor $x_0, x_1, \ldots, x_n$ coincide cu P.*

Ind. Fie L polinomul de interpolare asociat lui f și punctelor $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Atunci $L - P$ este un polinom de grad $\leqslant n$, care se anulează în $n + 1$ puncte distincte, deci $L - P = 0 \Leftrightarrow L = P$.

13.2.4. Exercițiu. *Să se determine expresia polinomului de interpolare asociat unei funcții care este constantă pe mulțimea punctelor de interpolare.*

Soluție. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție și $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$ a.î. $f(x_i) = \lambda$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$. Fie mai departe P polinomul de interpolare asociat funcției f și punctelor $x_i (i = \overline{1, n})$. Evident avem $f(x_1; x_2; \ldots; x_k) = 0$, $(\forall)\ k = \overline{2, n}$, deci scriind P sub forma lui Newton avem că $P(x) = N(x) = f(x_1)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Prin urmare P este o constantă.

Corolar 1. *Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ diferite două cîte două. Atunci*

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq 1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = 1,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Soluție. Scriem P sub forma lui Lagrange pentru $\lambda = 1$ (Ex. 13.2.4.).

Scanned with OKEN Scanner

13.2.5. Exerciţiu. *Să se calculeze valoarea aproximativă a lui* $\sqrt{17}$ *utilizînd un polinom de interpolare pentru funcţia* $f(x)=\sqrt{x}$, $x \in \mathbf{R}_+$, *şi trei puncte de interpolare* x_1, x_2, x_3 *convenabil alese.*

Soluţie. Evident $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ şi avem : $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$ şi $f^{IV}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+$. Deoarece $f^{IV} < 0$, funcţia f''' este strict descrescătoare, deci cum $f''' > 0$, rezultă că

$$\|f'''\|_\infty = \sup_{x\in[9,25]} |f'''(x)| = |f'''(25)| = \frac{3}{8\cdot 5^5}.$$

Să scriem polinomul de interpolare, sub forma lui Lagrange, asociat funcţiei f şi punctelor $x_1 = 9$, $x_2 = 16$, $x = 25$; obţinem :

$$L_3(x) = f(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)},$$

deci

$$L_3(x) = \frac{7}{7\cdot 16}(x-16)(x-25) - \frac{4}{7\cdot 9}(x-9)(x-25) + \frac{5}{16\cdot 9}(x-9)(x-16).$$

Din inegalitatea (T.13.4.4. Cor. 1)

$$|f(x) - L_3(x)| \leqslant \frac{1}{3!}\|f'''\|_\infty \prod_{j=1}^{3}|x - x_j|, (\forall)\ x \in [9,25],$$

deducem :

$$|f(17) - L_3(17)| \leqslant \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8\cdot 5^5}|17-9)(17-16)(17-25)| = \frac{128}{10^5}$$

Cum

$$L_3(17) = \frac{3}{7\cdot 16}(17-16)(17-25) - \frac{4}{7\cdot 9}(17-9)(17-25) + \frac{5}{16\cdot 9}(17-9)(17-16) = -\frac{3\cdot 1\cdot 8}{7\cdot 16} + \frac{4\cdot 8\cdot 8}{7\cdot 9} + \frac{5\cdot 8\cdot 1}{16\cdot 9} \approx 4{,}126984,$$

conchidem că $\sqrt{17} \approx 4{,}126984$ cu eroarea absolută $\leqslant \frac{128}{10^5}$.

13.2.6. Exerciţiu. *Se ştie că* $\sin 1{,}7 \approx 0{,}992$ *şi* $\sin 1{,}9 \approx 0{,}946$. *Să se calculeze prin interpolare valoarea aproximativă a lui* $\sin 1{,}8$.

Ind. Fie P polinomul de interpolare (sub forma lui Lagrange sau a lui Newton) asociat funcţiei sin şi punctelor $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = 1{,}7$ şi $x_3 = 1{,}9$. Avem că $\sin 1{,}8 \approx P(1{,}8) \approx 0{,}974$.

13.2.7. Exerciţiu. *Să se alcătuiască tabloul diferenţelor divizate de ordinul* $n = 2,3,4, \ldots$ *ale funcţiei* f, *despre care se ştie că*

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1,5	0,5	-1	0,5	0

Ind. Notăm $x_i = i (i = \overline{1,5})$ şi avem :

$$f(x_1 ; x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{0,5 - 1,5}{2 - 1} = -1$$

$$f(x_2 ; x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{-1 - 0,5}{3 - 2} = -1,5$$

$$f(x_1 ; x_2 ; x_3) = \frac{f(x_2 ; x_3) - f(x_1 ; x_2)}{x_3 - x_1} = \frac{-1,5 + 1}{1} = -0,5 \text{ etc.}$$

13.2.8. Exerciţiu. *Fie* f *o funcţie despre care se ştie că*

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	1,5	8	8,5	10	20

Să se determine prin interpolare valoarea lui f *în punctul* 0,5.

Ind. Se scrie polinomul de interpolare P_6, sub una din formulele cunoscute, asociat lui f şi punctelor -1, 0, 1, 2, 3, 4, de unde avem că $f(0,5) \approx \approx P_6(0,5)$.

13.2.9. Exerciţiu. *Să se arate că nu orice polinom de interpolare asociat unei funcţii nenegative este nenegativ.*

Ind. Fie $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$; $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$. Atunci

$$L(0,1 ; f)(x) = f(x_1)\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f(x_2)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = x, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

13.2.10. Exerciţiu. *Fie* $x_i (i = \overline{1,4})$ *patru numere reale ordonate crescător,* $f : \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \to \mathbf{R}$ *o funcţie şi* $d_i (i = \overline{1,4})$ *diferenţele divizate :*

$$d_1 = [x_2, x_3, x_4 ; f] ; \ d_2 = [x_1, x_3, x_4 ; f] ; \ d_3 = [x_1, x_2, x_4 ; f] ; \ d_4 = [x_1, x_2, x_3 ; f].$$

Atunci $\min \{d_1, d_4\} \leqslant d_2, d_3 \leqslant \max \{d_1, d_4\}$.

Ind. Observăm în prealabil că dacă $a, b, c \in D_f$ şi $a < b < c$, atunci $[a, c ; f]$ este cuprins între $\min\{[a, b ; f], [b, c ; f]\}$ şi $\max \{[a, b ; f], [b, c ; f]\}$.

Presupunem , spre exemplu, că $d_1 \leqslant d_4$ şi arătăm ţinînd seama de observaţia preliminară că $d_1 \leqslant d_2 \leqslant d_4$ şi $d_1 \leqslant d_3 \leqslant d_4$.

13.2.11. Exerciţiu. *Fie* $P \in \mathbf{R}[X]$ *un polinom. Atunci :* 1° *Cîtul împărţirii lui* P *prin* $x - x_1$ *este diferenţa divizată* $[x, x_1 ; P]$; 2° *Restul împărţirii lui* P *prin* $(x - x_1) \ldots (x - x_n)$ *este polinomul de interpolare asociat funcţiei* f *şi punctelor* x_i $(i = \overline{1, n})$.

Ind. 1° $P(x) = (x - x_1)\, Q(x) + R(x)$, grad $R = 0$, deci $P(x_1) = R(x_1)$ şi $\dfrac{P(x) - P(x_1)}{x - x_1} = Q(x)$

Scanned with OKEN Scanner

2° $P(x) = ((x - x_1) \dots (x - x_n) \mid Q(x) + R(x)$, grad $R \leqslant n - 1$, deci $P(x_i) = \mathbf{R}(x_i)$ $(i = \overline{1, n})$ și deci $\mathbf{R}$ este polinomul de interpolare asociat funcției P și nodurilor x_i $(i = \overline{1, n})$.

Corolar 1. *Notînd* $\varphi(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$, *obținem că restul împărțirii lui* P *prin* φ *este* $\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)} \frac{\varphi(x)}{x - x_i}$

Aplicație. Polinomul $(x^{n+1} - 1)(x^{n+2} - 1) \dots (x^{n+k} - 1)$ se divide la polinomul $(x - 1)(x^2 - 1) \dots (x^k - 1)$.

13.2.12. Exercițiu. *Fie* $x, h \in \mathbf{R}$ *și* f *o funcție reală definită pe mulțimea* $\{x, x + h, \dots, x + nh\}$ *cu* n *natural fixat. Să punem* $\Delta^1 f(x) = f(x + h) = f(x)$ *și* $\Delta^k f(x) = \Delta^1(\Delta^{k-1} f(x))$, $(\forall)$ $k = \overline{2, n}$. *Atunci avem relația :*

$$\Delta^n f(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i f(x + ih) \tag{1}$$

Soluție. Fie $P(n)$ proprietatea din enunț. Avem :

$$P(1): \qquad \Delta^1 f(x) = -f(x) + f(x + h) = \sum_{i=0}^{1} (-1)^{1-i} C_1^i f(x + ih),$$

deci $P(1)$ este adevărată.

Fie $n \geqslant 1$ pentru care $P(n)$ este adevărată. Atunci

$$\Delta^{n+1} f(x) = -\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i f(x + h) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i f(x + h + ih) =$$

$$= (-1)^{n+1} C_n^0 f(x) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+1-i} C_n^i f(x + ih) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+1-j} C_n^j f(x + jh) +$$

$$+ C_n^n f(x + (n + 1)h) = (-1)^{n+1} C_{n+1}^0 f(x) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+1-i} (C_n^i + C_n^{i-1}) f(x + ih) +$$

$$+ C_{n+1}^{n+1} f(x + (n + 1)h) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+1-i} C_{n+1}^i f(x + ih),$$

deci $P(n + 1)$ este adevărată.

Cf. principiului inducției $P(n)$ este adevărată $(\forall)$ $n \geqslant 1$.

Observație. Operatorul Δ^1 definit în Ex. 13.2.12. se numește *operatorul diferență*. Evident avem $\Delta^1(f + g) = \Delta^1 f + \Delta^1 g$ și $\Delta^1(\lambda f) = \lambda \Delta^1 f$, deci Δ este liniar.

13.2.13. Exercițiu. *Fie* $x, h \in \mathbf{R}$ *și* $n \in \mathbf{N}$ *fixați,* $x_k = x + kh$ $(k = \overline{1, n})$ *și* $f : \{x, x_1, \dots, x_n\} \to \mathbf{R}$ *o funcție. Atunci avem relația :*

$$[x, x_1, \dots, x_n ; f] = \frac{\Delta^n f(x)}{n!\, h^n}$$

unde Δ^1 *este operatorul diferență* (Ex. 13.2.12.).

Soluție. Fie $P(n)$ proprietatea din enunț. Avem :

$$P(1): \qquad [x, x_1 ; f] = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{\Delta f(x)}{1!\, h^1},$$

deci $P(1)$ este adevărată.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $n \geqslant 1$ cu $P(n)$ adevărată. Atunci

$$[x, x_1, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{[x_1, \ldots, x_{n+1}; f] - [x, x_1, \ldots, x_n; f]}{x_{n+1} - x} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)h}\left(\frac{\Delta^n f(x_1)}{n!\,h^n} - \frac{\Delta^n f(x)}{n!h^n}\right) = \frac{1}{(n+1)!\,h^{n+1}}\Delta^n(f(x_1) - f(x)),$$

deci

$$[x, x_1, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{\Delta^{n+1} f(x)}{(n+1)!\,h^{n+1}}$$

și deci $P(n+1)$ este adevărată.

Cf. principiului inducției $P(n)$ este adevărată $(\forall)\ n \geqslant 1$.

13.2.14. Exercițiu. (Formula lui T. Popoviciu) *Fie f o funcție reală definită pe o mulțime formată din n numere reale distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Atunci avem relația:*

$$L(x_1, \ldots, x_n; f)(x) = \frac{(x - x_1)\,L(x_2, \ldots, x_n; f)(x) - (x - x_{n-1})\,L(x_1, \ldots, x_{n-1}; f)(x)}{x_n - x_1},$$

unde prin $L(a_1, a_2, \ldots, a_k; f)$ am notat polinomul de interpolare al lui Lagrange asociat lui f și punctelor $a_i (i = \overline{1, k})$.

Soluție. Să arătăm mai întîi relația:

$$L(x_1, \ldots, x_n; f)(x) = L(x_1, \ldots, x_{n-1}; f)(x) + [x_1, \ldots, x_n; f]\prod_{i=1}^{n-1}(x - x_i) \quad (1)$$

Într-adevăr, $P = L(x_1, \ldots, x_n; f) - L(x_1, \ldots, x_{n-1}; f)$ este un polinom de gradul $n-1$, care se anulează pe $x_1, \ldots, x_{n-1}$ deoarece

$$L(x_1, \ldots, x_n; f)(x_i) = L(x_1, \ldots, x_{n-1}; f) = f(x_i),\ (\forall)\quad i = \overline{1, n-1}$$

Atunci P admite reprezentarea

$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}),\ (\forall)\quad x \in \mathbf{R}$$

Însă coeficientul dominant al lui P coincide cu coeficientul dominant al lui $L(x_1, \ldots, x_n; f)$, deci scriind $L(x_1, \ldots, x_n; f)$ sub forma dată de Newton (T. 13.2.14) observăm că $c = [x_1, \ldots, x_n; f]$, prin urmare

$$L(x_1, \ldots, x_n; f)(x) - L(x_1, \ldots, x_{n-1}; f)(x) = [x_1, \ldots, x_n; f]\prod_{i=1}^{n-1}(x - x_i)$$

Analog cu relația (1) se deduce relația

$$L(x_1, \ldots, x_n; f)(x) = L(x_2, \ldots, x_n; f)(x) + [x_1, \ldots, x_n; f]\prod_{i=2}^{n-1}(x - x_i) \quad (2)$$

Înmulțim relația (2) cu $x - x_1$, din care scadem relația (1) înmulțită cu $x - x_n$, obținem, după reducerea termenilor asemenea, relația:

$$((x - x_1) - (x - x_n)) \cdot L(x_1, \ldots, x_n; f)(x) =$$

$$= (x - x_1)\,L(x_2, \ldots, x_n; f)(x) - (x - x_n)L(x_1, \ldots, x_{n-1}; f)(x),$$

de unde prin împărțire cu $x_0 - x_{n-1}$ se obține relația căutată.

13.2.15. Exerciţiu. *Fie funcţia* $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$. *Să se determine* $n \geqslant 1$ *a.î.* T_n *— polinomul Taylor asociat lui* f *şi punctului* 0, *să aproximeze uniform pe intervalul* $[-1, 1]$ *funcţia* f *cu o eroare* $\leqslant \frac{1}{10.000}$.

Ind. $T_n(x; 0) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbf{R}$

$$f(x) = T_n(x; 0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1$$

$$\sup_{|x| \leqslant 1} |f(x) - T_n(x; 0)| = \sup_{|x| \leqslant 1} \frac{|x^{n+1} e^{\theta x}|}{(n+1)!} = \frac{e}{(n+1)!}$$

Determinăm $n \geqslant 1$ *a.î.* $\frac{e}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{10^4} \Leftrightarrow n \geqslant 8$. Aşadar

$$\left| e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^8}{8!}\right) \right| \leqslant \frac{1}{10^4} \; (\forall)\, x \in [-1,1]$$

13.3. Formula lui Taylor şi calculul funcţiilor elementare

13.3.1. Exerciţiu. *Să se calculeze valoarea aproximativă a numărului* π *utilizînd dezvoltarea în serie a funcţiei* arcsin.

Ind. $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{6} + \ldots +$

$+ \arcsin \frac{1}{2} = 0{,}5 + 2{,}08333333 \cdot 10^{-2} + 2{,}34375 \cdot 10^{-3} + 2{,}441406 \cdot 10^{-3} + \ldots,$

deci

$$\pi = 6 \arcsin \frac{1}{2} \approx 6 \cdot 5{,}2561848 \cdot 10^{-1} = 3{,}1537108$$

13.3.2. Exerciţiu. *Să se calculeze valoarea aproximativă a lui* $\sqrt{1{,}01}$ *cu o eroare* $< 10^{-8}$.

Soluţie. Plecăm de la relaţia

$$(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} x^6 - \ldots,$$

deci

$$\sqrt{1{,}01} = (1 + (0,1)^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{(0,1)^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (0,1)^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} (0,1)^6 - \ldots$$

Seria fiind alternantă, eroarea pe care o facem înlocuind suma seriei printr-o sumă parţială a ei, este mai mică decît modulul primului termen neglijat.

Prin urmare avem

$$\sqrt{1.01} \approx 1 + 0{,}005 - \frac{1}{8 \cdot 10^4} + \frac{1}{16 \cdot 10^6} \approx 1{,}0049875,$$

cu o eroare $\leqslant 10^{-8}$.

Scanned with OKEN Scanner

13.3.3. Exercițiu. *Să se calculeze valoarea aproximativă a lui* $\frac{1}{\sqrt{1{,}01}}$ *cu o eroare* $\leqslant \frac{1}{10^5}$.

Soluție. Plecăm de la relația

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots,$$

deci

$$\frac{1}{\sqrt{1{,}01}} = (1+(0,1)^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(0,1)^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}(0,1)^6 + \ldots$$

Seria fiind alternantă, eroarea pe care o facem înlocuind suma seriei printr-o sumă parțială a ei este mai mică decît modulul primului termen neglijat Rămîne să determinăm $n \geqslant 1$ a.î. $\frac{1\ 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}(0,1)^{2n} \leqslant \frac{1}{10^5}$. Obținem :

$$\frac{1}{\sqrt{1{,}01}} \approx 1 - 0{,}005 + 0{,}0000375 + \ldots \approx 0{,}09950375,$$

cu o eroare mai mică decît $\frac{1}{10^5}$.

13.3.4. Exercițiu. *Să se calculeze valoarea aproximativă a numărului* π *plecînd de la dezvoltarea în serie Taylor a funcției arc sin.*

Soluție. Seria Taylor a funcției arcsin este dată de relația :

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots\ldots \quad |x|<1$$

Atunci

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \ldots\ldots$$

Sumînd primii 5 termeni ai seriei de mai sus, facem o eroare $\leqslant \frac{1}{2^{11}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right) = \frac{1}{2^{10}} < \frac{1}{10^3}$. Prin urmare avem

$$\pi \approx 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{5}{7\cdot 2^{11}} + \frac{35}{9\cdot 2}\right) =$$

$$= 6(0,5 + 0,0208333 + 0,0023437 + 0,0003487 + 0,0000593) =$$

$$= 6\cdot 0,523585 = 3,14151,$$

cu o eroare $< \frac{1}{10^3}$.

Scanned with OKEN Scanner

13.3.5. Exerciţiu. *Să se calculeze $\sqrt{e}$ cu 5 zecimale exacte.*
Soluţie. Scriem formula lui Taylor cu restul lui Lagrange :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} \cdot e^{\theta x},\ 0 < \theta < 1,$$

de unde rezultă :

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{1!2} + \frac{1}{2!2^2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!2^{n-1}} + \frac{1}{n!2^n} \cdot e^{\frac{\theta}{2}}$$

Rămîne să determinăm pe $n \geqslant 1$ a.î.

$$r_n = \frac{1}{n!2^n} \cdot e^{\frac{\theta}{2}} < \frac{1}{10^6}$$

Evident însă

$$r_n < \frac{1}{n!2^n} \cdot e^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{n!2^n} \cdot \sqrt{3} < \frac{1}{n!2^{n-1}},$$

deci este suficient să determinăm pe n a.î.

$$\frac{1}{n!2^{n-1}} < \frac{1}{10^6} \Leftrightarrow n!2^{n-1} > 10^6, \Leftrightarrow n \geqslant 8.$$

Prin urmare $\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{1!2} + \frac{1}{2!2^2} + \ldots + \frac{1}{7!2^7} \cong 1 + 0{,}5 +$

$+ 0{,}125 + 0{,}0208333 + 0{,}0026041 + 0{,}0002604 + 0{,}0000271 + 0{,}0000015 =$
$= 1{,}6487345.$

13.4. Integrarea numerică a funcţiilor

13.4.1. Exerciţiu. *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ *utilizînd cele trei metode, a dreptunghiurilor, a trapezelor şi a parabolelor, împărţind intervalul* $[0,1]$ *în 5 părţi egale i.e.* $n = 5$.

Soluţie. 1° *Formula dreptunghiurilor* : Pentru $f(x) = \frac{1}{1+x}$ şi $n = 5$ avem :

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \frac{1}{5}\left[f\left(\frac{0+\frac{1}{5}}{2}\right) + f\left(\frac{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}}{2}\right) + f\left(\frac{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(\frac{\frac{3}{5}+\frac{4}{5}}{2}\right) + f\left(\frac{\frac{4}{5}+1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{10}} + \frac{1}{1+\frac{3}{10}} + \frac{1}{1+\frac{5}{10}} + \frac{1}{1+\frac{7}{10}} + \frac{1}{1+\frac{9}{10}}\right) =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= 2\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right) =$$

$$= 2(0{,}090909 + 0{,}076924 + 0{,}066666 + 0{,}058888 + 0{,}052631) = 0{,}696036.$$

Eroarea făcută este $\leqslant \frac{1}{5} \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| = 0{,}5$

2° *Formula trapezelor*: Pentru $f(x) = \frac{1}{1+x}$ și $n = 5$ avem:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cong \frac{1}{5}\left[\frac{f(0)+f(1)}{2} + f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{1+\frac{1}{5}} + \frac{1}{1+\frac{2}{5}} + \frac{1}{1+\frac{3}{5}} + \frac{1}{1+\frac{4}{5}}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = 0{,}150000 + 0{,}166666 + 0{,}142857 +$$

$$+ 0{,}125000 + 0{,}111111 = 0{,}695633$$

Eroarea făcută este $\leqslant \frac{1}{12{,}5^2} \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)| = \frac{1}{300} \cdot 2 = \frac{1}{150} = 0{,}006\ldots$

Cum $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2$ obținem că $\ln 2 = 0{,}695633$, cu o eroare mai mică decît $0{,}006$.

3° Se procedează ca mai sus. Eroarea făcută pentru $n = 5$ este $\frac{1}{2880 \cdot 5^4} \sup_{x \in [0,1]} |f^{(IV)}(x)| = \frac{24}{2880 \cdot 5^4} < \frac{1}{2880 \cdot 25} = \frac{1}{72000} \cong 0{,}000014$, deci se obțin primele patru zecimale exacte.

13.4.2. Exercițiu. *Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Simpson valoarea aproximativă a integralei* $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x}$, *de unde să se deducă valoarea aproximatică a lui* $\ln 3$.

Soluție. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă. Pentru $n = 1$ formula lui Simpson se scrie:

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + f(b) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

Punem $a = 1$, $b = 3$ și $f(x) = \frac{1}{x}$, $(\forall)\ x \in [1, 3]$ și obținem:

$$\ln 3 = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} \approx \frac{2}{6}\left[1 + \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2}\right] = \frac{7}{9} \approx 0{,}77$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $n = 2$ formula lui Simpson, cu $h := b - a$, se scrie :

$$\int_a^b f \approx \frac{h}{12}\left\{[f(a) + f(b)] + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4\left[f\left(a + \frac{h}{4}\right) + f\left(a + \frac{3h}{4}\right)\right]\right\}$$

Punem $a = 1$, $b = 3$ și $f(x) = \frac{1}{x}$, $(\forall)\ x \in [1,3]$ și obținem :

$$ln\,3 = \int_1^3 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{12}\left\{1 + \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 4\left[\frac{1}{1 + 1/2} + \frac{1}{1 + 3/2}\right]\right\} = \frac{99}{90} = 1{,}1$$

Cum $f''(x) = \frac{24}{x^5}$, $(\forall)\ x \in [1,3]$, obținem $\|f^{(IV)}\|_\infty = 24$, deci eroarea absolută $\leqslant$

$\leqslant \frac{2^5}{2880 \cdot 2^2} \cdot 24 = \frac{1}{60} = 0{,}016\ \ldots$ și deci $ln\,3 \approx 1{,}100 \pm 0{,}016$.

13.4.3. Exercițiu. *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei* $\int_0^1 \frac{dx}{4 + x}$ *cu o eroare* $\leqslant \frac{1}{500}$, *utilizînd formula dreptunghiurilor.*

Soluție. Relația

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$

unde $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, ne dă valoarea aproximativă a integralei cu o eroare

$\leqslant \frac{b-a}{4n}\|f'\|_\infty$.

În cazul nostru $f'(x) = -\frac{1}{(4 + x)^2}$, $(\forall)\ x \in [0,1]$, deci $\|f'\|_\infty = \frac{1}{16}$.

Rămîne să determinăm pe n *a.î.* $\frac{1}{4n} \cdot \frac{1}{16} \leqslant \frac{1}{500}$, deci $n \geqslant 13$. Atunci :

$$\int_0^1 \frac{dx}{4 + x} \approx \frac{1}{13}\left[f\left(\frac{0 + \frac{1}{13}}{2}\right) + f\left(\frac{\frac{1}{13} + \frac{2}{13}}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{\frac{12}{13} + \frac{13}{13}}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{13}\left[f\left(\frac{1}{26}\right) + f\left(\frac{3}{26}\right) + f\left(\frac{5}{26}\right) + \ldots + f\left(\frac{25}{25}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{13}\left[\frac{1}{4 + \frac{1}{26}} + \frac{1}{4 + \frac{3}{26}} + \frac{1}{4 + \frac{5}{26}} + \ldots + \frac{1}{4 + \frac{25}{26}}\right] =$$

$$= \frac{1}{13}\left(\frac{1}{4 + 0{,}0384615} + \frac{1}{4 + 0{,}1153846} + \frac{1}{4 + 0{,}1923076} + \frac{1}{4 + 0{,}2692307} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4 + 0{,}3461538} + \frac{1}{4 + 0{,}4230769} + \frac{1}{4 + 0{,}5} + \frac{1}{4 + 0{,}576923} + \right.$$

Scanned with OKEN Scanner

$$+\frac{1}{4+0{,}6538461}+\frac{1}{4+0{,}7307692}+\frac{1}{4+0{,}8076923}+\frac{1}{4+0{,}8846153}+$$

$$+\frac{1}{4+0{,}9615384}\Big)=\frac{1}{13}(0{,}2476619+0{,}2429906+0{,}2385321+$$

$$+0{,}2342342+0{,}2300884+0{,}2260869+0{,}2222222+0{,}2184873+$$

$$+0{,}2148760+0{,}2113821+0{,}2080000+0{,}2047244+0{,}2015503)+$$

$$+\frac{1}{13}\cdot 2{,}9007935=0{,}2231379.$$

13.4.4. Exercițiu. *Să se afle valoarea aproximativă a integralei* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ *folosind formula trapezelor.*

Soluție. Plecăm de la relația :

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right],$$

unde $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$. În cazul nostru $a=0$, $b=1$, $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ și să considerăm $n=10$. Atunci

$$\int_0^1 f(x)\,dx \cong \frac{1}{10}\left[\frac{f(0)+f(1)}{2}+f\left(\frac{1}{10}\right)+f\left(\frac{2}{10}\right)+\ldots+f\left(\frac{9}{10}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{10}\left[\frac{1+\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{10}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{10}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{1+\left(\frac{9}{10}\right)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{10}(0{,}75+0{,}990099+0{,}9615384+0{,}9174311+0{,}8620689+$$

$$+0{,}8+0{,}7352941+0{,}6711409+0{,}609756+0{,}5524861)=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot 7{,}8598145=0{,}78598145.$$

13.4.5. Exercițiu. *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ *cu o eroare* $\leqslant \frac{1}{1000}$ *utilizînd formula trapezelor.*

Soluție. Relația :

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$, ne dă valoarea aproximativă a integralei cu o eroare $\leqslant \frac{(b-a)^3}{12 \cdot n^2} \|f''\|_\infty$. În cazul nostru avem

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad (\forall)\, x \in [0,1] \text{ deci } \|f''\|_\infty = 2.$$

Rămîne să determinăm n a.î. $\frac{1}{12 \cdot n^2} \cdot 2 \leqslant \frac{1}{1000}$, deci $n \geqslant 13$. Atunci

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \cong \frac{1}{13}\left[\frac{f(0)+f(1)}{2} + f\left(\frac{1}{13}\right) + f\left(\frac{2}{13}\right) + \ldots + f\left(\frac{12}{13}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{13}\left[\frac{1+\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{1+\frac{1}{13}} + \frac{1}{1+\frac{2}{13}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{12}{13}}\right] =$$

$$= \frac{1}{13}(0{,}75 + 0{,}9285714 + 0{,}8666666 + 0{,}8125 + 0{,}7647058 +$$

$$+ 0{,}7222222 + 0{,}6842105 + 0{,}65 + 0{,}6190476 + 0{,}590909 +$$

$$+ 0{,}5652173 + 0{,}5416666 + 0{,}52) = \frac{1}{13} \cdot 9{,}015717 = 0{,}6935166.$$

13.4.6. Exerciţiu. *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ *folosind metoda lui Simpson.*

Soluţie. Plecăm de la relaţia :

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{6n}\left\{[f(x_0)+f(x_n)] + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right\},$$

unde $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$. În cazul nostru $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ şi să considerăm $n = 2$. Atunci :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \cong \frac{1}{12}\left\{[f(0)+f(1)] + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{12}\left[1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{4}} + 4 \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{16}} + \frac{1}{1+\frac{9}{16}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\left[\frac{3}{2} + \frac{8}{5} + \frac{64}{17} + \frac{64}{25}\right] = \frac{1}{12}[1{,}5 + 1{,}6 + 3{,}7647058 + 2{,}56] =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 9{,}4247058 = 0{,}7853921.$$

Observaţie. Valoarea exactă a integralei $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ este $\frac{\pi}{4}$, deci $\approx 0{,}7865 \ldots$ Aşadar din cele trei formule utilizate a dreptunghiurilor, a trapezelor şi a lui

Scanned with OKEN Scanner

Simpson, la calculul integralei $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, cel mai bun rezultat a fost obținut cu formula lui Simpson.

13.4.7. Exercițiu. *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei* $\int_0^1 x^2\,dx$, $\int_0^1 x\,dx$, $\int_0^\pi \sin x\,dx$ *utilizînd cele trei metode, apoi să se afle eroarea făcută. Să se compare rezultatele astfel obținute cu valoarea exactă a integralei calculate direct.*

Ind. $\int_0^1 x^4\,dx = 0{,}20001$ cu formula lui Simpson pentru $n = 10$.

$\int_0^\pi \sin x\,dx \cong 2{,}001$ cu formula lui Simpson pentru $n = 6$.

13.5. Diverse

13.5.1. Exercițiu. *Să se arate că în vecinătatea lui* 0 *avem relațiile :*

$$\sqrt{1 \pm x^2} \approx 1 \pm \frac{x^2}{2}; \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \approx 1 \pm \frac{x^2}{2}.$$

Ind. Fie $f(t) = t^{\pm\frac{1}{2}}$, $t \in \mathbf{R}_+^*$. Se ține seama că avem : $f(1+h) \approx f(1) + h \cdot f'(1)$, $h \to 0$.

13.5.2. Exercițiu. *Să se calculeze valoarea aproximativă a lui* $\ln 2$ *utilizînd relația* $\ln 2 = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Ind. Sumînd primii n termeni, eroarea absolută este $\leqslant \frac{1}{n+1}$ (T. 3.2.6. Cor 1.). Seria converge foarte „încet". Sumînd, spre exemplu, primii 10 termeni, obținem :

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \approx 0{,}6456349,$$

eu o eroare absolută $\leqslant \frac{1}{11}$.

13.5.3. Exercițiu. *Să se calculeze valoarea aproximativă a numărului* π, *utilizînd formula lui Leibniz*

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Ind. Adunînd primii n termeni, obținem π cu o eroare absolută mai mică decît modulul primului termen neglijat (T.3.2.6. Cor. 1), deci $\leqslant \frac{4}{2n+1}$. Seria converge foarte „încet". Astfel, adunînd primii 9 termeni obținem $\pi \approx 3{,}2523659$; pentru primii 16 termeni obținem $\pi = 3{,}079153$; pentru primii 17 termeni obținem $\pi \approx 3{,}2003651$ etc.

Scanned with OKEN Scanner

13.5.4. Exerciţiu. *Utilizînd teorema lui Lagrange să se arate care este eroarea pe care o facem înlocuind* $\sqrt{101}$ *prin* 10.

Soluţie. Considerăm funcţia $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbf{R}_+$; $a = 100$ şi $b = 101$. Atunci avem

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta), \quad 0 < \theta < 1,$$

deci

$$\sqrt{101} - \sqrt{100} = \frac{1}{2\sqrt{100 + \theta}}.$$

Deoarece funcţia $g(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{100 + t}}$, $t \in [0, 1]$ este strict descrescătoare, rezultă

$$\frac{1}{2\sqrt{101}} < \sqrt{101} - \sqrt{100} < \frac{1}{2\sqrt{100}}.$$

Prin urmare eroarea realizată este $< \dfrac{1}{20}$.

13.5.5. Exerciţiu. *Să se calculeze cu aproximaţie suma seriilor* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ *şi* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2+1}$, *aplicînd criteriul integral al lui Cauchy-Maclaurin* (T. 11.2.6.).

Soluţie. 1° Din T. 11.2.6 Cor. 2 rezultă

$$\frac{1}{(2-1)n_0^{2-1}} \leqslant \sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{(2-1)(n_0-1)^{2-1}}, \quad (\forall)\ n_0 \geqslant 1,$$

deci

$$\frac{1}{n_0} \leqslant \sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n_0 - 1}, \quad (\forall)\ n_0 \geqslant 1$$

şi deci

$$\sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n_0} \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n_0 - 1}, \quad (\forall)\ n_0 \geqslant 1.$$

Dacă punem $n_0 = 2$, obţinem $\dfrac{3}{2} \leqslant \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2} \leqslant 2$.

2° Fie $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbf{R}_+$. Atunci f este strict descrescătoare şi pozitivă, deci (T. 11.2.6. Cor. 2) $(\forall)\ n_0 \geqslant 1$ avem :

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n_0 = \int_{n_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} \leqslant \sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{n^2+1} \leqslant \int_{n_0-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(n_0 - 1),$$

prin urmare

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n_0 + \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{k^2+1} \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+1} \leqslant \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(n_0 - 1) + \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{k^2+1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă punem $n_0 = 2$, obținem :

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2 + \frac{1}{2} \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2+1} \leqslant \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

13.5.6. Exercițiu. *Să se calculeze suma seriei* $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *cu o eroare* $\leqslant \frac{1}{10^3}$.

Soluție. Fie funcția $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in (0, \infty)$. Din T.11.2.6. Cor. 2 rezultă

$$r_n := \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n}, \quad (\forall)\ n \geqslant 1,$$

deci $r_n \leqslant \frac{1}{10^3} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{10^3} \Leftrightarrow n \geqslant 10^3$. Prin urmare $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} \approx \sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k^2}$, cu o eroare $\leqslant \frac{1}{10^3}$.

13.5.7. Exercițiu. *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei* $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ *cu o eroare* $\leqslant 10^{-6}$.

Soluție. Am văzut (P. 11.3.1. Exemplul 8) că integrala dată este convergentă. Prelungim funcție $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0, 1]$ prin continuitate în 0 ; notăm cu f funcția astfel obținută. Deoarece avem (P. 12.5.5.) :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

rezultă

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots, \ (\forall)\ x \in [0,1] \tag{1}$$

Seria (1) fiind uniform convergentă, putem integra termen cu termen și obținem :

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{x^2}{3!} dx + \int_0^1 \frac{x^4}{5!} dx - \int_0^1 \frac{x^6}{7!} dx + \ldots = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \ldots \tag{2}$$

Seria (2) fiind alternantă suma primii n termeni eroarea este mai mică decît a_{n+1}, primul termen neglijat (P. 3.2.6. Cor. 1). Deoarece $8! = 40 \cdot 320$, avem $8 \cdot 8! > 10^6$, deci $\frac{1}{9 \cdot 9!} < \frac{1}{10^6}$ și deci

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sin x} \cong 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} \cong$$

$$\cong 1 - 0{,}055555 + 0{,}0016666 - 0{,}000028 = 0{,}946082.$$

Scanned with OKEN Scanner

13.5.8. Exercițiu. *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei*

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$$

Soluție. Scriem dezvoltarea în serie Taylor a funcției arctg:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad |x| \leqslant 1 \qquad (1)$$

Din teorema a doua a lui Abel rezultă că seria (1) este uniform convergentă pe $[-1, 1]$.

Evident însă $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$, deci integrala improprie $\int_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$ coincide cu integrala Riemann a funcției $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$, $x \in (0, 1]$ prelungită prin continuitate în 0, deci

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^4}{5} - \ldots, & \text{dacă } 0 < |x| \leqslant 1 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Seria (2) este de asemenea uniform convergentă, deci putem integra termen cu termen. Obținem

$$\gamma = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} + \ldots$$

Seria $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ converge foarte „încet". Pentru $n = 100001$ se obține $\gamma = 0{,}91596559422$ cu o eroare $\leqslant 1{,}05 \cdot 10^{-10}$ (calculele au fost rulate pe calculatorul Centrului de Calcul al Universității).

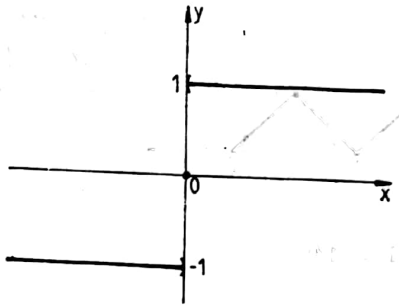
Scanned with OKEN Scanner

APENDICE

Ap. 1. Cîteva funcţii elementare

1.1. *Funcţia signum* (fig. 137).

$$\operatorname{sign} : \mathbf{R} \to \{0,1\}, \quad \operatorname{sign} x = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & \text{dacă} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{,,} \quad x = 0 \end{cases}$$

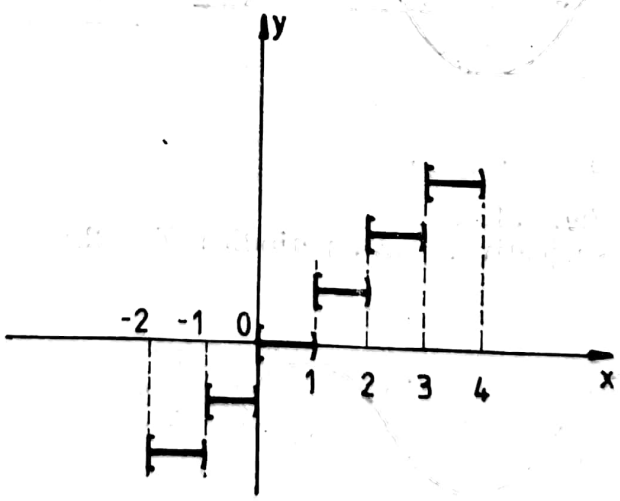


$y = \operatorname{sign} x$

Fig. 137

1.2. *Funcţia parte întreagă.*

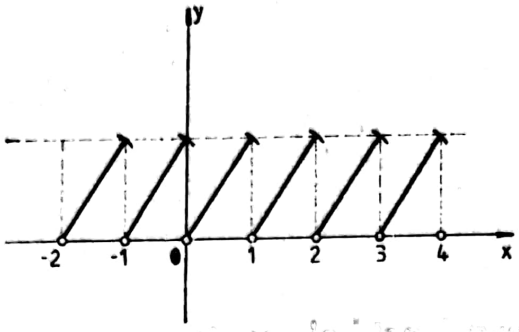
$[\cdot] : \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$, $[x]$ = cel mai mare număr întreg n cu proprietatea că $n \leqslant x$ (fig. 138). Avem $[x] \leqslant x < [x] + 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$



$f(x) = [x]$

Fig. 138

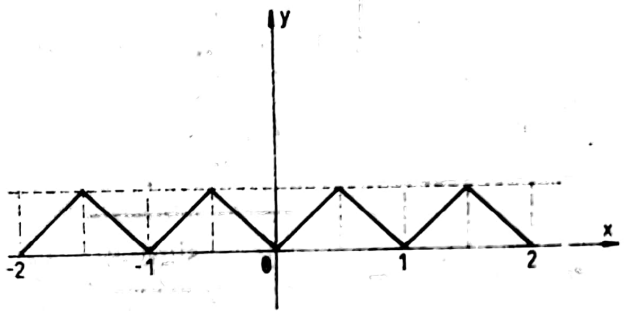
1.3. *Funcția parte zecimală* (fig. 139).
$f(x) = x - [x]$, $x \in \mathbf{R}$; f este periodică, $T = 1$



$f(x) = x - [x]$

Fig. 139

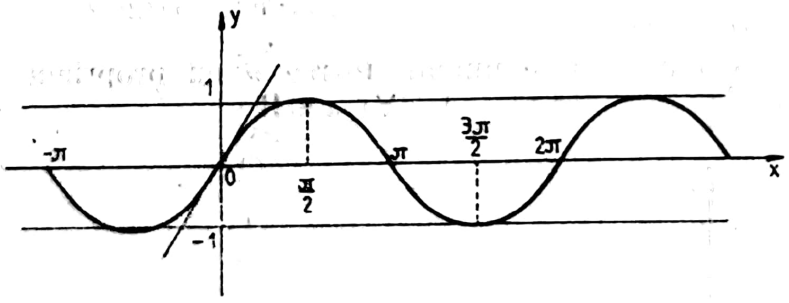
1.4. *Funcția* $\{x\}$ — *distanța de la* x *la cel mai apropiat întreg*, (fig. 140).
$\{\cdot\}: \mathbf{R} \to \left[0, \frac{1}{2}\right]$ este surjectivă, pară, periodică $T = 1$.



$y = \{x\}$

Fig. 140

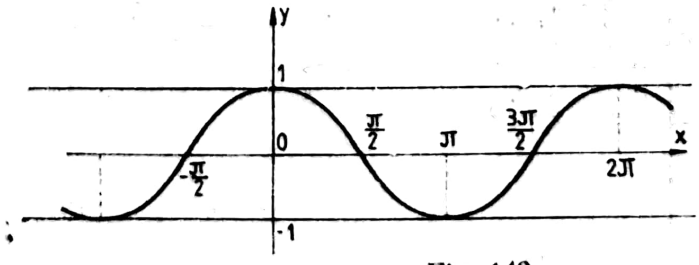
1.5. *Funcția sinus* (fig. 141).
$\sin: \mathbf{R} \to [-1,1]$ este surjectivă, impară, periodică $T = 2\pi$.



$y = \sin x$

Fig. 141

1.6. *Funcția cosinus* (fig. 142).
$\cos: \mathbf{R} \to [-1,1]$ este surjectivă, pară, periodică $T = 2\pi$



$y = \cos x$

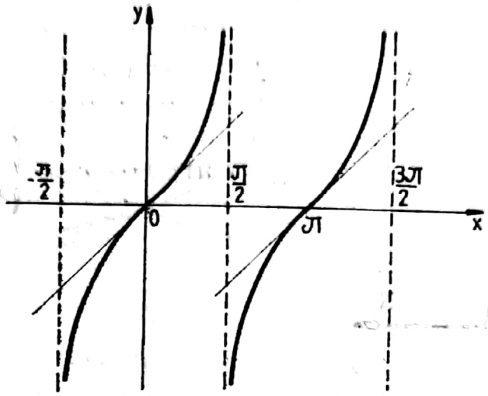
Fig. 142

Scanned with OKEN Scanner

1.7. ***Funcția tangentă*** (fig. 143).

$\operatorname{tg} : \mathbf{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbf{Z} \right\} \to \mathbf{R}$ surjectivă, impară, periodică $T = \pi$,

$\lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2} + k\pi} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim\limits_{x \searrow \frac{\pi}{2} + k\pi} \operatorname{tg} x = -\infty$



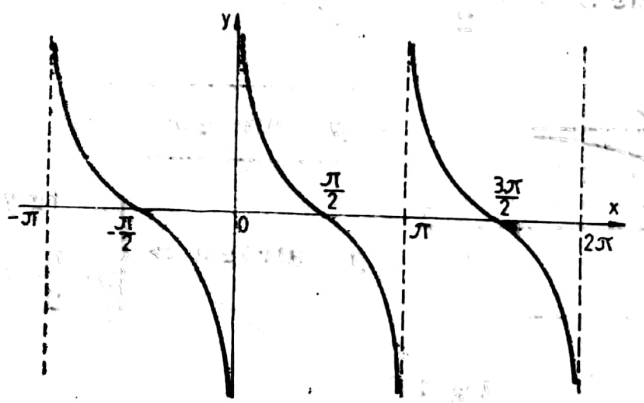
$\boxed{y = \operatorname{tg} x}$

Fig. 143

1.8. ***Funcția cotangentă*** (fig. 144).

$\operatorname{ctg} : \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$, surjectivă, impară, periodică $T = \pi$,

$\lim\limits_{x \searrow k\pi} \operatorname{ctg} x = +\infty, \quad \lim\limits_{x \nearrow k\pi} \operatorname{ctg} x = -\infty$

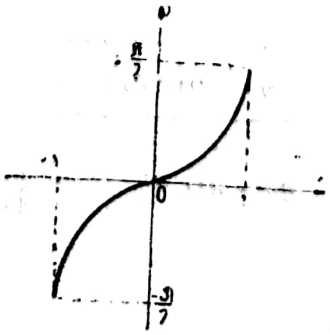


$\boxed{y = \operatorname{ctg} x}$

Fig. 144

1.9. ***Funcția arc sinus*** (fig. 145).

$\operatorname{arc\,sin} = \left(\sin\big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}$; $\operatorname{arc\,sin} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; bijectivă, impară.



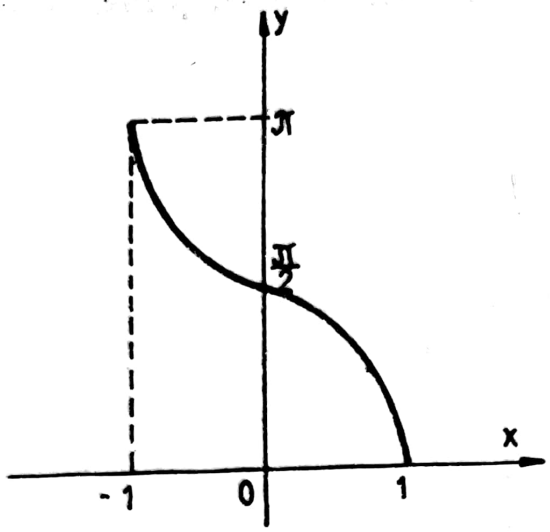
$\boxed{y = \operatorname{arc\,sin} x}$

$y = \operatorname{arc\,sin} x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = x \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Fig. 145

Scanned with OKEN Scanner

1.10. *Funcția arc cosinus* (fig. 146).
$\arccos = (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}$; $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$; bijectivă

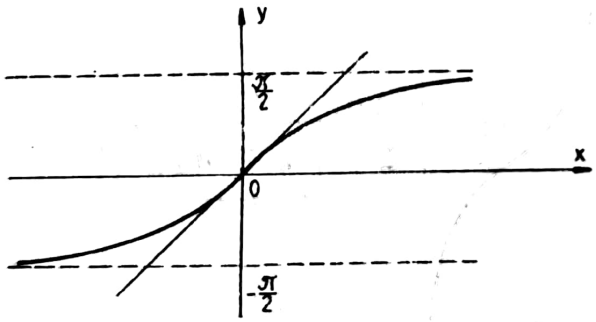


$$\boxed{y = \arccos x}$$

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = x \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{cases}$$

Fig. 146

1.11. *Funcția arc tangentă* (fig. 147).
$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}\Big|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}$; $\operatorname{arctg} : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este bijectivă și impară;
$\lim\limits_{x \leftarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$

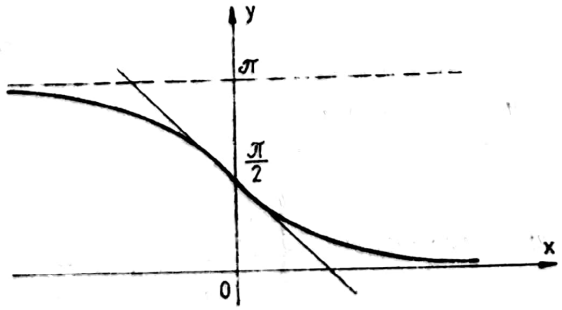


$$\boxed{y = \operatorname{arc\,tg} x}$$

$$y = \operatorname{arc\,tg} x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} y = x \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Fig. 147

1.12. *Funcția arc cotangentă* (fig. 148).
$\operatorname{arc\,ctg} = (\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)})^{-1}$; $\operatorname{arc\,ctg} : \mathbf{R} \to (0, \pi)$ este bijectivă; $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arc\,ctg} x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arc\,ctg} x = \pi$



$$\boxed{y = \operatorname{arc\,ctg} x}$$

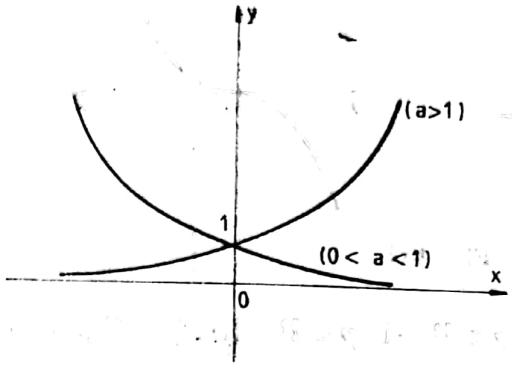
$$y = \operatorname{arc\,ctg} x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} y = x \\ 0 < y < \pi \end{cases}$$

Fig. 148

Scanned with OKEN Scanner

1.13. *Funcția exponențială* $\exp_a$ (fig. 149).
$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ $(a > 0,\ a \neq 1$ fixat).

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a > 1 \\ 0 & \text{„ } 0 < a < 1 \end{cases}; \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a > 1 \\ \infty & \text{„ } 0 < a < 1 \end{cases}$$



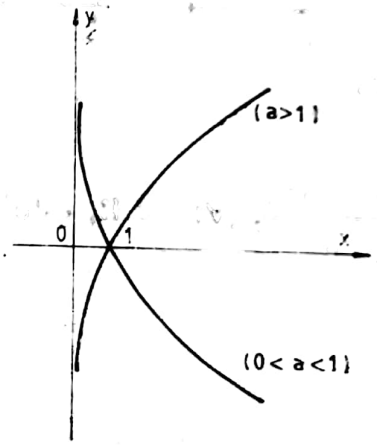
$$\boxed{y = a^n}$$

$$y = a^x \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a y = x \\ y > 0 \end{cases}$$

Fig. 149

1.14. *Funcția logaritmică* (fig. 150).
$f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log_a x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$ $(a > 0,\ a \neq 1$, fixat)
Funcția logaritmică este inversa funcției exponențiale

$$\lim_{x \searrow 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } a > 1 \\ +\infty & \text{„ } 0 < a < 1 \end{cases}; \quad \lim_{x \leftarrow a} \log_a x = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a > 1 \\ -\infty & \text{„ } 0 < a < 1 \end{cases}$$

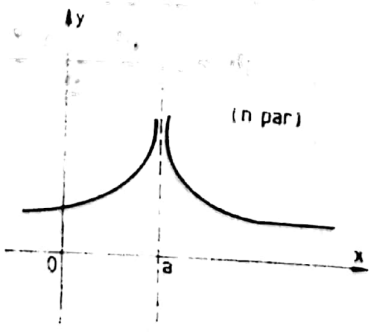


$$\boxed{y = \log_a x}$$

$$y = \log_a x \Leftrightarrow \exp_a y = x$$

Fig. 150

1.15. *Funcția putere*
(i) $f(x) = (x - a)^{-n}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{a\}$ $(a \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{N}$ fixați) (fig. 151).



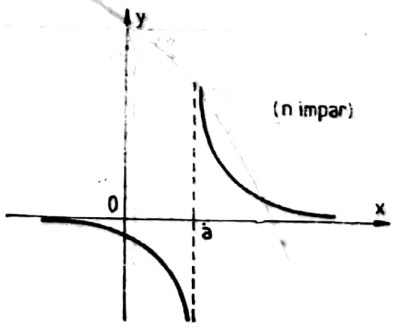


Fig. 151

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \nearrow a} f(x) = -\infty$$

(ii) $f(x) = (x - a)^n$, $x \in \mathbf{R}$ ($a \in \mathbf{R}$ şi $n \in \mathbf{N}$ fixaţi) (fig. 152).

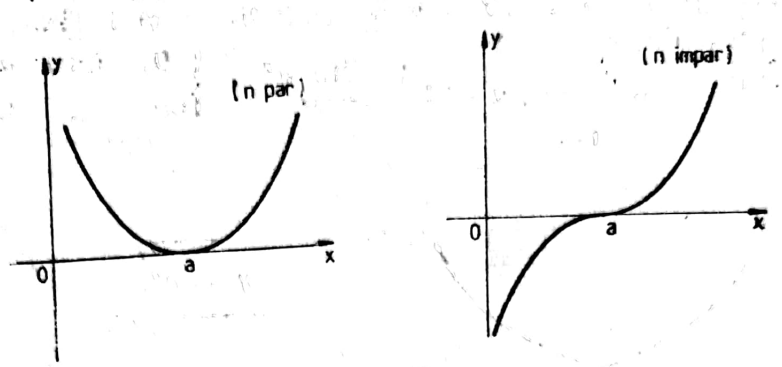


Fig. 152

(iii) $f(x) = |x - a|^p$, $x \in \mathbf{R}$ ($a \in \mathbf{R}$ şi $p \in \mathbf{R}_+^*$ fixaţi) (fig. 153).

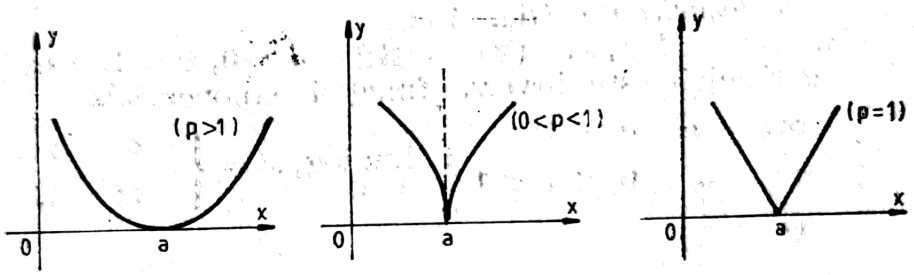
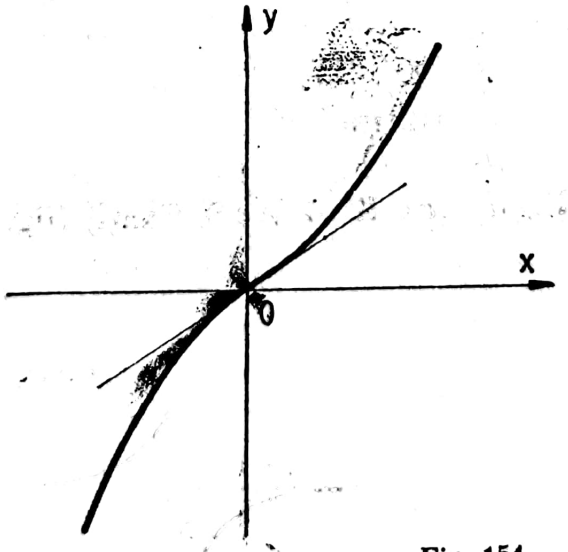


Fig. 153

1.16. *Sinus hiperbolic* (fig. 154).

sh : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definit astfel $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, este o funcţie bijectivă, strict crescătoare şi impară.



$$\boxed{y = \operatorname{sh} x}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

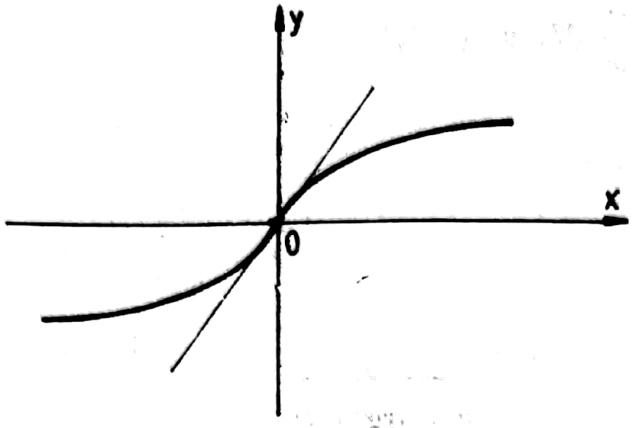
Fig. 154

1.17. *Argument de sinus hiperbolic* (fig. 155).

arg sh : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este inversa funcţiei sh.

Scanned with OKEN Scanner

Avem $\operatorname{arg\,sh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$



$\boxed{y = \operatorname{arg\,sh} x}$

$y = \operatorname{arg\,sh} x \Leftrightarrow \operatorname{sh} y = x$

Fig. 155

Consecință $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) \begin{cases} < x, & \text{dacă } x \in \mathbf{R}_+^* \\ > x & \text{„ } x \in \mathbf{R}_-^* \end{cases}$

1.18. *Cosinus hiperbolic* (fig. 156).

$\operatorname{ch} : \mathbf{R} \to [1, \infty)$ definit astfel $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. este o funcție surjectivă, pară.

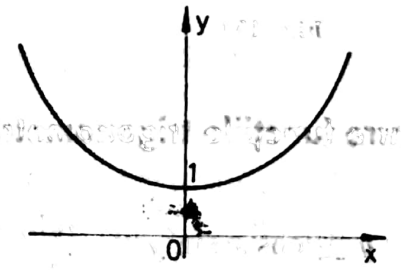


Fig. 156

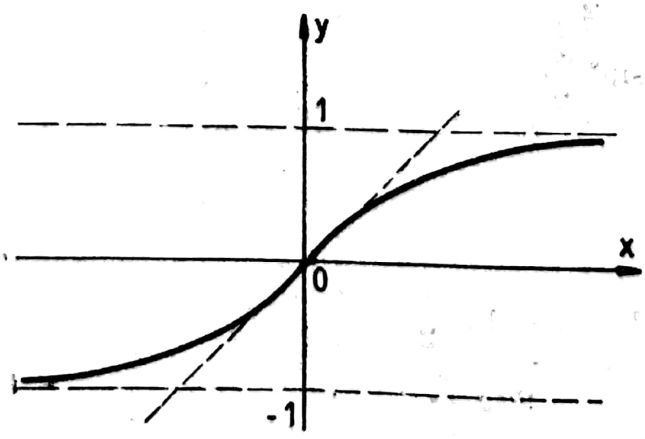
$\boxed{y = \operatorname{ch} x}$

$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\operatorname{arg\,ch} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $x \in [1, \infty)$

1.19. *Tangenta hiperbolică* (fig. 157).

$\operatorname{th} : \mathbf{R} \to (-1, 1)$ definită astfel $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, este o funcție bijectivă strict crescătoare și impară; $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -1$.



$\boxed{y = \operatorname{th} x}$

$\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Fig. 157

12. *Argument de tangentă hiperbolică* (fig. 158).
$\arg \operatorname{th} : (-1,1) \to \mathbf{R}$ este inversa funcţiei th.

Avem $\arg \operatorname{th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ $(\forall)$ $x \in (-1,1)$

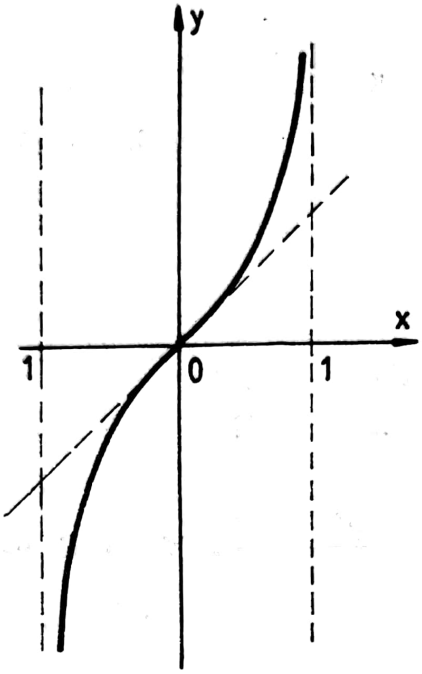


Fig. 158

$\boxed{y = \arg \operatorname{th} x}$

$y = \arg \operatorname{th} x \Leftrightarrow \operatorname{th} y = x$

Ap. 2. Relaţii între funcţiile trigonometrice

2.1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2.2. $\sin (x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

2.3. $\cos (x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

2.4. $\operatorname{tg} (x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$

2.5. $\operatorname{ctg} (x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y}$

2.6. $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

2.7. $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$

2.8. $\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

2.9. $\operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$

Scanned with OKEN Scanner

2.10. $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

2.11. $\sin x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$; $\cos x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

2.12. $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$; $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

2.13. $\sin x \sin y = -\dfrac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)]$

2.14. $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$

2.15. $\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$

2.16. $\sin x \pm \sin y = 2 \sin \dfrac{x \pm y}{2} \cos \dfrac{x \mp y}{2}$

2.17. $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x + y}{2} \cos \dfrac{x - y}{2}$

2.18. $\cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x + y}{2} \sin \dfrac{x - y}{2}$

2.19. $\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \ldots$.

2.20. $\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + \ldots$

În particular $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

2.21. $\cos^n x = \dfrac{1}{2^{n-1}}\left[\cos nx + C_n^1 \cos(n - 2)x + C_n^2 \cos(n - 4)x + \right.$

$\left. + \ldots + C_n^{\frac{n}{2}} \dfrac{1}{2}\right]$ (n — par)

2.22. $\cos^n x = \dfrac{1}{2^{n-1}}[\cos nx + C_n^1 \cos(n - 2)x + C_n^2 \cos(n - 4)x +$

$+ \ldots + C_n^{\frac{n-1}{2}} \cos x]$ (n — impar)

2.23. $\sin^n x = \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}\left[\cos nx - C_n^1 \cos(n - 2)x + \ldots + \right.$

$\left. + (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}} \dfrac{1}{2}\right]$ (n — par)

2.24. $\sin^n x = \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}\left[\sin nx - C_n^1 \sin(n - 2)x + \ldots + \right.$

$\left. + (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^{\frac{n-1}{2}} \sin x\right]$ (n — impar)

Scanned with OKEN Scanner

2.25. $\operatorname{tg} nx = \dfrac{C_n^1 \operatorname{tg} x - C_n^3 \operatorname{tg}^3 x + \ldots}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 x + C_n^4 \operatorname{tg}^4 x \ldots}$

2.26. $\operatorname{arc\,tg} a + \operatorname{arc\,tg} b = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{a+b}{1-ab}, & \text{dacă } ab < 1 \\ \quad,, \quad +\pi \quad ,, & a,b > 0 \text{ și } ab > 1 \\ \quad,, \quad -\pi \quad ,, & a,b < 0 \text{ și } ab > 1 \end{cases}$

Ap. 3. Relații între funcțiile hiperbolice

3.0. $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

$\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $\operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

3.1. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; $\operatorname{ch} x = +\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}$; $\operatorname{sh} x = (\operatorname{sign} x)\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$.

3.2. $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$; $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

3.3. $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}$; $\operatorname{sh} x = \dfrac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}$.

3.4. $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.

3.5. $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$.

3.6. $\operatorname{th}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$.

3.7. $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$; $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

3.8. $\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \dfrac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \dfrac{x \pm y}{2}$.

3.9. $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{ch} \dfrac{x-y}{2}$.

3.10. $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{sh} \dfrac{x-y}{2}$.

3.11. $\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \dfrac{\operatorname{sh}(x+y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}$.

3.12. $(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx$.

3.13. $\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$; $\operatorname{sh}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$.

3.14. $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 y = \operatorname{ch}(x+y) \operatorname{ch}(x-y)$.

3.15. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{sh}(x+y) \operatorname{sh}(x-y)$.

3.16. $\operatorname{ch}^n x = \dfrac{1}{2^{n-1}} [\operatorname{ch} nx + C_n^1 \operatorname{ch}(n-2)x + \ldots]$.

3.17. $\operatorname{sh}^n x = \dfrac{1}{2^{n-1}} [\operatorname{sh} nx - C_n^1 \operatorname{sh}(n-2)x + \ldots]$ (n-impar)

Scanned with OKEN Scanner

3.18. $\operatorname{ch} nx = \operatorname{ch}^2 x + C_n^2 \operatorname{ch}^{n-2} x \operatorname{sh}^2 x + \ldots$

3.19. $\operatorname{sh} nx = C_n^1 \operatorname{ch}^{n-1} x \operatorname{sh} x + C_n^3 \operatorname{ch}^{n-3} x \operatorname{sh}^3 x + \ldots$

3.20. $\operatorname{sh} x = \dfrac{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}$; $\operatorname{ch} x = \dfrac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}$; $\operatorname{th} x = \dfrac{2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}$.

Ap. 4. Identităţi trigonometrice

4.1.
$$\begin{cases} \cos\theta + \cos(\theta+h) + \ldots + \cos(\theta+(n-1)h) = \dfrac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \cos\left(\theta + \dfrac{n-1}{2}h\right) \\ \sin\theta + \sin(\theta+h) + \ldots + \sin(\theta+(n-1)h) = \dfrac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \sin\left(\theta + \dfrac{n-1}{2}h\right) \end{cases}$$

Corolar 1.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \\ \sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \ldots + \sin(2n+1)\theta = \dfrac{\sin^2(n+1)\theta}{\sin\theta} \end{cases}$$

4.2. Dacă $\begin{cases} s_n = \cos\theta + a\cos(\theta+h) + \ldots + a^n\cos(\theta+nh) \\ \sigma_n = \sin\theta + a\sin(\theta+h) + \ldots + a^n\sin(\theta+nh), \end{cases}$

atunci

$$s_n = \frac{\cos\theta - a\sin(\theta-h) - a^{n+1}\sin(\theta+(n+1)h) + a^{n+2}\sin(\theta+nh)}{1 - 2a\cos h + a^2}.$$

$$\sigma_n = \frac{\sin\theta - a\sin(\theta-h) - a^{n+1}\sin(\theta+(n+1)h) + a^{n+2}\sin(\theta+nh)}{1 - 2a\cos h + a^2}$$

4.3. $\cos\theta \cdot \cos 2\theta \ldots \cos 2^{n-1}\theta = \dfrac{\sin 2^n\theta}{2^n \sin\theta}$

4.4. $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \dfrac{n}{2^{n-1}}$

4.5. $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \dfrac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{2}{2^n} - \operatorname{ctg} x$, dacă $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ap. 5. Cîteva formule din algebră

5.1. $\min\{a,b\} = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$, $\max\{a,b\} = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$

$a^+ = \max\{a,0\} = \dfrac{a+|a|}{2}$, $a^- = \max\{-a,0\} = -\min\{a,0\} = \dfrac{-a+|a|}{2}$, $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$

5.2. *Formulele lui Viète*

Fie ecuația $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ $(a_0 \neq 0)$ și $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile sale. Atunci au loc relațiile:

$$\sum_i x_i = -\frac{a_1}{a_0},\quad \sum_{i<j} x_ix_j = -\frac{a_2}{a_0},\quad \ldots,\quad x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

5.3. *Binomul lui Newton*

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^n b^n,$$

unde $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}$ (coeficienții binomiali)

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k=0\\ n_1+n_2+\ldots+n_k=n}}^{n} \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\, a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_k^{n_k},$$

deci

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\, a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_k^{n_k} \leqslant (a_1+a_2+\ldots+a_k)^n,\ (\forall)\ a_i \in \mathbf{R}_+$$

și $n_1 + \ldots + n_k = n$

5.4. *Suma puterilor primelor n numere naturale*

Fie $S_n^{(p)} = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p$ $(n \geqslant 1,\ p \geqslant 0)$. Atunci

$$S_n^{(0)} = n;\quad S_n^{(1)} = \frac{n(n-1)}{2};\quad S_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$S_n^{(3)} = [S_n^{(1)}]^2 = \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2;\ S_n^{(4)} = \frac{4n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.$$

Cuncoscînd $S_n^{(0)}, S_n^{(1)}, \ldots S_n^{(p-2)}$, deducem pe $S_n^{(p-1)}$, $(\forall)\ p \geqslant 2$, din relația recursivă următoare numită *formula lui Pascal*:

$$(n+1)^p = 1 + C_p^1 S_n^{(p-1)} + C_p^2 S_n^{(p-2)} + \ldots + C_p^{p-1} S_n^{(1)} + C_p^p S_n^{(0)}$$

5.5. *Determinați*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in\Gamma} (\operatorname{sign}\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde Γ_n este mulțimea tuturor permutărilor σ ale mulțimii $\{1,2\ldots,n\}$ iar sign σ este semnul permutării σ; $\operatorname{sign}\sigma = +1$ (resp. 1), dacă σ are un număr par (resp. impar) de inversiuni.

5.6. *Logaritmi*

$$\lg_b x = \lg_b a \cdot \lg_a x, \ (\forall)\ a,b \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\} \wedge x \in \mathbf{R}_+^*$$

$$\lg x = \lg e \cdot \ln x = 0{,}4329 \ln x, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*,$$

unde lg = logaritm în baza 10 și ln = logaritm în baza e.

5.7. *Progresii*

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ în progresie *aritmetică*. Atunci

$$a_n = a_1 + (n-1)r \ (r\text{-rația}); \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Fie $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$ în progresie *geometrică*. Atunci

$$b_n = b_1 q^{n-1} (q - \text{rația}); \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}; \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}, \ (|q| < 1).$$

5.8. *Descompunerea funcțiilor raționale.*

a) *Teoremă.* Fie $\frac{P}{Q}$ o funcție rațională a.î. grad $P <$ grad Q.

1° Dacă Q are toate rădăcinile reale și distincte, adică $Q(x) = b(x-x_1)\times$ $\times(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, $(x_i \in \mathbf{R})$, atunci $\frac{P}{Q}$ admite o descompunere unică în fracții simple de forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C_1}{x-x_1} + \frac{C_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{C_n}{x-x_n} \tag{1}$$

unde $C_i \in \mathbf{R}$.

2° Dacă Q are toate rădăcinile reale (multiple sau nu) adică $Q(x) = b(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_k)^{\alpha_k}$ $(x_i \in \mathbf{R},\ \alpha_i \in \mathbf{N})$, atunci P admite o descompunere unică în fracții simple de forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{\alpha_1-1}} + \ldots + \frac{A^{\alpha_1}}{x-x_1} + \\ & + \frac{B_1}{(x-x_2)^{\alpha_2}} + \frac{B_2}{(x-x_2)^{\alpha_2-1}} + \ldots + \frac{B_{\alpha_2}}{x-x_2} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{L_1}{(x-x_k)^{\alpha_k}} + \frac{L_2}{(x-x_k)^{\alpha_k-1}} + \ldots + \frac{L_{\alpha_k}}{x-x_k} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

unde $A_i, B, \ldots L_i \in \mathbf{R}$.

3° Dacă Q are toate rădăcinile complexe adică

$$Q(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)^{\alpha_1} \ldots (a_kx^2 + b_kx + c_k)^{\alpha_k} \ (a_i, b_i, c_i \in \mathbf{R},$$

Scanned with OKEN Scanner

$\alpha_i \in \mathbf{N}$ și $b_i^2 - 4a_i c_i < 0$) atunci $\frac{P}{Q}$ admite o descompunere unică în fracții simple de forma:

$$\left.\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = &\frac{A_1 x + A_1'}{(a_1^1 + b_1 x + c_1)^{\alpha_1}} + \ldots + \frac{A_\alpha x + A_\alpha'}{(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)} + \\ &+ \frac{B_1 x + B_1'}{(a_2 x^2 + b_2 x + c_2)^{\alpha_2}} + \ldots + \frac{B_\alpha x + B_\alpha'}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2} + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{L_1 x + L_1'}{(a_k x^2 + a_k x + c_k)^{\alpha_k}} + \ldots + \frac{L_\alpha x + L_\alpha'}{a_k x^2 + b_k x + c_k}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

unde $A_i, A_i', B_i, B_i', \ldots, L_i, L_i' \in \mathbf{R}$

4° Dacă Q are și rădăcini reale și rădăcini complexe, atunci $\frac{P}{Q}$ admite o descompunere unică într-un tablou de forma (2) plus un tablou de forma (3).

Observație Coeficienții necunoscuți din descompunere (1), (2) și (3) se deduc dînd lui x un număr de valori particulare egal cu numărul coeficienților necunoscuți.

b) *Formula lui Lagrange.* Fie $\frac{P}{Q}$ o funcție rațională în care grad $P <$ < grad Q iar Q are rădăcini reale și distincte $Q(x) = \lambda(x - x_1)(x - x_2) \ldots$ $\ldots (x - x_n)$. Atunci avem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x - x_i}, \text{ unde } c_i = \frac{P(x_i)}{Q'(x_i)} \; (i = \overline{1, n})$$

c) Pentru funcțiile raționale de forma $\frac{P(x)}{(x - x_0)^\alpha}$ cu ajutorul formulei lui Taylor obținem descompunerea:

$$\frac{P(x)}{(x - x_0)^\alpha} = \frac{P(x_0)}{(x - x_0)^\alpha} + \frac{P'(x_0)}{1!(x - x_0)^{\alpha-1}} + \frac{P''(x_0)}{2!(x - x_0)^{\alpha-2}} + \ldots$$

d) Fie $\frac{P}{Q}$ o funcție rațională, $Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \ldots (x - x_p)^{\alpha_p}$. Să determinăm o constantă C a.î.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \frac{P_1(x)}{(x - x_1)^{\alpha_1 - 1}\varphi(x)},$$

unde $\varphi(x) = (x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x - x_p)^{\alpha_p}$, $(\forall)\; x \in \mathbf{R}$. Evident avem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \left[\frac{P(x)}{(x - x_1)^{\alpha_1}\varphi(x)} - \frac{C}{(x - x_1)^{\alpha_1}}\right] =$$

$$= \frac{C}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \frac{P(x) - C\varphi(x)}{Q(x)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Determinăm pe C prin condiția ca x_1 să fie rădăcină a lui $P - C\varphi$, deci $C = \frac{P(x_1)}{Q(x_1)}$. Atunci $P_1(x) = \frac{P(x) - C\varphi(x)}{x - x_1}$ și grad $P_1 = \text{grad } P - 1$.

Efectuînd acest procedeu de α_1 ori obținem:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C_{\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \frac{C_{\alpha_1 - 1}}{(x - x_1)^{\alpha_1 - 1}} + \ldots + \frac{C_1}{x - x_1} + \frac{P_{\alpha_1}(x)}{(x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x - x_p)^{\alpha_p}}$$

Se continuă apoi procedeul pentru a două rădăcină etc.

Ap. 6. Cîteva inegalități remarcabile

6.1. $|\sin a - \sin b| \leqslant |a - b|$, $(\forall)$ $a, b \in \mathbf{R}$

6.2. $e^x > 1 - x$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}^*$

6.3. Fie $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbf{R}$ și $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbf{R}_+^*$. Atunci avem:

$$\min\{x_1, x_2, \ldots x_n\} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \leqslant \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

6.4. *Identitatea lui Lagrange*

Fie $a_1, a_2, \ldots a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$. Atunci avem:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

Corolar 1 (Inegalitatea lui Cauchy)

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$

6.5. *Inegalitatea mediilor*

Fie $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbf{R}_+^*$. Atunci avem:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

6.6. *Inegalitatea mediilor ponderate*

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbf{R}_+^*$. Atunci avem:

$$(a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}} \leqslant \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}$$

6.7. *Inegalitatea Bernoulli.*

Fie $\{a_1, a_2, \ldots a_n\} \subseteq (-1, 0]$ sau $\{a_1, a_2, \ldots a_n\} \subseteq [0, \infty]$. Atunci avem;

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Scanned with OKEN Scanner

6.8. *Inegalitatea lui Cebîşev*

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$ cu proprietatea că $a_i \leqslant a_j \Leftrightarrow b_j \leqslant b_j$, $(\forall)\ i, j = \overline{1,n}$. Atunci $(\forall)\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}_+^*$, avem :

$$\frac{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} \cdot \frac{\lambda_1 b_1 + \ldots \lambda_n b_n}{\lambda_1 + \lambda_n} \leqslant \frac{\lambda_1 a_1 b_1 + \ldots + \lambda_n a_n b_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}$$

6..9. *Inegalitatea lui Hölder* (pentru sume).

Fie $a_i, b_i \in \mathbf{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $0 < p \neq 1$ şi $q = \frac{p}{1-p}$. Atunci avem :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant (\text{resp. } \geqslant) \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{1/q}$$

dacă $1 < p < \infty$ (resp. $0 < p < 1$ şi $b_i \neq 0$, $(\forall)\ 1 \leqslant i \leqslant n$).

6.10. *Inegalitatea lui Minkowski* (pentru sume).

Fie $a_i, b_i \in \mathbf{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ şi $p \geqslant 1$. Atunci avem :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{1/p}$$

6.11. *Inegalitatea lui Hölder* (pentru integrale).

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcţii continue, $p > 1$ şi $q = \frac{p}{1-p}$. Atunci avem :

$$\int_a^b |fg| \, dx \leqslant \left(\int_a^b |f|^p \, dx \right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g|^p) \, dx \right)^{1/q}$$

6.12. *Inegalitatea lui Buniakovski* (pentru integrale).

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcţii continui. Atunci avem :

$$\int_a^b |fg| \, dx \leqslant \left(\int_a^b (|f|^2 \, dx)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |g|^2 \, dx \right)^{1/2} \right.,$$

6.13. *Ienegalitatea lui Minkowski* (pentru integrale)

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcţii continue şi $p \geqslant 1$. Atunci avem :

$$\left(\int_a^b |f + g|^p \, dx)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p \, dx)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p \, dx \right)^{1/p} \right.$$

6.14. *Inegalitatea lui Young*

Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie continuă strict crescătoare şi cu $f(0) = 0$. Atunci avem :

$$ab \leqslant \int_0^a f(x) \, dx + \int_0^b f^{-1}(y) \, dy, \ (\forall)\ a \in [0, \infty) \text{ şi } b \in f([0, \infty)).$$

6.15. *Inegalitatea lui Jensen* (pentru integrale).

Fie $I, J \subseteq \mathbf{R}$ două intervale şi $f : I \to J$, $g : J \to \mathbf{R}$ două funcţii astfel încît f este continuă şi g este convexă. Atunci avem :

$$g\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \right) \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b g(f(x)) \, dx, \ (\forall), a, b \in I, a < b.$$

Scanned with OKEN Scanner

Corolar 1.

Fie $I, J \subseteq \mathbf{R}$ două intervale și $f: I \to J, g: J \to \mathbf{R}$ două funcții a.î. f este continuă și g este de două ori derivabilă cu $g'' \geqslant 0$. Atunci avem :

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))\,dx,\ (\forall)\ a, b \in I,\ a < b.$$

Ap. 7. Cîteva curbe remarcabile din geometrie

7.1. *Dreapta.*

= Ecuația dreptei care trece prin (x_0, y_0) și are panta m :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

— Eecuația segmentară a dreptei :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

— Alte forme ale ecuației unei drepte :

$$y = mx + n;\ Ax + By + C = 0$$

7.2. *Cercul*

— Ecuația cercului cu centrul în (x_0, y_0) și de rază r, în coordonate carteziene :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

— Ecuațiile parametrcice ale cercului cu centrul în (x_0, y_0) și de raza r :

$$x = x_0 + r\cos t,\ y = y_0 + r\sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

— Ecuația cercului cu centrul în origine și de rază r, în coordonate polare :

$$q(\theta) = r,\ (\forall)\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

Elipsa

— Ecuația elipsei de semiaxe a și b în coordonate carteziene :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— Ecuațiile parametrice al elipsei de semiaxe a și b (fig. 159) :

$$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

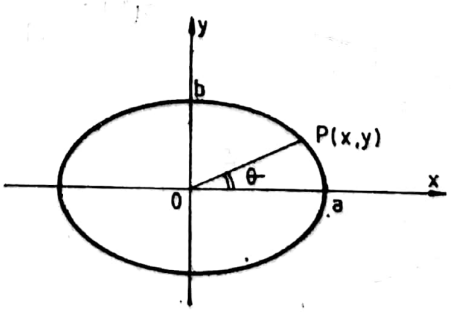
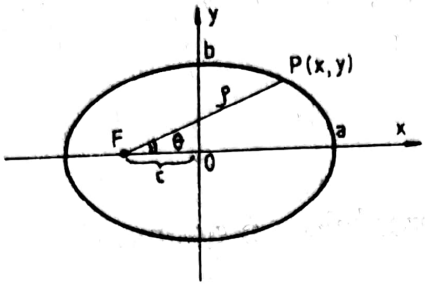


Fig. 159

Scanned with OKEN Scanner

— Ecuația elipsei în coordonate polare (fig. 160) :



$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

$$e = \frac{c}{a} < 1 \text{ (excentricitatea)}$$

$$c^2 = a^2 - b^2; \quad p = \frac{b^2}{a}$$

Fig. 160

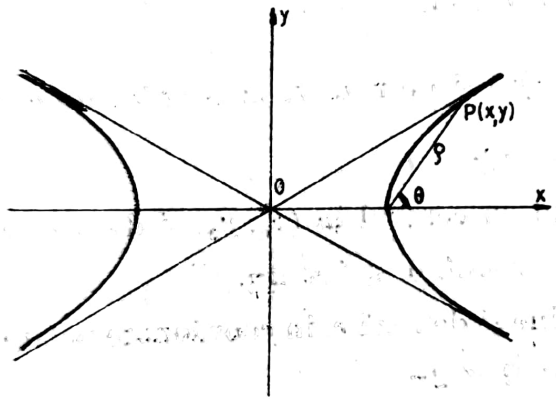
7.4. *Hiperbola* (fig. 161) :
— Ecuația hiperbolei în coordonate carteziene :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— Ecuațiile parametrice ale hiperbolei (ramura pozitivă) :

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \; y = \mathrm{sh},\, t, \, t \in \mathbf{R}_+^*$$

— Ecuația hiperbolei în coordonate polare :



$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

$$P(x, y) \; e = \frac{c}{a} > 1 \quad \text{(excentricitatea)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2; \; p = \frac{b^2}{a}$$

Fig. 161

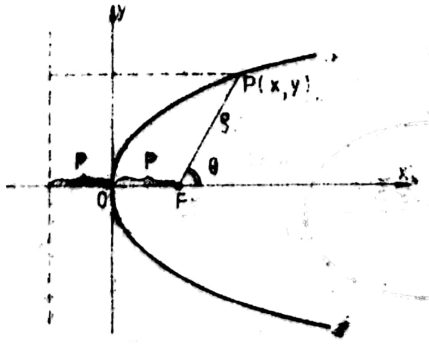
— Ecuația hiperbolei echilatere :

$$x^2 - y^2 = 1$$

7.5. *Parabola* (fig. 162) :
— Ecuația parabolei în coordonate carteziene :

$$y^2 = 2px$$

— Ecuația parabolei în coordonate polare :



$$\rho(\theta) = \frac{P}{1 - \cos\theta}$$

Fig. 162

Scanned with OKEN Scanner

7.6. *Cicloida* (fig. 163).

— Ecuațiile parametrice ale cicloidei :

$$x = r(t - \sin t),\ y = r(1 - \cos t),\ t \in \mathbf{R}$$

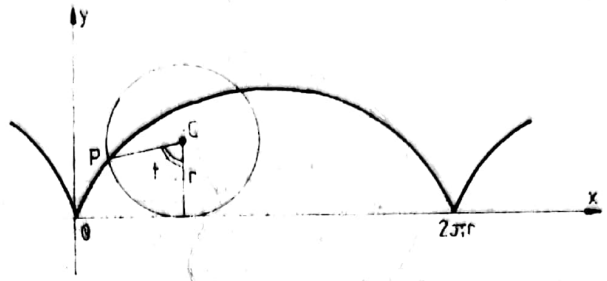


Fig. 163

Observație. Cicloida este locul geometric al punctului P, cînd cercul C se rotește fără alunecare.

7.7. *Lemniscata* (fig. 164).

— Ecuația lemniscatei în coordonate carteziene :

$$(y^2 + x^2)^2 = 2a^2(y^2 - x^2)$$

— Ecuația lemniscatei în coordonate polare :

$$\rho^2(\theta) = 2a^2 \cos 2\theta,\ -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \text{ (prima buclă)}$$

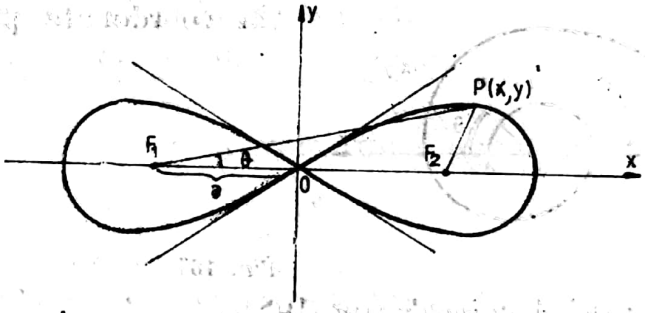


Fig. 164

Observație. Lemniscata este locul geometric al punctelor P a.î. $\overline{PF_1}\ \overline{PF_2} = \left(\frac{\overline{F_1F_2}}{2}\right)^2 = a^2$.

7.8. *Astroida* (fig. 165).

— Ecuația astroidei în coordonate carteziene :

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

— Ecuația parametrică a astroidei :

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

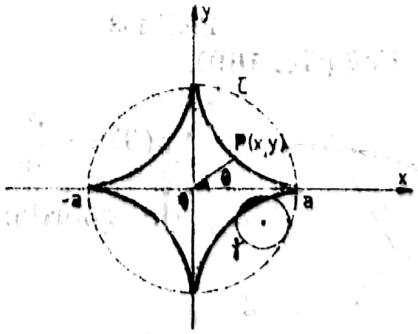


Fig. 165

Observație. Astroida este locul geometric al punctelor P cînd cercul γ de rază $\frac{a}{4}$ se rotește pe cercul C de rază a fără alunecare.

7.9. *Cardioida* (fig. 166).
— Ecuația cardiodei în coordonate polare :

$$\rho(\theta) = a(1 - \cos\theta), \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$$

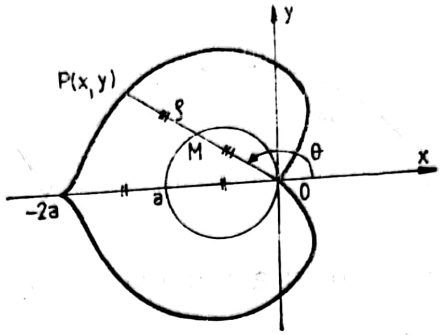
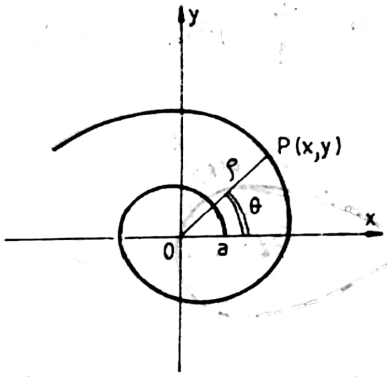


Fig. 166

Observație. Cardioida este locul geometric al punctelor P a.î. $\overline{OM} = \overline{MP}$ cînd $\theta \in (0,2\pi)$.

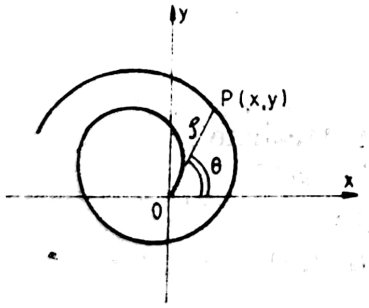
7.10 *Spirala logaritmică* (fig. 167).



$\rho(\theta) = a\, e^{\theta}$, $\theta \in \mathbf{R}_+^*$
(în coordonate polare)

Fig. 167

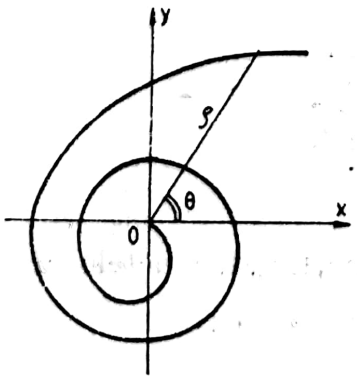
7.11. *Spirala lui Arhimede* (fig. 168).



$\rho(\theta) = a\theta$, $\theta \in \mathbf{R}_+^*$
(în coordonate polare)

Fig. 168

7.12. *Spirala hiperbolică* (fig. 169).



$\rho(\theta) = \dfrac{a}{\theta}$, $\theta \in \mathbf{R}_+$
(în coordonate polare)

Fig. 169

7.13. *Strofoida* (fig. 170).

— Ecuația strofoidei în coordonate carteziene :

$$f(x) = \pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}},\ -a \leqslant x < a\,;\ g(x) = \pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}},\ -a < x \leqslant a$$

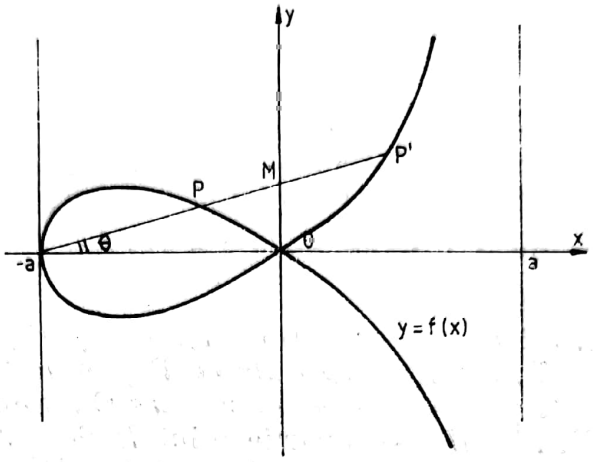


Fig. 170

Cum $g(x) = -f(-x)$ $(\forall) - a < x \leqslant a$, graficul lui g este simetric graficului lui f față de origine și deci față de axa Oy.

— Ecuația strofoidei în coordonate polare :

$$\rho(\theta) = \frac{a(1 \pm \sin\theta)}{\cos\theta},\quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

Observație. Strofoida este locul geometric al punctelor P și P' pentru care $\overline{MP} = \overline{MP'} = \overline{MO}$ cînd $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

7.14. *Foliumul lui Descartes* (fig. 171).

— Ecuația foliumului în coordonate carteziene :

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

— Ecuația buclei foliumului în coordonate polare :

$$\rho(\theta) = \frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta},\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

— Ecuația parametrică a buclei foliumului :

$$x(t) = \frac{3at}{1+t^3};\quad y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3},\ t \in \mathbf{R}_+^* \text{ (dacă } y = tx)$$

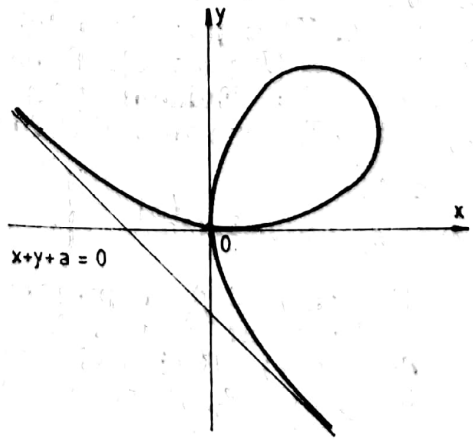


Fig. 171

APENDICE 2

A.2.1. Exerciţiu. *Să se arate că există* $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ *o partiţie a lui* $\mathbf{R}$ *de puterea continuumului i.e.* $L \sim \mathbf{R}$, *cu* A_λ *echipotentă cu* $\mathbf{R}$ *şi densă în* $\mathbf{R}$, $(\forall)\ \lambda \in L$.

Soluţie $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$ punem $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Q}$; avem $\mathbf{R}/\sim = (h+\mathbf{Q})_{h\in H}$, unde $H \subseteq \mathbf{R}$ *şi* $H \sim \mathbf{R}$. Fie $(H_\lambda)_{\lambda\in L}$ o parţie a lui H de puterea continuumului cu $H_\lambda \sim H$, $(\forall)\ \lambda \in L$. Punem $A_\lambda := H_\lambda + \mathbf{Q}\ (\lambda \in L)$. Evident $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ satisface proprietăţile din enunţ.

A.2.2. Exerciţiu (Lebesgue). *Să se arate că există* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *discontinuă pe* $\mathbf{R}$ *şi care are proprietatea Darboux.*

Soluţie $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$ punem $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Q}$. Evident relaţia $\sim$ este o relaţie de echivalentţă pe $\mathbf{R}$, deci $(\exists)\ H \subseteq \mathbf{R}$ a.î. $\mathbf{R}/\sim = (h + \mathbf{Q})_{h\in H}$. Deoarece fiecare $h + \mathbf{Q}\ (h \in H)$ este numerabilă şi $\bigcup_{h\in H} (h + \mathbf{Q}) = \mathbf{R}$, rezultă că H este nenumerabilă, deci $H \sim \mathbf{R}$ şi deci există o bijecţie $\mathbf{R} \ni r \mapsto h_r \in H$. Notînd $A_r := h_r + \mathbf{Q}\ (r \in \mathbf{R})$, obţinem familia $(A_r)_{r\in\mathbf{R}}$ care este o partiţie a lui $\mathbf{R}$ cu A_r densă în $\mathbf{R}$, $(\forall)\ r \in \mathbf{R}$. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $f|_{A_r} = r$. Să arătăm că f are proprietăţile din enunţ.

Într-adevăr, $(\forall)\ J \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $(\forall)\ r \in \mathbf{R}$, avem $I \cap A_r \neq \emptyset$, deci $f(J) \supseteq f(J \cap A_r) \ni r$ şi deci $f(J) = \mathbf{R}$, încît (P. 4.3.2.) f are proprietatea Darboux. În fine f este discontinuă pe $\mathbf{R}$: fixăm $x_0 \in \mathbf{R}$ şi $\varepsilon > 0$; atunci $(\forall)\ \eta > 0$, avem $U := (x_0 - \eta,\ x_0 + \eta) \in \mathcal{V}(x_0)$ şi $f(U) = \mathbf{R} \not\subseteq (f(x_0) - f(x_0) + \varepsilon)$, deci f discontinuă în x_0 (cf. T. 5.5.7.(3°)).

A.2.3. Exerciţiu (Sierpinski) *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie arbitrară. Atunci există* $f_1, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *două funcţii discontinue pe* $\mathbf{R}$ *şi care au proprietatea Darboux a.î.* $f = f_1 + f_2$

Soluţie. $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$ punem $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Q}$; avem $\mathbf{R}/\sim = (h+\mathbf{Q})_{h\in H}$ unde $H \subseteq \mathbf{R}$ şi $H \sim \mathbf{R}$. Fie $\{L, K\}$ o partiţie a lui H cu $L \sim K \sim H$, deci putem scrie $L = \{l_r;\ r \in \mathbf{R}\}$, $K = \{k_s;\ s \in \mathbf{R}\}$. Punem mai departe $A_r := h_r + \mathbf{Q}$, $B_s := k_s + \mathbf{Q}\ (r, s \in \mathbf{R})$. Evident $(A_r)_{r\in\mathbf{R}} \cup (B_s)_{s\in\mathbf{R}}$ constituie o partiţie a lui $\mathbf{R}$. Fie $f_1, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcţii definite astfel

$$f_1(x) = \begin{cases} r, & x \in A_r \\ f(x) - s, & x \in B_s \end{cases};\quad f_2(x) = \begin{cases} f(x) - r, & x \in A_r \\ s, & x \in B_r \end{cases}$$

Evident $f = f_1 + f_2$. Să arătăm că f_1 şi f_2 au proprietatea Darboux. Într-adevăr, fie $J \subseteq \mathbf{R}$ nu interval nedegenerat. Atunci $(\forall)\ r \in \mathbf{R}$ avem $J \cap A_r \neq \emptyset$, deci $f_1(J) \supseteq f_1(J \cap A_r) \ni r$, deci $f_1(J) = \mathbf{R}$ şi deci (*P.*4.3.2) f_1 are proprietatea Darboux. Raţionament analog pentru f_2. Se vede imediat (T.5.5.7.(3°)) că f_1 şi f_2 sînt discontinue.

Scanned with OKEN Scanner

Corolar 1. *Fie* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci* $(\exists)\ f_1, f_2:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *două funcții discontinue pe* $\mathbf{R}$ *a.î.* $f=f_1+f_2$

A.2.4. Exercițiu. *Fie* $a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$ *și* $A=\bigcup[na,nb]$. *Atunci* $A=\mathbf{R}$ *sau* $(\exists)\ c\in\mathbf{R}_+$ *cu* $A\supseteq[c,\infty)$ *sau* $(\exists)\ c\in\mathbf{R}_-$ *cu* $A\supseteq(-\infty,c]$.

Soluție. 1° Presupunem $a<0<b$ și fie $x\in\mathbf{R}$ fixat. Atunci $V=[a,b]$ este o vecinătate a lui 0 și $\frac{1}{n}x\to 0$ $(n\to\infty)$, deci $(\exists)\ N\geqslant 1$ a.î. $\frac{1}{N}x\in V\Leftrightarrow x\in[Na,Nb]$ și deci $x\in A$ etc.

2° Presupunem $0\leqslant a<b$. Atunci $n(b-a)\to\infty$, deci $(\exists)\ N\geqslant 1$ cu $a<n(b-a)$, $(\forall)\ n\geqslant N$ și deci $(n+1)a<nb$, $(\forall)\ n\geqslant N$, de unde rezultă că $[n-a,\ nb]\cap[(n+1)\ a,\ (n+1)b]\neq\emptyset$, prin urmare

$$[Na,\infty)\subseteq\bigcup_{n\geqslant N}[na,nb]\subseteq\bigcup_{n\geqslant 1}[na,nb]$$

3° Dacă $a<b\leqslant 0$, se arată că $(\exists)\ c\in\mathbf{R}_-$ cu $(-\infty,c]\subseteq A$

A.2.5. Exercițiu. (Lema lui Croft): *Fie* $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ *o funcție continuă cu proprietatea că* $\lim\limits_{x\to\infty}f(nx)=0$ $(\forall)\ x\in(a,b)\subseteq\mathbf{R}_+$. *Atunci* $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

Soluție. Fie $\varepsilon>0$ fixat, $A_n=\{x\in(a,b);\ |f(kx)|\leqslant\varepsilon,\ (\forall)\ k\geqslant n\}$ și $B_k:=\{x\in(a,b);\ |f(kx)|\leqslant\varepsilon\}$. Evident B_k este închisă (deoarecé f este continuă) și $A_n=\bigcap\limits_{k\geqslant n}B_k$, deci A_n este închisă. Să arătăm că $(a,b)=\bigcup\limits_{k\geqslant 1}A_n$ (1). Într-adevăr, dacă $x\in(a,b)$ este fixat, din ipoteză rezultă că $f(nx)\to 0$ $(n\to\infty)$, deci $(\exists)\ N\geqslant 1$ a.i. $|f(nx)|\leqslant\varepsilon$, $(\forall)n\geqslant N$ și deci $x\in A_N$, încît $(a,b)\subseteq\bigcup\limits_{n\geqslant 1}A_n$ etc.. Din (1) și din th. Baire rezultă că $(\exists)\ n_0\geqslant 1$ cu $\mathring{A}_{n_0}\neq\emptyset$, deci $(\exists)\ x_0\in A_{n_0}$ și V o vecinătate a lui x_0 cu $V\subseteq A_{n_0}$. Această înseamnă că $|f(kx)|\leqslant\varepsilon$, $(\forall)x\in V$ și $k\geqslant n_0$. Cum însă $\bigcup\limits_{k\geqslant n_0}(kV)$ include o mulțime de forma $[c,\infty)$ cu $c\in\mathbf{R}$, rezultă că $|f(y)|\leqslant\varepsilon$, $(\forall)\ y\in[c,\infty)$, prin urmare $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

A.2.6. Exercițiu. *Fie* $f:(a,\infty)\to\mathbf{R}$ *o funcție derivabilă, concavă și monoton crescătoare. Atunci* $(\forall)\ r>0$ *șirul* $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f'(a+rk)-f(a+rn)$ $(n\geqslant 1)$ *este convergent.*

Soluție. Dacă $f\leqslant 0$, considerăm șirul asociat funcției $-f$, care coincide cu șirul $(-x_n)_{n\geqslant 1}$. Dacă f ia atît valori pozitive cît și valori negative, există $n_0\geqslant 1$ a.î. $f(x)\geqslant 0$, $(\forall)\ x\geqslant a+rn_0$. Așadar schimbînd f cu $-f$ sau considerînd șirul $(x_n)_{n\geqslant n_0}$, putem presupune că $f\geqslant 0$.

Funcția f fiind concavă și derivabilă, rezultă (P. 7.1.5.) că f' este monoton descrescătoare. Cum f este monoton crescătoare, avem $f'\geqslant 0$. Notăm $a_n:=a+rn$ $(n\geqslant 1)$; atunci avem

$$x_{n+1}-x_n=f'(a_{n+1})-(f(a_{n+1})-f(a_n))=$$

$$=f'(a_{n+1})-rf'(\xi_n)\leqslant(1-r)f'(a_{n+1})$$

Cum $(f'(a_n))_{n\geqslant 1}$ este un șir monoton descrescător de numere nenegative și $r>0$, rezultă:

$$(1-r)f'(a_{n+1})\leqslant\begin{cases}0, & r\geqslant 1\\ (1-r)f'(a_1), & \text{dacă } 0<r<1\end{cases}$$

Așadar $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton descrescător

Scanned with OKEN Scanner

Mai departe avem

$$f(a_{k+1}) - f(a_k) = rf'(\xi_k) \leqslant rf'(a_k), \ (\forall)\, k \geqslant 1,$$

deci

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} f'(a_k) - f(a_n) \geqslant \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{n} (f(a_{k+1}) - f(a_k)) - f(a_n) =$$

$$= \frac{1}{r}(f(a_{n+1}) - f(a_1)) - f(a_n) \geqslant \left(\frac{1}{r} - 1\right) f(a_n) - \frac{1}{r} f(a_1)$$

Cum $(f(a_n))_{n\geqslant 1}$ este un şir monoton crescător de numere pozitive, avem :

$$\left(\frac{1}{r} - 1\right) f(a_n) \geqslant \begin{cases} 0, \text{ dacă } 0 < r \leqslant 1 \\ \left(\frac{1}{r} - 1\right) b_1, \text{ dacă } r > 1 \end{cases}$$

Cu aceasta am arătat că şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este minorat, prin urmare $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent.

Corolar 1. *Fie* $f : (a, \infty) \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă, concavă şi monoton crescătoare. Atunci* $(\forall)\ r > 0$ *seria* $\sum_{n\geqslant 1} f'(a + rn)$ *este convergentă* $\Leftrightarrow \sup_{n\geqslant 1} |f(a + rn)| < +\infty$

Soluţie. Şirul $x_n := \sum_{k=1}^{n} f'(a + rk) - f(a+rn)$ $(n \geqslant 1)$ fiind convergent, rezultă că seria $\sum_{n\geqslant 1} f'(a + rn)$ este convergentă $\Leftrightarrow$ şirul $\left(\sum_{k=1}^{n} f'(a + rk)\right)_{n\geqslant 1}$ este convergent $\Leftrightarrow$ şirul $(f(a + rn))_{u\geqslant 1}$ este convergent $\Leftrightarrow$ şirul $(f(a + rn))_{u\geqslant 1}$ este mărginit (fiind şi monoton) $\Leftrightarrow \sup_{n\geqslant 1} |f(a + rn)| < +\infty$

Corolar. 2 *Fie* $f : (a, \infty) \to \mathbf{R}$ *o funcţie de două ori derivabilă cu* $f' \geqslant 0$ *şi* $f'' \leqslant 0$. *Atunci* $(\forall)\ r > 0$ *şirul* $x_n := \sum_{k=1}^{n} f'(a + rk) - f(a + rn)$ $(n \geqslant 1)$ *este convergent.*

Soluţie. Deoarece $f' \geqslant 0$ (resp. $f'' \leqslant 0$), rezultă f monoton crescătoare (resp. f concavă). Aplicăm mai departe Ex. A.2.6.

Corolar 3. *Fie* $k \geqslant 1$ *fixat şi* $x_n = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln kn$ $(n \geqslant 1)$. *Atunci* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este convergent. In particular şirul lui Enler* $x_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln n$ $(n \geqslant 1)$ *este convergent.*

Soluţie. Fie $f(x) = \ln x$, $x \in (0, \infty)$. Atunci $f' > 0$ şi $f'' < 0$, deci din Cxor. 2 rezultă că şirul

$$x_n := \sum_{j=1}^{n} f'(kj) - f(kn) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln kn, \ (n \geqslant 1)$$

este convergent.

Scanned with OKEN Scanner

INDICE DE AUTORI

Acu, *D.* : 2.3.49. ; 5.5.81.
Alexandrescu, I. : 2.3.43.
Andreescu, T. : 2.3.110. ; 2.3.156.
Andrica, D. 2.3.79.
Apostol, C. : 9.2.78.

Banea, *H.* : 2.3.64. ; 2.3.65.
Berr, E. : 2.3.147.
Boboc, N. : 7.2.6.
Bușneag, D. : 4.9.2.

Caragea, *C.* : 2.3.18. ; 9.2.36.
Chiriță, M. : 7.2.11. ; 8.2.17. ; 9.1.33. ; 9.2.53. ; 9.2.54.
Chiochio F. : 5.5.91.
Corduneanu, Ad. : 2.3.122.
Coța, A. : 9.2.92.

Dalyay *Pal.* : 9.2.48.
Davison, T. : 3.1.55.
Dietwald, S. : 2.3.70.
Dubisch, R. : 12.3.14.

Egerland, *W.* : 6.4.49.

Foiaș, *C.* : 9.2.74.

Găină, *St.* : 12.1.32.
Gerll, D. & Warnsfell, A. : 9.2.86.
Gleason, A. M. : 5.5.65.
Gologan, R. : 2.3.50. ; 9.2.30. ; 9.2.55.
Gologan, R. & Voiculescu, D. : 12.1.11.

Hejhal, *D. A.* : 12.1.38.

Iacob, *L.* : 6.5.8.
Iliescu, I. : 9.2.51.

Janous, *W.* : 7.1.10. ; 7.2.12. ; 9.2.71.

Kazdan, *T.* : 12.1.36.

Lelijak, *A.* : 7.2.13.
Leonte, A. : 6.1.40.
Lupaș, A. : 6.4.22. ; 7.2.27. ; 9.2.72.
Lupu, N. : 7.2.8.

Mangu, *V.* : 9.1.39.
Matroseuco, V. : 7.2.18.
Miheț, D. & Mârza, M. 9.2.61

Nanu, *I.* : 9.2.50.
Nedelcu, I. : 9.2.20.
Nicula, V. : 9.2.47.
Niculescu L. : 7.1.9.

Oboroceanu, *G. & Popovici, M.* : 9.2.56.
Onofraș, E. : 2.3.42.

Palanciuc, *Gh.* : 4.1.18 (generalizare).
Panaitopol, L. : 2.3.69. ; 2.3.72. ; 2.3.77. ; 2.3.48.
Pătrașcu, V. : 9.2.40.
Popa, E. : 6.4.45.
Popa, S. : 5.5.51.
Popovici, R. : 9.1.34.

Rasza, *Ion.* : 5.5.38.
Rădulescu, M. & Rădulescu, S. : 4.3.7.
Rădulescu, S. : 6.3.8. ; 4.1.13. ; 4.1.14.
Rizescu, Gh. : 6.3.12.

Secläman, *D.* : 7.1.11.
Smith, W. : 6.4.4.

Ştefănescu, *D.* : 4.5.2.

Vlada, *M.* : 6.4.39. ; 9.2.29.
Vernescu, A. : 6.3.16.
Voiculescu, D. : 6.4.47.
Vuza, D. : 5.5.64 (generalizare).

Wilansky, *A.* : 5.5.67.

Zaharia, *Gh.* : 2.3.99.

Admitere în învățământul superior
Fac. de Matematică :
2.3.13. ; 2.3.67. ; 2.3.101. ; 2.3.109. ; 4.6.11. ; 6.1.5. ; 6.1.7*) ; 6.1.9. ; 6.4.11. ; 6.4.12. ; 7.3.10. ; 7.3.27. ; 7.3.35. ; 7.3.36. ; 7.3.41*). ; 9.2.9. Cor. 1 ; 9.2.15. ; etc.
Institute tehnice :
2.3.162. ; 5.3.15. ; 7.3.7. ; 7.3.8. ; 9.1.15 etc.

*) Problema aparține autorului

Scanned with OKEN Scanner

Matematika v škole
2.3.61. ; 2.3.116. ; 2.3.123. ;
2.3.128. ; 2.3.12. Cor. 1 ;
3.1.6. ; 3.1.50. ; 7.2.31. etc.

Olimpiade și concursuri naționale.

2.1.18. Cor. 2 (U.R.S.S.)
2.1.3. (U.R.S.S.)
2.3.73. (Canada)
2.3.105. (S.U.A.)
2.3.117. Cor. 1 (U.R.S.S.)
2.3.118. (U.R.S.S.)
2.4.11. (S.U.A.)
2.4.12. (S.U.A.)
4.1.9. (Anglia)
4.1.12. (Bulgaria)
4.1.18. (S.U.A.)
4.1.23. (R. D. Germană)
4.7.2. (U.R.S.S.)
4.9.5. (S.U.A.)
4.9.8. (caz particular, S.U.A.)
4.9.10. (China)
5.6.17. (U.R.S.S.)
6.1.32. (S.U.A.)
6.1.34. (S.U.A.)
9.2.38. (Ungaria)

Olimpiade și concursuri din România
2.3.50. ; 2.3.54. ; 2.3.64. ;
5.3.13. ; 5.5.38. ; 6.1.4.*) (generalizare) ;
7.2.6. ; 7.2.8. ; 7.3.4. ;
9.1.28*). ; 9.2.30. ; 9.2.55. ;
10.1.4.*) ; 12.1.11. etc.

O.I.M. (Olimpiade internaționale de matematică)

2.1.22. (Iugoslavia)
2.3.111. (Suedia)
2.3.115. (Polonia)
2.3.119. (Anglia)
2.3.120. (Anglia)
2.3.121. (U.R.S.S.)
3.1.52. (Anglia)
4.1.19. (Ungaria)
4.1.25. (Anglia)
4.2.7. (Bulgaria)
4.5.9. (R. F. Germania)
4.6.10. (Bulgaria)
5.5.45. (Bulgaria)
7.3.9. (Cehoslovacia)
7.6.1. (Suedia)

*) Problema aparține autorului.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

[1] *Aramă L., Morozan C.*, Culegere de probleme de calcul diferențial și integral, vol I, Editura Tehnică, București, 1964.

[2] *Bartle R. G., Ionescu—Tulcea C.*,Calculus, Scott, Foresman and Company, 1968.

[3] *Bechenbach E.* and *Bellman R.*, Inequalities, Springer—Verlag, Berlin, 1961.

[4] *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа, Издательство „Наука", Москва, 1975

[5] *Coșniță C., Turloiu F.*, Culegere de probleme de analiză matematică, Editura Tehnică, București, 1962.

[6] *Craiu M., Roșculeț M. N.*, Culegere de probleme de Analiză matematică, Editura Didactică și Pedagogică, București 1978.

[7] *Demidovitch B.*, Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématique, 3-ème edition, Editions Mir, Moscou, 1971.

[8] *Dieudonné J.*, Calcul infinitesimal, Hermann, Paris, Collection Méthodes, 1968.

[9] *Dunkel O.*, Memorial Problem Book, Amer. Math. Monthly, vol. 64, Part 2.

[10] *Eggleston H. G.*, Convexity, Cambridge, University Press, 1969.

[11] *Faddéev D.* et *Sominski I.*, Recueil d'exercices d'algèbre superieure, Editions Mir, Moscou, 1973.

[12] *Flondor I., Donciu N.*, Algebră și analiză matematică, Culegere de probleme, Editura Didactică și pedagogică, București, 1965.

[13] *Găină St., Câmpu E., Bucur Gh.*, Culegere de probleme de calcul diferențial și integral, vol II—III, Editura Tehnică, București, 1966, 1967.

[14] *Gelbaum B., Olmsted J. M. H.*, Counterexamples in analysis, Holden—Day, San Francisco, 1964.

[15] *Gleason A. M., Greenwood R. E., Kelly L. M.*, The William Lowell Putnam Mathematical Competition, Problems and Solutions 1938—1964, The Math. Association of America, 1980.

[16] *Günther N. M., Kuzmin R.*, Culegere de probleme de matematici superioare, vol I—II, București, Editura Tehnică, 1958 (trad. din limba rusă).

[17] *Hardy G. H.*, Divergent series, Cambridge, University Press, 1949.

[18] *Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.*, Inequalities, Cambridge, University Press, 1967.

[19] *Hille E., Salas S.*, Calculus, Blaisdell Publishing Company, London, 1968.

[20] *Iaglom A. M., Iaglom I. A.*, Probleme neelementare tratate elementar, Editura Tehnică, București, 1962 (trad. din limba rusă).

[21] *Jarnik V.* Casopis pro pestovani matematiky o fisihy, 71 (1946) p. 69.

[22] *Knopp K.*, Infinite Sequences and Series, New-York, Dover Publications, Inc. 1956.

[23] *Коровкин П. П.*. Неравенства, Издание четвертое, Издательство „Наука", Москва, 1972.

[24] *Lefort G.*, Algèbre et Analyse. Exercices, Dunod, Paris, 1964.

[25] *Леман А. А.*, Сборник задач московских олимпиад, Издательсво „Просвещение" Москва, 1965.

[26] *Maron I. A.*, Problems in Calculus of One Variable, Mir Publishers, Moscow, 1973.

[27] *Mitrinović . .*, Analytic inequalities, Springer—Verlag, Berlin, 1970.

[28] *Моровова Е, А, Петраков И. С., Скворцов* В. А., Международные математические олимпиады, Издательство „Просвещение", Москва, 1976. (trad. în limba română).

[29] *Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов* М. К., Задачи вступительных экзаменов по математике Издательсво „Наука, Москва, 1983.

[30] *Polya G., Szegę G.*, Problems and theorems in Analysis, vol I, Springer—Verlag, Berlin 1972.

[31] *Quinet J.*, Cours élémentaires de mathématiques supérieures Tome I—VI, Dunod, Paris, 1966.

[32] *Radu Gh., Corduneanu A., Grămadă V., Pop I.*, Culegere de probleme de matematică, Junimea Iași, 1972.

Scanned with OKEN Scanner

[33] *Ramis E.*, Exercices d'analyse, Masson et co , Paris 1972.
[34] *Рафкинд Я. И.*, Задачи по математическому анализу, Издательство „Вышейшая школа," Минск, 1973.
[35] *Rivand J.*, Exercices d'analyse, Tome I 1973, Tome II 1971, Vuibert, Paris.
[36] *Sierpinski W.*, Elementary theory of numbers, Warszawa, 1964.
[37] *Sireţchi Gh.*, Analiză matematică, vol I (Noţiuni şi Exerciţii introductive de Calcul diferenţial şi integral real) ed. IV-a C.M.U.B. (Centrul de multiplicare al Universităţii din Bucureşti), 1978.
[38] *Sireţchi Gh.*, Analiză matematică, vol II (Exerciţii avansate de Calcul diferenţial şi integral real) ed. II-a, C.M.U.B., 1982.
[39] *Sireţchi Gh.*, Analiză matematică, vol III Fasc. 1 (Teoria mulţimilor. Numere reale. Serii de numere. Funcţii elementare), ed. II-a, C.M.U.B., 1984.
[40] *Sireţchi Gh.*, Analiză matematică, vol III Fasc. 3 (Calcul diferenţial) ed. II-a, C.M.U.B., 1983.
[41] *Sireţchi Gh.*, Topologie generală, C.M.U.B., 1983.
[42] *Виленкин Н. Я.*, Задачник по курсу математического, анализа I — II, Издательство „Просвещение", Москва, 1971.
[43] *Weston J. D.*, and *Godwin H. J.*, Some exercices in Pure mathematics, Cambridge, University Press, 1968.
[44] *Wilkosz W.*, Some properties of derivative functions, Fundamenta Mathematika, 2 (1921), p. 146
[45] *Wong J. S. M.*, Proc. Amer. Math. Soc., 44 (1974).
[46] * * * American Mathematical Monthly, vol. 54(1948) — vol. 85 (1978).
[47] * * * Gezeta matematică, 1964—1984.
[48] * * * Probleme de matematică pentru concurs (Olimpiadele maghiare), Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972 (trad. din limba maghiară).
[49] * * * Revue de Mathématiques Speciales, Paris.
[50] * * * Математика в школе, Научно- Методический журнал, Министерство просвещения, СССР, Москва.

Scanned with OKEN Scanner

Tehnoredactor: MARILENA DAMASCHINOPOL

Coli de` par: 37
Bun de tipar: 4.XII.1985

c. 238 I. P. Informația
Brezoianu nr. 23—25
București

Scanned with OKEN Scanner

Cartea conține peste 1600 de exerciții de calcul diferențial și integral pe dreapta reală, dintre cele mai diverse, complet rezolvate.

Fiecărui capitol din volumul I îi corespunde în acest volum un capitol de exerciții care au drept scop să obișnuiască pe cititor cu manevrarea conceptelor fundamentale și cu unele tehnici de calcul.

Cartea se adresează elevilor din ultimele două clase de liceu, candidaților la admitere în învățământul superior, studenților din anul I din universități (facultățile de matematică, fizică și geologie-geografie), institute tehnice, institute economice, cît și profesorilor de matematică din liceu în munca lor la catedră, pentru pregătirea gradelor didactice sau pentru cursurile de perfecționare.

Scanned with OKEN Scanner